Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción

Infancia y Aprendizaje, 1987, 39-40, 57-69

José Manuel Serrano *
Ana María Denia

Universidad de Murcia

INTRODUCCION

Los procesos de cuantificación en el hombre suelen estar asociados a dos sistemas cuantitativos (cf. Piaget, 1977). El primero de ellos, que se conoce con el nombre de *sistema de cuantificación intensiva*, permite comparar las partes con el todo. Las estrategias cognitivas utilizadas en este sistema suelen ponerse en juego en aquellas situaciones en que no se necesita una 'perfecta' medida de la cantidad o cantidades que se pretende evaluar o comparar. Esto ocurre en los procesos o mecanismos de inclusión. En efecto, si se pide la comparación entre los vertebrados y los animales, mediante la pregunta «¿qué hay más, vertebrados o animales?», el proceso de cuantificación humano busca aquella estrategia que le permita dar una respuesta satisfactoria con el menor gasto posible. El sistema que pondrá en marcha, entonces, es un sistema de cuantificación intensiva, mediante el uso de los cuantificadores universal y existencial y, puesto que *todos* los vertebrados son *(algunos)* animales y en su desarrollo el individuo ha encontrado permanentemente una evidencia empírica (que le ha llevado a una necesidad lógica) del todo como mayor que las partes (puesto que es su suma), evidentemente será éste el mecanismo que utilice.

Por el contrario, el segundo sistema de cuantificación humano, que recibe el nombre de *sistema de cuantificación extensiva*, está formado por un conjunto de estrategias que se suelen poner en marcha cuando el proceso de comparación exige la puesta en relación de las partes del todo entre sí, o de este todo con otro todo (disyunción). En efecto, si circunscribiéndonos al ejemplo anterior, la pregunta de cuantificación hubiera versado sobre las partes: «¿qué hay más, vertebrados o invertebrados?», la estrategia de cuantificación, basada en el mecanismo de inclusión, anteriormente utilizada por el sujeto, no sería válida en esta nueva situación, ya que las 'clases' que se pretenden ahora comparar son disjuntas. En esta situación, el pensamiento debe buscar un nuevo grupo

* Los autores agradecen a los profesores C. Coll Salvador y J. Palacios González sus siempre acertadas sugerencias que han permitido la formulación final de este trabajo.

de estrategias. Estas estrategias van a determinar dos subprocesos de cuantificación extensiva. El primero de ellos, que se denomina *cuantificación extensiva simple,* es un proceso que permite comparar las partes entre sí, sin necesidad de realizar un proceso de iteración de las unidades discretas que componen el todo, siendo la *correspondencia* (unívoca, biunívoca, etc.) el mecanismo de cuantificación puesto en juego. El segundo de estos subprocesos, que recibe el nombre de *cuantificación extensiva métrica,* realiza la misma operación que el anterior, es decir, la comparación de las partes entre sí, pero mediante un mecanismo que exige la iteración de unidades y que se denomina *conteo.*

Es evidente, por tanto, que, para realizar una comparación entre las partes y el todo, el sistema de cuantificación utilizado (sistema de cuantificación intensiva) es un sistema 'no numérico'; por el contrario, el sistema de cuantificación que conduce a la comparación de las partes (disjuntas) entre sí, es un sistema 'numérico' que presenta dos vertientes cuantificadoras, la *cardinal,* definida por un sistema de *esquemas de correspondencia,* y la *ordinal,* definida por los *esquemas* y las *estrategias de conteo.* Por todo ello, podemos considerar al conteo como *una estrategia de cuantificación extensiva métrica, que se encuentra directamente vinculada a la construcción del concepto de número (fundamental, pero no exclusivamente a sus aspectos ordinales) y a las operaciones de composición y descomposición que garantizan su conservación.* En este sentido, los problemas que impliquen adición y/o sustración de unidades, requerirán (entre otras) el uso de una 'estrategia iterativa' como es el conteo y sus subrutinas.

En efecto, a lo largo de todo el desarrollo evoluciona una habilidad muy significativa para el aprendizaje de las matemáticas y es la habilidad para contar. En la evolución de esta habilidad se pueden encontrar, desde operaciones relacionales muy tempranas que comienzan a manifestarse a partir del año y medio de edad (cf. Case, 1982), como puede ser la producción, por parte del niño, de una etiqueta simbólica al tiempo que transfiere un objeto de un lugar a otro, hasta operaciones relacionales muy tardías puesto que, como ya mostraron Papert y Greco (1960), pueden existir numerosas versiones de la idea de *serie* y, por esta razón, numerosas versiones de la recurrencia. Estas versiones pueden ir a su vez desde la simple iteración numérica (conteo hacia arriba) hasta las formas más sofisticadas de regresión recursiva.

Nuestro trabajo se centrará fundamentalmente en aquellas estrategias de conteo que pueden ser consideradas básicas para la elaboración y resolución de algoritmos de adición y sustracción. Desde esta perspectiva, la literatura psicológica se ha mostrado bastante prolífica en cuanto a trabajos de investigación sobre este tipo de estrategias de cuantificación y las distintas subrutinas que pueden ser analizadas en su seno. Así, Fuson (1982) y Secada, Fuson y Hall (1983) distinguen entre dos formas evolutivas de conteo, cuya transición supone e implica una considerable mejora en la resolución de problemas de adición y sustracción:

a) El *conteo total,* que es aquél en el que el resultado (de la suma) está determinado por el conteo de todos y cada uno de los elementos (de los sumandos). Este tipo de conteo requiere el uso de entidades para ser contadas de acuerdo con el siguiente plan: en primer lugar, el sujeto debe generar o encontrar un conjunto (real o mentalmente representado) para el primer sumando, procediendo, a continuación, de la misma manera para el (o los) restante(s) y, en segundo lugar, deberá contar todos los conjuntos combinados. En otras palabras, en el *conteo total, el niño siempre empieza a contar a partir del número uno* (1, 2, 3, ...).

b) El *conteo parcial* es un proceso más eficiente y rápido. En él, la enumeración (1) empieza a partir del primer sumando (no desde el número 1) y continúa (sin retorno) hasta que el segundo sumando ha sido enumerado.

En este proceso, la suma comienza con un numeral (2) que representa al primer sumando. Fuson (1982) especifica que dicho numeral tiene cuatro significados fundamentales. Los tres primeros hacen referencia exclusivamente al primer sumando, mientras que el cuarto está centrado en la unión intersumandos y permite que el procedimiento funcione.

Los dos primeros significados están relacionados con los aspectos cardinal y de conteo del número. El primero de ellos señala la tránsferencia desde el significado de conteo al de cardinal (dirección conteo→cardinal) y ha sido denominado «regla de cardinalidad» (Schaeffer, Eggleston y Scott, 1974) o «principio cardinal (3)» (Gelman y Gallistel, 1978). Expresa una acción que ha sido completada y es la base del *conteo total.* El segundo de estos dos significados es la base para el *conteo parcial,* puesto que marca la dirección cardinal→conteo con predicción de una acción que puede realizarse: se 'puede' seguir contando a partir de cualquier número distinto de «1» mediante un proceso iterativo idéntico.

El tercer significado, al que hemos denominado *abreviación* (cf. Denia, 1986; p. 47), hace referencia a la producción de un numeral que es el resumen de la enumeración verbal del primer sumando y, por tanto, puede sustituirlo a la hora de elaborar (contar) la suma total (conjunto-suma). Esta sustitución, que es la que permite el inicio del procedimiento de *conteo parcial,* supone la producción del numeral del primer sumando como resumen de éste y, a continuación, la enumeración de los elementos del segundo sumando, sobre la base del numeral del primero, a fin de producir el numeral que llegue a representar a la suma total. Esto es lo que nosotros llamamos «conteo por extensión» y constituye el cuarto de los significados que, como dijimos anteriormente, relaciona los sumandos entre sí en la secuencia final del conteo de la totalidad de los elementos.

Este último significado surge del hecho de que cada sumando juega un doble papel: como sumando en sí, y como parte de la suma total. Esta doble función está representada por una secuencia de numerales que, en un principio, representan el primer sumando, y más tarde se toman como representantes de la primera parte de la suma.

Secada, Fuson y Hall (1983) analizaron los prerrequisitos necesarios para que pueda ser utilizada una estrategia de *conteo parcial,* a partir del estudio de estos cuatro significados. Esos prerrequisitos son:

1. *Poder contar desde un punto arbitrario.* Para ello se requiere una cierta habilidad verbal, aunque la presencia de la misma no es 'condición suficiente' para que pueda ser utilizada esta subrutina.

2. *Identificar que el cardinal del primer sumando es igual al resultado del conteo de los elementos de ese conjunto,* lo que permite la conexión entre los dos primeros significados del numeral (significado cardinal y de conteo) y, por tanto, marca la capacidad del sujeto para pasar de un significado al otro. Fuson (1982) denomina esta posibilidad de cambio de los significados como «transición cardinal-conteo».

Esta habilidad requiere que el niño reconozca que el numeral que denota la cardinalidad del primer sumando es, también, la palabra final producida cuando se cuentan los elementos del primer sumando dentro de la suma total («regla cardinal»).

3. *Identificar el primer elemento del segundo sumando, no como el número '1', sino como conectado al primer sumando.* Esta habilidad deriva del cambio que ocurre en el paso del primer sumando al segundo, dentro del acto de con-

teo de la suma y se basa en los significados de «abreviación» y «conteo extensional» que enlaza el último numeral del primer sumando con el primero del segundo sumando. En efecto, el niño debe cambiar el significado del primer numeral nombrado como «abreviación» del primer sumando, por el significado de «comienzo» y «extensión» para el conteo del segundo sumando y, entonces, continuar la suma total diciendo el siguiente numeral para el primer elemento del segundo conjunto sumado.

Para que se produzca este proceso, el sujeto debe cambiar su actitud con respecto a la relación de los objetos de cada conjunto, no tomándolos como elementos de conjuntos aislados (sumandos), sino como integrados dentro del todal del conjunto-suma. Una dificultad adicional, centrada sobre el segundo sumando, podría ser la del hecho de que el conteo de sus numerales no coincide con los numerales que obtendríamos al contar, de forma aislada, dicho conjunto.

Con respecto a la utilización de estas dos estrategias de conteo en problemas de adición, parece evidente que la subrutina más elemental con la que nos encontramos es, pues, el *conteo total,* en donde la secuencia de conteo comienza a partir del número '1' y continúa hasta llegar al número que se considere como respuesta, es decir, la suma está determinada por el conteo de todos y cada uno de los elementos de los sumandos. Groen (Suppes y Groen, 1967: Groen y Parkman, 1972) llamó a esta subrutina elemental *«modelo SUM»* y Mayer (1986) *«modelo de enumeración completa»*. En el caso de 2+4, el niño cuenta: '1, 2, 3, 4, 5, 6'.

Otras dos subrutinas (que podrían ser las dos caras de una misma moneda) más eficientes y que implican una simplicación conceptual del conteo, se pueden desprender de la segunda de las estrategias descritas. La primera de ellas que se conoce con el nombre de *«modelo de enumeración de continuación»* (Mayer, 1986) comienza la secuencia de conteo —parcial— a partir del primer sumando (counting-on from first). En el caso de 2+4, el niño cuenta cuatro pasos a partir de '2': '3*(1)*, 4*(2)*, 5*(3)*, 6*(4)*'. La segunda, denominada *«modelo MIN»* (Groen y Parkman, 1972; Groen y Resnick, 1977), realiza la secuencia de conteo —parcial— a partir del sumando mayor (counting-on from large) y es siempre el sumando menor el que se añade al otro. En el caso de 2+4, el niño cuenta, por tanto dos 'pasos' a partir de '4': '5*(1)*, 6*(2)*'.

Todas estas estrategias pertenecen a un mismo modelo de conteo que vamos a denominar *«conteo aditivo»* o, como lo denomina Carpenter y Moser (1983), *«conteo hacia arriba hasta»* (counting up to) o, simplemente *«conteo hacia arriba»,* y son estrategias aditivas.

Este modelo aditivo de conteo, una vez que se encuentra suficientemente elaborado, y los sujetos son capaces de utilizar los prerrequisitos del conteo parcial, puede ser utilizado como algoritmo para resolver también problemas y operaciones de sustracción y se conoce con el nombre de *«modelo de incremento»* (Woods, Resnick y Groen, 1975) que, basado en una estrategia de *conteo parcial,* suele ser puesto en marcha por la mayor parte de los sujetos cuando el problema planteado es del tipo de 'búsqueda del sumando desconocido' (Secada, 1981; Steinberg, 1983). Por ejemplo, en el caso de 2+?=6 el niño, en primer lugar, cuenta: '3*(1)*, 4*(2)*, 5*(3)*, 6*(4)*', al mismo tiempo que va representando (por lo general con los dedos de la mano) los elementos del conjunto (sumando) desconocido y, posteriormente, enumera este conjunto y aplica la «regla o el principio cardinal».

Sin embargo, un algoritmo de *conteo parcial* específicamente sustractivo, viene a posibilitar, en determinados casos, una mayor eficiencia en la solución de 'problemas de restar': el *«conteo hacia abajo desde... y hasta...»* (counting down from y counting down to) o, simplemente *«conteo hacia abajo».* Este algoritmo de restar, que se denomina *«modelo de disminución»* (Woods, Resnick y Groen, 1975), presenta dos subrutinas de ejecución (cf. Fuson, 1984).

La primera de ellas, descrita por Steffe, Spikes y Hirstein (1976) y Carpenter y Moser (1984), es un 'deshacer' directo del *conteo parcial.* En efecto, si resolver 2+4=? supone contar 'cuatro pasos' hacia adelante a partir de '2': '3*(1)*, 4*(2)*, 5*(3)*, 6*(4)*'; realizar la operación 6—4=? supone contar 'cuatro pasos' hacia atrás a partir del '6': '5*(1)*, 4*(2)*, 3*(3)*, 2*(4)*' y, a continuación, aplicar la «regla o principio cardinal».

La segunda de las subrutinas de *«conteo hacia abajo»* pretende reproducir, inversamente, el *«modelo de enumeración de continuación».* En efecto, si en nuestro permanente ejemplo observamos la solución dada por la subrutina anterior a la operación de restar y la comparamos con la operación directa (suma original), podemos observar que a los mismos objetos no se les han atribuido los mismos numerales. Esto se debe a que en la operación 'resta' la subrutina de conteo se detiene cuando se produce el nombre del cardinal del sumando desconocido (2), mientras que en la operación suma no se parte de este numeral, es decir, el primer numeral nombrado no es '2', sino '3'. Por esta razón, algunos investigadores (cf. Secada, 1982; Baroody, 1984) han descrito esta segunda subrutina que comienza a funcionar, en una secuencia de *«conteo hacia abajo»*, a partir del numeral que define al minuendo tantos 'pasos' como indica el numeral del sustraendo y donde, evidentemente, la solución de la operación planteada no puede venir determinada por la «regla cardinal», sino por la ampliación del significado extensional del *conteo parcial* hacia arriba a este nuevo algorritmo de contar. En nuestro ejemplo (6—4=?) se procedería así: '6*(1)*, 5*(2)*, 4*(3)*, 3*(4)*', luego (aplicando el significado extensional) es el numeral '2' desde el que habría que partir para llegar al numeral '6' a través de 'cuatro pasos'.

Las subrutinas definidas para el *«modelo de disminución»* parecen ser más complejas que las definidas para el *«modelo de incremento»* y Carpenter y Moser (1984) encontraron que, en los problemas que suponen 'separar' o 'restar' elementos, el *«conteo hacia arriba»* no sólo aparece antes que el *«conteo hacia abajo»*, sino que, además, la mayoría de los niños, a lo largo de su escolaridad, sólo llegan a utilizar la primera de estas estrategias para resolver problemas de sustracción. Resultados parecidos obtuvieron Secada (1980) y Steinberg (1983). Por otra parte, las subrutinas de *«conteo hacia abajo»* no siempre son más eficientes que las de *«conteo hacia arriba»*, de ahí que los buenos solucionadores de problemas de sustracción utilicen lo que se llama *«modelo de elección»* (Woods, Resnick y Groen, 1975). En este modelo se utiliza o bien el *modelo de incremento,* o bien el *modelo de disminución.* en función (y de acuerdo con la ley de *«economía» del pensamiento*) de cuál de ellos requiera menor esfuerzo, expresando éste en términos de enumeraciones necesarias, para llegar a la solución. Por ejemplo, 6—4 requiere cuatro enumeraciones si se utiliza el *modelo de disminución;* pero sólo dos si se utiliza el *modelo de incremento.* Por el contrario, 6—2 requiere dos enumeraciones a partir del *modelo de disminución,* pero cuatro si se utiliza el *modelo de incremento.*

Todo ello nos permite postular que las estrategias de conteo se encuentran directamente vinculadas a las operaciones de adición y sustracción, por lo que las subrutinas que utilice el niño van a influir de forma directa en la ejecución de dichas operaciones. Esta afirmación será la hipótesis de partida en este trabajo.

METODO

Sujetos

La muestra utilizada estaba compuesta por setenta y cuatro sujetos (treinta y siete niños y treinta y siete niñas), seleccionados mediante un proceso aleatorio simple, entre los niveles de 1º, 2º, 3º y 4º de E.G.B. del C.P. «José María Lapuerta» de la ciudad de Cartagena. Este Centro se encuentra ubicado en un entorno socio-económico de tipo medio.

De los setenta y cuatro sujetos, veinte eran de 1º de E.G.B., diecinueve de 2º, quince de 3º y veinte de 4º. En el grupo de 1º, el rango de edad era de seis años a seis años y once meses, con una media de seis años y cuatro meses; en 2º oscila entre siete años y ocho años dos meses, con una media de siete años y cinco meses; en 3º, el rango va desde ocho años y un mes hasta nueve años y once meses, con una media de ocho años y siete meses; en 4º, el rango va desde nueve años a diez años, con una media de nueve años y cinco meses.

Procedimiento y material

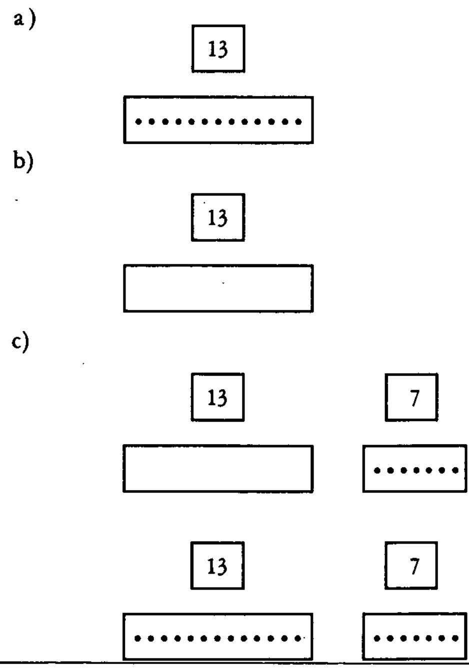
Para analizar las estrategias de conteo *(conteo total vs. conteo parcial)* usamos una adaptación de una prueba utilizada, con este fin, por Secada y Fuson (en preparación) que, a su vez, fue adaptada a partir de una tarea de Steffe, Spikes y Hirstein (1976).

Material: Un juego de tarjetas blancas, cuya longitud era de 4 cm. con *m* puntos en su interior (entre 1 y 20), aumentando 1,5 cm. cada tarjeta que, a su vez, contenía un punto más.

Un juego de tarjetas más pequeñas y cuadradas (3 x 3 cm.), con los números cardinales correspondientes a las tarjetas anteriores.

FIGURA 1

Distribución del material presentado en la tarea de conteo



Presentación del material y consignas: Una de las tarjetas, que contiene puntos en su interior, se coloca frente al niño mientras el experimentador le dice: «Aquí hay *m* puntos». A continuación , el experimentador pone sobre la anterior una tarjeta con el cardinal que le corresponde, diciendo: «Esta tarjeta dice cuántos puntos hay aquí» (señala la tarjeta de puntos y se lo demuestra al niño) (figura 1.a) y, a continuación, sigue diciendo: «Pero ahora voy a esconderte la tarjeta de puntos» (le da la vuelta, la pone boca abajo y la deja en esta posición) (figura 1.b).

Una tarjeta con puntos se coloca a la derecha de la anterior y se le pone su tarjeta con el cardinal, mientras el experimentador repite lo mismo que hizo con la tarjeta que contenía *m* puntos, utilizando ahora otra tarjeta con *n* puntos ($m > n$), pero sin darle la vuelta, con lo que el niño tiene la tarjeta de la derecha boca abajo y la de la izquierda boca arriba (figura 1.c). Después el experimentador le pregunta al niño: «¿Cuántos puntos hay en las dos tarjetas juntas?». Si el niño no comprende la pregunta se le repite diciendo: «... en total», en lugar de «... las dos juntas». El experimentador le insiste al niño sobre el cardinal de la tarjeta: «Este número nos dice cuántos puntos hay» (señala la tarjeta de la izquierda; figura 1.c), y se le aclara: «no tienes por qué contarlos, pero puedes hacerlo si lo necesitas». «¿Cuántos puntos hay en las dos tarjetas juntas (en total)?».

Hay que tener en cuenta que *m* y *n* están en función de los números que el niño conoce (por ejemplo, para los niños de 1° de E.G.B., $m+n < 10$, mientras que para los niños de 2°, 3° y 4°, $m+n \geqslant 10$).

La duración de la prueba fue de diez minutos, aproximadamente.

Las respuestas posibles son:

1. Conductas propias del *conteo total* (4):
   - El niño cuenta todos los puntos (de ambas tarjetas) en voz alta o baja.
   - Cuenta todos los puntos del primer sumando (tarjeta de la izquierda).
   - Si la tarjeta está boca abajo, cuenta los puntos imaginariamente haciendo, por ejemplo, movimientos con los labios de los números leídos
   - No tiene en cuenta la tarjeta con el cardinal.
   - Da la vuelta a la tarjeta (izquierda) para contar sus puntos.

2. Conductas propias del *conteo parcial* (5 y 6):
   - *Conteo parcial* en voz alta o baja, es decir, el niño cuenta, solamente, el segundo sumando (tarjeta de la derecha), partiendo del cardinal del primer sumando (tarjeta de la izquierda).
   - Pasa, rápidamente, al segundo sumando, y cuenta sus elementos.
   - Dirige, casi exclusivamente, su mirada al segundo sumando, y da la solución rápidamente.

Análisis de los resultados

Para analizar los resultados obtenidos en la tarea de conteo, hemos utilizado una prueba no paramétrica, con el propósito de dar cuenta de las posibles interacciones entre el «tipo de conteo» y las «habilidades aritméticas de adición y sustracción»; teniendo en cuenta que los dos niños que se encontraban en la *transición* de un tipo de conteo al otro *(conteo total → conteo parcial)* fueron adscritos al grupo de *conteo total.* Además, tuvimos que eliminar a un sujeto puesto que no sabía contar ni, evidentemente, sumar y restar. Para la evaluación de las habilidades aritméticas se utilizó una prueba de sumas y restas (con y sin reagrupación) (7).

Los resultados de este análisis muestran que existe una clara relación de dependencia entre ambas variables («tipo de conteo» y «habilidad aritmética»), $X^2 = 39{,}27$, valor que es significativo incluso por encima de $\alpha < .01$.

TABLA I

Clasificación de los sujetos según el tipo de conteo y las habilidades aritméticas

Tipos de conteo / Habilidades aritméticas	Sumas sin reagrupar y sumas y restas sin reagrupar	Sumas con reagrupación y restas sin reagrupación	Sumas y restas con reagrupación	
CONTEO TOTAL	22	1	2	25
CONTEO PARCIAL	5	12	31	48
	27	13	33	73

Por tanto, se puede concluir que existen diferencias estadísticamente significativas en la ejecución de operaciones de adición y sustracción, entre los sujetos que utilizan el *conteo total* y aquéllos que utilizan el *conteo parcial.*

Por otro lado, analizando el nivel de «habilidades de adición y sustracción» y el tipo de conteo en los cuatro cursos (1º, 2º, 3º y 4º de E.G.B.) a los que pertenecen los sujetos de la muestra, observamos una progresiva evolución paralela en el desarrollo del conteo y las habilidades aritméticas analizadas, en la que se pueden distinguir tres niveles:

A. *Conteo total y capacidad de sumar sin reagrupación de unidades y decenas, o sumar y restar sin reagrupación.* Este nivel se corresponde con 1º de E.G.B. Ejemplos de operaciones: 5+3; 13+14; 5—3; etc.

B. *Transición del conteo total al conteo parcial y capacidad de sumar con reagrupación y restar sin reagrupación.* Este nivel se corresponde, básicamente, con 2º de E.G.B. Ejemplos de operaciones: 18+4; 17+18; 15—3: etc.

C. *Conteo parcial y capacidad de sumar y restar con reagrupación.* Este nivel se corresponde con 3º y 4º de E.G.B. Ejemplos de operaciones: 15+19; 20—15; etc.

Finalmente, hemos de hacer constar que ninguno de nuestros sujetos utilizó espontáneamente el *conteo hacia abajo* para resolver operaciones de sustracción.

TABLA II

Clasificación de los sujetos según el tipo de conteo y las habilidades aritméticas

Habilidades aritmét. / Nivel de enseñanza	Sumas sin reagrupación y sumas y restas sin reagrupación		Sumas con reagrupación y restas sin reagrupación		Sumas y restas con reagrupación	
	Conteo total	Conteo parcial	Conteo total	Conteo parcial	Conteo total	Conteo parcial
1º	19	0	0	0	0	0
2º	3	5	0	9	0	2
3º	0	0	0	4	1	10
4º	0	0	0	0	1	19

El proceso de cuantificación de lo real es considerado por nosotros como una subclase de actividades cognitivas implicadas en la manera de codificar, transformar y almacenar información cuantificada. Este proceso presenta dos vertientes o subprocesos: el subproceso cuantificación intensiva (permite comparar las partes con el todo) y el subproducto de cuantificación extensiva (que permite comparaciones parte-parte).

El subproducto de cuantificación extensiva, en su vertiente métrica, suele utilizar, como método fundamental para enfocar una tarea cognitiva, el *conteo.* En este sentido, tomado de Kirby (1984), podemos considerar el conteo como una estrategia iterativa, utilizada por los sujetos a modo de algoritmo para solucionar problemas que invoquen implícita o explícitamente a un proceso de cuantificación extensiva iterativa (métrica).

En el análisis de esta estrategia de cuantificación, parecen ponerse de manifiesto distintas subrutinas que delimitan la capacidad de los sujetos para resolver problemas aritméticos elementales. Estas subrutinas han sido ampliamente analizadas por numerosos autores como, por ejemplo, Fuson (Fuson, 1982; Secada, Fuson y Hall, 1983), Carpenter y Moser (Carpenter y Moser, 1983; 1984), Steinberg (Steinberg, 1983), Groen (Groen y Parkman, 1972; Groen y Poll, 1973; Woods, Resnick y Groen, 1975), etc., que han llegado a determinar una secuencia evolutiva, más o menos invariante, de las mismas.

Nuestros resultados vienen a confirmar y completar los obtenidos por éstos y otros autores, de tal forma que las diversas estrategias y subrutinas que los sujetos ponen en juego a la hora de resolver problemas y operaciones aritméticas de adición-sustracción pueden ser jerarquizadas y determinan las posibilidades cognitivas de los niños para resolver este tipo de problemas.

En este sentido, nuestra investigación nos ha permitido encontrar y analizar dos subrutinas en el seno de la estrategia de *conteo total,* que se encuentran muy vinculadas a la naturaleza del problema planteado:

— En la subrutina más larga, el niño, ante una operación del tipo $m+n$ (por ejemplo, $2+4=?$) procede como sigue. En primer lugar, debe encontrar un conjunto que represente al primer sumando (por lo general, los dedos de la mano) para lo cual cuenta: '1,2'. A continuación, actúa de la misma forma para el segundo sumando, y cuenta: '1, 2, 3, 4'. Finalmente, cuenta los elementos del conjunto-suma: '1, 2, 3, 4, 5, 6'. Esta subrutina suele ser utilizada, por nuestros sujetos «contadores totales», cuando los datos del problema planteado no son entes concretos y presentes, como pueden ser, por ejemplo, los enunciados verbales sin soporte empírico o las clásicas 'sumas' en donde los sumandos no suelen referirse a ningún tipo de realidad.

— Sin embargo, cuando los sumandos están representados físicamente o existe una representación gráfica de las cantidades que designan, los sujetos «contadores totales», recurren a una estrategia bastante más económica que es la que hemos denominado, alternativamente, en la *Introducción, «conteo total»* (Fuson, 1982), *«estrategia SUM»* (Groen y Parkman, 1972), y *«modelo de enumeración completa»* (Mayer, 1986) y en la que, a pesar de no utilizar la regla de *abreviación* por comenzar el conteo a partir de '1', sí que aparece un esbozo de conteo extensional, que es una condición necesaria (aunque, evidentemente, no suficiente) para una estrategia de *conteo parcial.* Por ejemplo, si le damos a un niño de 1º de E.G.B. tres canicas y se las ponemos en una mano, a continuación le damos otras cuatro y se las ponemos en la otra y, finalmente, le preguntamos que «¿cuántas canicas te hemos dado?», procederá así: '1, 2, 3, ... 4, 5, 6, 7', con lo cual ha identificado el primer elemento del segundo sumando, no como el número '1', sino como conectado al primer sumando, lo que, según Secada, Fuson y Hall (1983), es un prerrequisito necesario para que pueda ser utilizada una estrategia de *conteo parcial.*

Una primera conclusión vendría, por tanto, a reforzar la idea de que los primeros algoritmos de cálculo deben referirse a la posibilidad de solucionar problemas simples y concretos, referidos a situaciones reales e igualmente concretas. Además, «los algoritmos de cálculo dependen de la disponibilidad, por parte del sujeto, de unas técnicas bien asimiladas» (Mayer, 1986; p. 183) y, por ello, es conveniente facilitar la puesta en marcha de determinadas estrategias de conteo antes de comenzar a utilizar los algoritmos que permiten resolver este tipo de problemas, pues, no olvidemos que los primeros algoritmos de cálculo tienden a utilizar como base, y junto con la experiencia del niño, las estrategias de conteo. De esta manera, el uso de una estrategia de *conteo parcial,* no sólo permitirá una mayor eficiencia y economía en la solución de problemas de adición, sino que, además, es condición necesaria para la elaboración de algoritmos de sustracción, por lo que toda planificación de actividades que tienda a fomentar la puesta en marcha de una estrategia de este tipo puede ser considerada positiva.

En este mismo orden de cosas, pero volviendo a los problemas de la forma $m+n$, parece ser que, en un primer momento, las 'sumas tipo' con los dos sumandos presentes (2+4=?) favorecen la puesta en marcha de la primera subrutina de *conteo total* ('1, 2' y '1, 2, 3, 4' ='1, 2, 3, 4, 5, 6'), mientras que los problemas formulados como búsqueda de sumando desconocido (2+?=6) parecen favorecer la puesta en marcha de esa subrutina, más eficaz, de la que hablábamos, en la que se incluyen algunos prerrequisitos del *conteo parcial* ('1, 2' ... '3*(1)*, 4*(2)*, 5*(2)*, 6*(4)*').

Igualmente se puede constatar cómo, con la aparición de la conmutatividad, la subrutina de «conteo parcial desde el primer sumando» deviene en una subrutina más elaborada, como es la «estrategia MIN» (el sumando menor se añade al mayor), a fin de conseguir una mayor economía y eficiencia en el proceso.

Lo anteriormente expuesto nos permite concluir que a medida que los niños van adquiriendo mayor experiencia en problemas de adición y sustracción, se van desarrollando nuevas subrutinas cada vez más eficientes, al tiempo que se van memorizando las respuestas a problemas sencillos de acción y sustracción (podemos observar cómo los niños de 1° de E.G.B. suelen ser muy rápidos en las soluciones a los «dobles»: 2+2; 3+3; etc.), originándose un campo de respuestas automáticas o «posibilidades conocidas» (Fuson, 1982) que facilita aun más la solución de este tipo de problemas.

Finalmente, un conjunto de estrategias no vinculadas directamente con los esquemas de conteo y, por tanto, no analizadas en este trabajo, han sido encontradas en las conductas de nuestros sujetos más evolucionados y hacen referencia a la automatización del sistema decimal de numeración. Tales estrategias tienden, fundamentalmente, a completar unidades de segundo orden (decenas) y derivan de la comprensión de la conmutatividad y la asociatividad de la adición. Así, 7+5+3=? es calculado, por algunos sujetos como 7+3+5=? → (7+3)+5=? → 10+5=15.

Una última cuestión creemos que merece una mención especial y es la que emana del hecho de que ninguno de nuestros escolares recurra a ninguna subrutina del *«conteo hacia abajo»* para resolver problemas de sustracción. Como lo muestran los resultados de los trabajos de algunos investigadores (Secada, 1980 y 1981; Steinberg, 1983; Carpenter y Moser, 1984), el *«conteo hacia arriba»* es un algoritmo de contar más usado que cualquier subrutina de *«conteo hacia abajo»*. Las causas de este fenómeno habría que buscarlas, quizás, en el análisis de esas tres clases de estructuras irreductibles que, según Piaget, se pueden encontrar en los sujetos del *período de preparación y organización de las* *operaciones concretas.* En efecto, Piaget (1979) postula la existencia de tres tipos de estructuras isomorfas a las *estructuras madres* de los BOURBAKI (8):

— Estructuras que se refieren a objetos y no a relaciones (isomorfas a las estructuras algebraicas), siendo los objetos manipulados mediante operaciones cuya forma de reversibilidad es la *inversión,* en el sentido de que el producto de la composición entre la «operación directa» y la «operación inversa» es el *elemento neutro,* que corresponde a la anulación de toda transformación. En efecto, puesto que $a=a$ y '0' es el elemento neutro de la adición, tenemos que $a=a+0$, luego $a—a=0$, es decir, $(+a)+(—a)=0$, donde $(—a)$ es el inverso de $(+a)$.

— Estructuras que se refieren a relaciones (isomorfas a las estructuras de orden), manipuladas por medio de operaciones cuya forma de reversibilidad consiste en la *reciprocidad,* es decir, en la permutación de las relaciones. Por ejemplo, «precede a» y «sucede a».

— Estructuras que se basan en las nociones de vecindad, límite y continuidad (isomorfas a las estructuras topológicas).

Ahora bien, como la adición en el campo de los números naturales (enteros positivos) presenta una estructura de *semigrupo (abeliano con elemento neutro),* que es una «estructura algebraica» y no una «estructura de orden» (retículo, etc.), parece evidente que la forma de reversibilidad más adecuada no debe ser la reciprocidad (R), sino la inversión (N).

Esto vendría a justificar y explicar la dificultad que presenta el pensamiento de nuestros sujetos, incluso el de aquéllos que ya saben *contar hacia abajo,* para aplicar este algoritmo a las operaciones de sustracción, puesto que *contar hacia abajo* es la operación «recíproca» de *contar hacia arriba.* En efecto, 'cambiar' o 'intercambiar' estos dos algoritmos de conteo supone cambiar la relación «sucede a» (conteo hacia arriba) por la relación «precede a» (conteo hacia abajo) y, por tanto, aplicar la reversibilidad de una estructura de orden a una estructura algebraica (adición de números naturales), con las dificultades que esto conlleva, pues no olvidemos que una coordinación de estas dos formas de reversibilidad en una estructura de conjunto ($N*R=C$) sólo aparece muy tardíamente (en la frontera con las operaciones formales).

Para concluir, y aunque, como lo prueba el planteamiento de nuestra hipótesis experimental, no era nuestra intención en este trabajo elaborar un modelo de enseñanza-aprendizaje de la adición y la sustracción, es evidente que podrían extraerse del mismo algunas normas psicopedagógicas y no nos resistimos a la tentación de elaborar unos apuntes finales acerca de este aspecto.

A la luz de los resultados obtenidos en nuestro trabajo, no parece descabellado llegar a afirmar la importancia del conteo en la enseñanza de las habilidades aritméticas de adición y sustracción. En efecto, puesto que hemos comprobado que existe una clara relación de dependencia entre el «tipo de conteo» y las «habilidades aritméticas», y además se observa un paralelismo en el desarrollo de estas habilidades y el conteo, parece evidente que un análisis de las estrategias de conteo y sus subrutinas se impone al establecimiento de objetivos a la hora de programar actividades que impliquen problemas de adición y sustracción.

En este sentido merece la pena destacar los siguientes aspectos:

En primer lugar, parece ser que el conteo se desarrolla degún la siguiente pauta evolutiva: *conteo total* → *conteo parcial* (hacia arriba) → *estrategia MIN* → *conteo parcial* (hacia abajo → *estrategias complejas* (de memorización, de complementación de decenas, etc), y el aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción debe ser respetuoso con esta secuencia. Por ejemplo, a un sujeto «contador total» no se le puede plantear un algoritmo de sustracción puesto que éste requiere el uso de alguna estrategia de conteo parcial, todavía inaccesibles para él.

En segundo lugar, y con el fin de favorecer la aparición de este tipo de estrategias, es conveniente plantear algoritmos de «búsqueda de sumando desconocido» (3+?=5; p.e.) puesto que parecen ser facilitadores del conteo desde un punto (o valor determinado). En este orden de cosas y para que esta estrategia, una vez adquirida, se torne más eficiente, se deberán plantear actividades que desarrollen la comprensión de la conmutatividad que facilitarán, respectivamente, la estrategia MIN y la agrupación de decenas, lo que va a permitir una mayor eficiencia en los procesos de adición.

En tercer lugar, no parece muy rentable, desde el punto de vista psicoeducativo, enseñar a restar mediante una estrategia de conteo hacia abajo puesto que, como ya hemos apuntado con anterioridad, es una estrategia mucho más compleja que la de *conteo hacia arriba* (Carpenter y Moser, 1984; Secada, 1981, Steinberg, 1983) y sólo resulta más eficiente en algunos casos muy concretos. Así, los trabajos de Groen en los que se han estudiado los tiempos de reacción para la resolución de algunas operaciònes aritméticas elementales (Groen y Parkman, 1972; Groen y Poll, 1973; Groen y Resnick, 1977; Wood, Resnick y Groen, 1975) apuntan dos criterios para resolver, con un índice alto de eficiencia, algoritmos de sustracción: el criterio de *«proximidad-lejanía»*, que dice que si el minuendo y el sustraendo son números cercanos se utilizará una estrategia de *conteo hacia arriba,* utilizando la de *conteo hacia abajo* en caso contario; y el criterio de *«doble sustraendo»*, que dice que si el doble del sustraendo es mayor que el minuendo se utilizará el *conteo hacia arriba* y si es menor el *conteo hacia abajo.*

Notas

[1] Entendemos por *enumerar,* hacer expresión sucesiva y ordenada de las partes de que consta un todo, distinguiéndolo del verbo *numerar* en cualquiera de sus tres acepciones: *a)* marcar con números; *b)* expresar numéricamente la cantidad y *c)* contar por el orden de los números.

[2] Entendemos por *numeral,* lo perteneciente o relativo al número: las letras romanas (I, V, ...), los adjetivos numerales (cardinales y ordinales), etc. El «número» es un *concepto* y el «numeral» su *nombre.*

[3] El «principio» o «regla cardinal» establece que la última palabra contada en la enumeración de un conjunto de objetos es el número cardinal de ese conjunto.

[4] Consideramos a un niño *contador total* si da las respuestas apropiadas a este tipo de conteo en dos (o tres) ensayos.

[5] Consideramos a un niño *contador parcial* si da las respuestas apropiadas a este tipo de conteo en dos (o tres) ensayos.

[6] En el caso de que el niño dé en dos ensayos la misma respuesta, se le presenta un nuevo ensayo para asegurar su nivel de conteo. Si este último ensayo no ayuda a aclarar qué tipo de conteo utiliza el sujeto, se le puede situar en un tercer tipo de conductas que reflejan la *transición* de uno a otro.

[7] Entendemos por operaciones sin reagrupación cuando cada suboperación parcial puede ser resuelta sin recurrir a un orden de unidades distinto al suyo, en caso contario sería con reagrupación.

[8] Nicolás Bourbaki es un pseudónimo colectivo adoptado por un grupo de matemáticos franceses contemporáneos, como H. Cartan, A. Weyl, J. Dieudonné, etc.

Resumen

A lo largo del presente trabajo se analizan las diferencias existentes entre los diversos procesos puestos en juego por los sujetos a la hora de cuantificar lo real, destacando de entre ellos el subproceso de cuantificación extensiva métrica y uno de los esquemas básicos que lleva aparejados: el esquema de conteo. A continuación se pasa a analizar las diferentes estrategias utilizadas por nuetros escolares de 1º, 2º, 3º y 4º de E.G.B. cuando aplican este esquema para la resolución de algoritmos de adición y de sustracción, destacando la vinculación entre el desarrollo de las estrategias de conteo y la eficiencia en la solución de estos algoritmos.

Summary

In the current paper it is analysed the existing difference between the several processes the subjects use in order to quantify the reality, emphasizing between them both the subprocess of the metrical extensive quantification and the jointed basic scheme of counting. Then, it is analysed the different strategies used by our school children of first, second, third and fourth grade E.G.B., when they apply this scheme for the solving of addition and subtraction algorithmes, being distinguished the link between the development of counting strategies and the efficiency in solving both algorithms.

Referencias

BAROODY, A. J. (1984). «Children's difficulties in subtraction: some causes and questions». *Journal for Research in Mathematics Education 15;* pp. 203-213.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1982). «The development of addition and subtraction problem-solving skills». En T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (eds.): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, New Jersey: L. E. A.; pp. 9-24.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1983). «The acquisition of addition and subtraction concepts». En R. L. Lesh & M. Landau (eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press; pp. 7-44.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1984). «The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three». *Journal for Research in Mathematichs Education, 15;* pp. 179-202.

CASE, R. (1982). «General developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in Arithmetic». En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, New York: L. E. A.; pp. 156-170.

DENIA, A. M. (1986). El desarrollo de las habilidades de adición y sustracción y sus algoritmos: Un enfoque cognitivo. Memoria de Licenciatura inédita. Murcia: Universidad de Murcia.

FUSON, K. C. (1982). «An analysis of the counting-on solution procedure in addition». En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, New Jersey: L. E. A.; pp. 67-82.

FUSON, K. C. (1984). «More complexities in subtraction». *Journal for Research in Mathematics Education, 15;* pp. 214-225.

GELMAN, R. y GALLISTEL, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

GRECO, P. (1960). «Recherches sur quelques formes d'inferences arithmetiques et sur la comprêhension de l'iteration numerique chez l'enfant». En P. Greco, J. B. Grize, S. Papert y J. Piaget (eds.): *Problèmes de la construction du nombre.* París: P. U. F.; pp. 149-213.

GROEN, G. J. y PARKMAN, J. M. (1972). «A chronometric analysis of simple addition». *Psychological Review, 79;* pp. 329-343.

GROEN, G. J. y POLL, M. (1973). «Substraction and the solution of open sentence problems». *Journal of Experimental Child Psychology, 16;* pp. 292-302.

GROEN, G. J. y RESNICK, L. B. (1977). «Can preschool children invent addition algorithms?». *Journal of Educational Psychology, 69(6);* pp. 645-652.

KIRBY, J. R. (1984). «Strategies and processes». En J. R. Kirby (ed.): *Cognitive Strategies and Educational Performance.* New York: Academic Press; pp. 3-12.

MAYER, R. E. (1986). «Capacidad matemática». En R. J. Stenberg (ed.): *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información.* Barcelona: Labor; pp. 165-194.

PAPERT, S. (1960). «Problèmes epistemologiques de la recurrence». En P. Greco, J. B. Grize, S. Papert y J. Piaget (eds.): *Problèmes de la construction du nombre.* París: P. U. F.; pp. 117-148.

PIAGET, J. (1977). *Ensayo de lógica operatoria.* Buenos Aires: Guadalupe.

PIAGET, J. (1979). «Los datos genéticos». En J. Piaget (ed.): *Tratado de lógica y conocimiento científico. III-Epistemología de la matemática.* Buenos Aires: Paidós; pp. 15-32.

SCHAEFFER, B.; EGGLESTON, V. H. y SCOTT, J. L. (1974). «Number development in young children». *Cognitive Psychology, 6;* pp. 357-379.

SECADA, W. G. (1980). «Effects of set difference and presence of addend objects on subtraction solution procedures». Anotaciones no publicadas.

SECADA, W. G. (1981). «Skills and concepts underlying verbal subtraction solution procedures». Anotaciones no publicadas.

SECADA, W. G. (1982). «The use of counting by manual deaf children for addition and subtraction». Ponencia presentada a la reunión de la American Educational Research Association. New York.

SECADA, W. G. y FUSON, K. C. (en preparación). «Addition counting solution procedures: Preliminary empirical findings». Evanston, Illinois: North-Western University.

SECADA, W. G.; FUSON, K. C. y HALL, J. W. (1983). «The transition from counting-all to counting-on in addition». *Journal for Research in Mathematics Education, 14(1);* pp. 47-57.

STEFFE, L. P.; SPIKES, W. C. y HIRSTEIN, J. J. (1976). *Summary of cuantitative comparison and class inclusion as readiness variables for learning first-grade arithmetical content.* Athens: University of Georgia. Center for Research in the Learning and Teaching of Mathematics.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. y RICHARDS, J. (1982). «Children's counting in arithmetical problem-solving». En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.): *Addition and Subtraction: A cognitive Perspective.* Hillsdale. New Jersey: L. E. A.; pp. 83-98.

STEINBERG, R. M. (1983). «Instruction in the use of derived facts strategies in addition and subtraction». Tesis Doctoral inédita. University of Wisconsin.

SUPPES, P. y GROEN, G. J. (1967). «Some counting models for first grade performance data on simple addition facts». En J. M. Sandura (ed.): *Research in Mathematics Education.* Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics.

WOODS, S. S.; RESNICK, L. B. y GROEN, G. J. (1975). «An experimental test of five process models for subtraction». *Journal of Educational Psychology, 67;* pp. 17-21.