Sobre incompletitud en matemáticas y el Principio de Paris-Harrington

On Incompleteness in Mathematics and the Paris-Harrington Principle

Joel Torres del Valle[1,a], **María Vásquez Ávila**[2,b]

Resumen. Este artículo es de caracter divulgativo: en él hacemos una revisión histórica del problema de incompletitud en matemáticas a partir de finales del siglo XIX hasta el siglo XX. Abordamos una discusión sobre el Principio Combinatorio de Paris-Harrington, PH; cómo podremos expresarlo en el lenguaje de la aritmética y el argumento de la prueba de su indenpendencia de la Aritmética de Peano, PA.

Palabras claves: Teoremas de la incompletitud de Gödel, Programa formalista de Hilbert, Principio de Paris-Harrington, Teorema finito de Ramsey.

Abstract. This is an explanatory article: in it we make a short review of the problem of incompleteness in mathematics from the end of the 19th century to the 20th century. We discuss the Combinatorial Principle of Paris-Harrington, PH; how can we express it in the language of Arithmetic and the argument of the proof of its independence from the Peano Arithmetic, PA.

Keywords: Gödel Incompleteness theorems, Hilbert's formalist program, Paris-Harrington principle, Finite Ramsey Theorem.

Mathematics Subject Classification: 01-01, 01-02, 01-06, 01A60, 01A55.

Recibido: mayo de 2018 Aceptado: julio de 2020

1. Introducción

Durante mucho tiempo existió la pretensión de concebir las matemáticas como una idealización del mundo palpable, y proceder sobre ellas como se haría entre objetos del mundo real. A finales del siglo XIX comenzó la aparición de paradojas en la joven Teoría de Conjuntos del matemático ruso Georg Cantor[1] (1845-1918) y, de esta manera, las matemáticas, que ostentaban el título no

[1]Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia
[a]jtorresdv1@gmail.com
[b]mvasqueza@unicartagena.edu.co

[1]Dicho sea de paso, que si bien Cantor siempre ha sido considerado un matemático ruso (habiendo nacido en Rusia), él se volvió alemán y la mayor parte de su edución fue recibida en alemán. Así las cosas, podríamos considerarle un matemático alemán.

meritorio de *ciencia exacta*, comenzó a desvanecerse. Se observó, pues, que el bello edificio se encontraba parado sobre arenas movedizas y se tambaleaba, al son del viento más ligero.

Comenzó entonces un programa de fundamentación de las matemáticas, con el cual se pretendía la construcción de cimientos sólidos sobre los cuales parar el edificio matemático. De las diversas corrientes de Filosofía Matemática que abordaron el problema, podemos señalar al *Formalismo*. El programa formalista estuvo principalmente impulsado por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943), y su requerimiento final era una prueba de la no contradicción de las matemáticas. Por supuesto, damos por descontado, el sueño de la completitud de los sistemas formales sobre los cuales se fundamentarían las matemáticas. Para David Hilbert, la lógica y la matemática son teorías de forma y no de sentido [1], [2]. Es decir, todas las pruebas se debían llevar a cabo mediante reglas fijas sobre el manejo de símbolos, sin tener en cuenta en ningún momento el significado de los mismos. Pensamiento que queda en claro cuando éste dice: *la matemática es un juego con reglas muy sencillas, que dejan marcas sin significado sobre el papel.*

El afán por una prueba de la no contradicción viene luego de que a partir los trabajos de Gottlob Frege (1848-1925) [4] se pudiera deducir la Paradoja de Russell, que en la simbología de Peano podría expresarse como:[2]

$$\boxed{w = \mathrm{cls} \cap x \ni (x \sim \epsilon x). \supset\colon w \in w. = .w \sim \epsilon w}$$

La cual, en palabras del propio Russell, corresponde a:

> Let w be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can w be a predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that w is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves.

Bertrand Russell in letter to G. Frege.

En otras palabras, de acuerdo al sistema de Frege uno podría encontrar una clase x tal que $x \in x$ si y sólo si $x \notin x$, lo que es una clara contradicción.

Aquí no podemos dejar pasar, por supuesto, la altura con que Frege asume la aterradora noticia de que su trabajo permitía la aparición de paradojas y, lleno de humildad cientifica, añade una nota al segundo volumen de su trabajo [5] (que se encontraba ya en imprenta) en el cual comenta respecto al descubriemiento de Russell en el primer volumen de su trabajo.

En el año 1910 aparece el primer volumen de *Principia Mathematica*, en el que Bertrand Russell (1972-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947), construyen gran parte de la matemática sin paradojas ni contradicciones aparentes (pretendiendo de paso mostrar que toda la matemática puede ser reducida a la

[2]Tomada de la carta de Bertrand Russell (1872-1970) a Gottlob Frege en la que se plantea la paradoja.

lógica, proyecto que más adelante se mostró irrealizable). Quedaba entonces la cuestión de si el sistema resultaba completo, habida cuenta que todo parecía indicar la consistencia. Los primeros pasos hacia un esclarecimiento de este requerimiento se dieron en una dirección que parecía divisar una *luz al final del túnel*. Primeramente en el año 1930, en su tesis doctoral (ver [7]) Kurt Gödel (1906-1978) demuestra la completitud del Cálculo Lógico de Primer orden. Sin embargo, por esas paradojas de la suerte, es el mismo Gödel quien un año después, en 1931 demuestra que si a los Axiomas de Peano para la aritmética, le juntamos toda la lógica de *Principia Mathematica*, no obtenemos un sistema del cual se puedan demostrar todas las verdades sobre los números naturales (ver [8, 6] y [9]).

Concretamente:[3]

1. El sistema no es completo, es decir, en él hay sentencias φ, tales que ni φ ni $\neg\varphi$ son deducibles y, en especial, hay problemas indecidibles con la sencilla estructura $\exists x F x$, donde x varia sobre los números naturales y F es una propiedad de los números naturales.

2. Incluso si admitimos todos los medios lógicos de *Principia Mathematica* en la metamatemática no hay ninguna prueba de consistencia para el sistema en cuestión, S. Por consiguiente, una prueba de consistencia para el sistema S solo puede llevarse a cabo con la ayuda de modos de inferencia que no esten formalizados en el sistema S.

3. Ni siquiera añadiendo a S una cantidad finita de axiomas de tal forma que el sistema extendido permanezca siendo ω-consistente.

No obstante, estas frases encontradas por Gödel no eran algo que un matemático se preguntaría (e.g., un matemático se preguntaría si la conjetura de Goldbach cierta o falsa). Sin embargo, mediante un proceso hoy conocido como Codificación de Gödel, que permite traducir al lenguaje de la aritmética algunos (en realidad muchos) hechos metamatemáticos (como completitud y consistencia) sobre PA, Gödel construye una frase explicita, de la Teoría de Números (pero que sin embargo no surge de manera natural en la misma) que no se puede demostrar ni refutar. La frase de Gödel se puede pensar como una formulación matemática de la paradoja del mentiroso, considerando la sentencia que afirma su propia negación. Queda entonces la cuestión de encontrar afirmaciones matemáticas indecidibles en la teoría y es de esto que se ocupa la siguiente sección.

2. El Principio de Paris-Harrington

En esta sección vamos a explicar la primera afirmación matemática de la Teoría de Números que es indemostrable en la Aritmética de Peano. Primero introdu-

[3]Ver: *Algunos resultados metamátematicos sobre completitud y consistencia*, Kurt Gödel, 1931. Puede encontrarse en *Kurt Gödel: obras completas*, editado y traducido por Jesús Monsterín, Alianza Editorial.

ciremos algunas definiciones pertinentes (ver [11] y [12]).

Sea σ un cardinal y considere $[I]^k$ el conjunto de los subconjuntos de I de cardinal k (e.g., sea $I = \mathbb{N}$ y $k = 1$, entonces $[I]^k := \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$). Una función $P : [I]^k \to \sigma$ se llama una **partición** (o coloración) de $[I]^k$ en σ partes (o colores). Si $P : [I]^k \to \sigma$, llamamos $H \subset I$ **homogéneo** para P si, y sólo si, P es constante sobre $[H]^k$. Notaremos (siguiendo a Erdös) $\kappa \to (\lambda)^n_\sigma$ si siempre que $P : [\kappa]^n \to \sigma$, hay un $H \subset \kappa$ homogéneo para P de cardinalidad λ.

Sea $H \subset \mathbb{N}$ finito. Se dice que H es **relativamente grande** si $\operatorname{card}(H) \geq \operatorname{mín} H$. Dados n, r, k y m números naturales, usaremos la notación

$$m \xrightarrow[*]{} (k)^n_r$$

para índicar que para cualquier partición $P : [m]^n \to r$ hay un $H \subset m$ relativamente grande que es homogéneo para P y de cardinalidad al menos k.

Teorema 2.1 (Teorema finito de Ramsey)**.** *Para todos k, n, m números naturales, existe un l natural, tal que $l \to (m)^n_k$.*

Una aplicación interesante del Teorema 2.1 es la siguiente: *en una reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien tres de ellas se desconocen entre sí.* En efecto, $6 \to (3)^2_2$: tenemos un conjunto con seis personas $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ y el conjunto de colores $C = \{\text{azul}, \text{rojo}\}$ y una coloración $\rho : [P]^2 \to C$, existe un subconjunto H de tamaño 3 tal que o bien $\rho(H) = \text{azul}$ o bien $\rho(H) = \text{rojo}$, si consideramos rojo como el color asignado si las personas se desconocen y azul si estas se conocen, obtenemos el resultado: en una reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien tres de ellas se desconocen entre sí (ver [3]).

En los años 70's Jeff Paris (1944-Ahora) y Leo Harrington (1946-Ahora), en [13] muestran que el resultado siguiente, aunque cierto, no es demostrable en La Aritmética de Peano.

Teorema 2.2 (Principio de Paris-Harrington)**.** *Para todos números naturales n, r y k hay un natural m tal que $m \xrightarrow[*]{} (k)^n_r$.*

De modo que se obtiene un primer resultado de independecia *matemático* en aritmética como se deseaba. En efecto, en años anteriores ya se habían establecido unos tales resultados en Geometría Euclideana (en el siglo XIX) y Teoría de Conjuntos, a saber, el V Postulado de Euclides por parte de János Bolyai (1802-1860) y Nikolái Lobachesky (1792-1856); y la Hipótesis del continuo de Cantor, por parte de Kurt Gödel y Paul Cohen (1934-2007). Sobre el V Postulado de Euclides, se demuestra que es independiente del sistema axiomático de Euclides, y que de la misma manera se pueden construir geometrías donde este valga y donde no, lo que da la aparicición a Geometrías no Euclideanas. Lo mismo sucedió con la Hiopótesis del continuo de Cantor, y quiero aprovechar este parentesís para comentar un poco al respecto. En el año 1940 Kurt Gödel prueba que la Hipótesis Generalizada del continuo HGC (i.e., aquella que afirma que para ningún ordinal α existe un cardinal δ tal que $\aleph_\alpha < \delta < 2^{\aleph_\alpha}$), no puede ser neganda dentro del marco axiomatico de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección, ZFC para la Teoría de Conjuntos. En su prueba, Gödel muestra que si suponemos que ZFC es consistente, entonces ZF+HGC también es una teoría consistente, de modo que HFC no puede ser refutada en ZFC. Posteriormente, en el año 1963, el Matemático estadounidense Paul Cohen, prueba que la Hipótesis tampoco puede ser deducida en ZFC, demostrando que supuesta la consistencia de ZFC, también ZFC+$\neg$HGC es consistente. Para su prueba, Cohen desarrolla el novedoso método del Forcing, que permitió establecer muchos más resultados de independencia en Teoría de conjuntos, siendo este un método que permite la construcción de modelos de la Teoría de Conjuntos a partir de un modelo dado. La introducción de éste le valió la Medalla Fields en el año 1966.

El Teorema 2.2 se conoce como Principio combinatorio de Paris-Harrington, abreviadamente, PH. Uno podría objetar que PH no tiene por qué ser demostrable en PA puesto que no es como tal una afirmación de su lenguaje. Sin embargo, éste sí se puede expresar como una sentencia del lenguaje de la Aritmética: PA es equivalente al marco axiomatico ZF si reemplazamos en ZF el Axioma de infinitud por su negación [13]. Otro argumento sería usar Codificación de Gödel. La codificación es hecha usando "códigos de Gödel" introducida en [7]. Las nociones como "H es una partición de $[m]^n$ en c partes" son expresables en el lenguaje de PA son explicadas en [14] y [10]; [15] también es una buena referencia.

El argumento de la prueba de que PH no es demostrable en PA es el siguiente: Paris y Harrington introducen una cierta teoría T y demuestran que $\mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(PA)$ es un teorema de PA, de donde la prueba de la independencia de PH se completa (por el Segundo Teorema de la Incompletitud de Gödel) al probar que PH $\to \mathrm{Con}(T)$ es también un teorema de PA.

Nota. Este documento está mayormente contenido en la introducción de la monografía de grado [14] del primer autor, escrita en la Universidad de Cartagena durante el año 2017 para obtener el título de Matemático. Esta monografía fue orientada por el segundo autor y co-orientada por Alf Onshuus (Universidad de Los Andes de Colombia).

Referencias

[1] A. Campos, *Epistemología de las matemáticas*, Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[2] J. Dieudonné, *Panorama de las matemáticas puras: la elección Bourbakista*, Reverté, 1987.

[3] P. Fernández and J. Fernández, *El desorden absoluto es imposible: la Teoría de Ramsey*, La Gaceta, Real Sociedad Matemática Espanola, 1999.

[4] G. Frege, *Begriffschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, University of Jena, 1879.

[5] ______, *Die Grundlagen der Arithmetik*, University of Jena, 1884.

[6] K. Gödel, *Discusión sobre los fundamentos de las matemáticas*, En: Kurt Godel, Obras completas, edición por Jesús Monsterin. Alianza editorial, 1981.

[7] ______, *La suficiencia del cálculo lógico de primer orden*, En: Kurt Godel, Obras completas, edición por Jesús Monsterin. Alianza editorial, 1981.

[8] ______, *Sobre sentencias formalmente indecidibles en Principia Mathematica y sistemas afines*, En: Kurt Godel, Obras completas, edición por Jesús Monsterin. Alianza editorial, 1981.

[9] ______, *Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos*, En: Kurt Godel, Obras completas, edición por Jesús Monsterin. Alianza editorial, 1981.

[10] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford Logic guides. Oxford University Press, 1991.

[11] K. Kunen, *Combinatorics*, In: Handbook of mathematical logic, edited by Jon Barwise. North Holland, Amsterdam, 1967.

[12] D. Marker, *Model theory: an introduction*, Primera edition. Springer Verlag, Graduated texts in Mathematics, 2007.

[13] J. Paris and L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*, En: Handbook of mathematical logic, editado por Jon Barwise. North Holland, Amsterdam, 1967.

[14] J. Torres, *Aritmética: un enfoque vía Teoría de Modelos*, Monografía de grado, Universidad de Cartagena, 2017.

[15] V. Tossillo, *Some remarks on the mathematical incompleteness of Peano's arithmetic found by Paris and Harrington*, En:Set theory and Model theory, editado por Jenseer R; and Prestel A. Springer Verlag, 1979.