Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017
eISSN 2526-6136 http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v1n22017a05

Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas

A look at the hierarchy of the four arithmetic operations in the numerical expressions

Aline Brum Ottes
Ricardo Fajardo

Resumo:
Este artigo é um recorte de dissertação de mestrado que teve como objetivo principal encontrar uma justificativa para a hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas. No decorrer da pesquisa, nos deparamos com autores que relatam que expressão numérica é um conteúdo que ainda se faz presente no dia a dia escolar e nos livros didáticos. Porém, documentos oficiais como, por exemplo, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), não os trazem mais. Para melhor embasar o trabalho da dissertação, verificamos como este conteúdo é apresentado nos documentos oficias tais como PCN e Matriz de Referência de Matemática – SAEB/Prova Brasil, assim como em alguns livros didáticos adotados nas escolas onde atuamos. Não encontrando justificativa para a hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas, apresentamos uma proposta de justificativa para esta hierarquia.

Palavras-chave: Expressões numéricas. Hierarquia. Documentos oficiais. Livros didáticos.

Abstract:
This article is a clipping of master's dissertation that had as main objective to find a justification for the hierarchy of the four mathematical operations in the numerical expressions. During the research, we have found authors who commented that numerical expressions is a content that it is still present in school everyday and in school textbooks. However, official documents, such as the National Curricula Parameters (NCP), do not bring numerical expressions any more. To support the dissertation research, we verified how in fact this content is presented in official documents such as the NCP and the matrix of mathematical reference – SAEB/Prova Brasil, as well as in some school textbooks used in the schools where we work. Since we have found no explanation for the hierarchy of the four mathematical operations in the numerical expressions, we present a proposition of justification for this hierarchy. However, before that, we present a brief history of the content.

Keywords: Numerical expressions. Hierarchy. Official documents. Textbooks.

Aline Brum Ottes
Mestre em Educação Matemática e Ensino de Física pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Professora da Secretaria Municipal de Educação de São Sepé (SME-SS) e da Escola de Ensino Fundamental Nossa Senhora da Providência, Santa Maria, Brasil. E-mail: alinebrumottes@hotmail.com.

Ricardo Fajardo
Doutor em Matemática pela Universidade de Rochester. Professor da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Brasil. E-mail: rfaj@ufsm.br.

Recebido em 27/02/2017
Aceito em 20/06/2017

1 Introdução

Este artigo trata de um recorte de uma dissertação de mestrado, na qual se teve por objetivo principal procurar uma justificativa para a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas.

Em meio às buscas e pesquisas nos deparamos com algumas colocações, tais como Silvia e Arruda (2011, p. 23), ao citar Arrais (2006), expondo que "as expressões numéricas apresentam-se no sistema educacional desde a década de 30, no entanto esse conteúdo deixou de ser proposto e recomendado desde a reforma curricular de 1986".

De acordo com Silva e Arruda (2011, p. 23),

> os Parâmetros Curriculares Nacionais não abordam o ensino das expressões numéricas, embora estejam presentes no livro didático e os docentes continuam a ensiná-las, demonstrando-nos que, de certa forma, esse conteúdo está presente nas salas de aula e faz parte do sistema educacional.

Tais citações instigaram a nossa curiosidade e também nos leva a perceber a necessidade de averiguar a veracidade destas colocações. A dissertação tratava do conteúdo expressão numérica e se fez necessário, após algumas leituras, estudar com cuidado os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) a respeito deste assunto. Aproveitamos e estendemos nossas leituras para outro documento que se faz importante na Educação Básica, as Matrizes de Referência de Matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Como também foste mencionado que os livros didáticos abordam este assunto, nos detemos a confirmar esta informação.

Na sequência deste artigo traremos alguns entendimentos de expressão numérica para certos autores. Descreveremos como este conteúdo é tratado nos documentos oficias (Parâmetros Curriculares Nacionais e Matrizes de Referência de Matemática da Prova Brasil) e em alguns livros didáticos, com o propósito de verificar se há uma preocupação em justificar as regras que são ensinadas para a resolução de uma expressão numérica. Deste modo, procura-se verificar se documentos, livros e escola "andam juntos" em relação a este tópico em pesquisa: expressão numérica.

Entendemos as regras como sínteses, derivadas do movimento lógico-histórico de construção do movimento. Deste modo, ao invés de as apresentarmos prontas aos educandos, podemos construí-las juntos, assim apresentando ao aluno que a regra é um facilitador, mas isso depois de compreendida sua lógica. Portanto, consideramos de suma importância fazer breves relatos neste artigo da construção da Matemática, deste modo contribuindo para a compreensão do leitor. E por fim, apresentar uma breve proposta de justificativa para a hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas.

2 Sobre as expressões numéricas

As expressões numéricas podem ser vistas como a transposição da linguagem natural à linguagem matemática. Silva e Arruda (2011, p. 25), ao citar Ferreira (1999), expõem que "expressão é o ato ou efeito de se expressar e, em matemática é a representação do valor de uma quantidade sobre a forma algébrica com ou sem pontuação. Então, expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números".

Para melhor descrever o que foi dito no parágrafo anterior, apresentamos um exemplo:

> Uma escola comprou várias caixas de lápis de cor para serem distribuídas entre cinco classes. Cada classe recebeu 6 caixas com 6 lápis de cor, 8 caixas com 12 lápis de cor e 1 caixa com 24 lápis de cor.
>
> Para descobrir quantos lápis de cor cada classe recebeu, fazemos os seguintes cálculos:
>
> 6 caixas de 6 lápis ⟶ $6 \times 6 = 36$
>
> 8 caixas de 12 lápis ⟶ $8 \times 12 = 96$
>
> 1 caixa de lápis ⟶ 24
>
> Teremos então: $36 + 96 + 24 = 156$ (CASTRUCCI, GIOVANNI e GIOVANNI JUNIOR, 2012, p. 60)

Temos, então, um exemplo que se apresenta na linguagem natural e, após, foi estruturado na forma matemática para ser resolvido. Conforme o que foi colocado, temos o exemplo de uma expressão, pois há duas operações com números sendo realizada.

Para Silva e Arruda (2011, p. 26),

> expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações, com números e, a expressão numérica representa uma única ideia de quantidade, isto é, tem um único resultado que pode ser obtido da seguinte forma: primeiramente efetuando-se as multiplicações e divisões, obedecendo a ordem em que aparecem e, a seguir, efetuando-se adições e subtrações, também obedecendo à ordem que aparecem. Explica-nos esse autor que "[...] Quando aparecem nas expressões (parênteses), [colchetes] e {chaves}, efetua-se primeiro o que está dentro dos parênteses, depois o colchete e por último o que está na chave, na ordem que aparecem na expressão".

Os autores mencionam ainda ser “dessa forma que, geralmente, as expressões numéricas são ensinadas pelos professores, pois, é o mesmo modo que aparece nos livros didáticos, como um conjunto de regras a serem seguidas” (SILVA e ARRUDA, 2011, p. 26). Por outro lado, Arrais (2006) entende que as expressões numéricas são usadas no ambiente educacional como um caminho para introduzir a construção do pensamento algébrico e são empregadas como um modelo matemático capaz de representar uma situação-problema.

Assim, as expressões numéricas não devam ser utilizadas como uma arte de regras, técnicas e números dentro de um ensino algoritmo, mas ser entendidas

> como a representação do valor de uma quantidade obtida, como base nos cálculos com as quatro operações básicas (adição, subtração, divisão e multiplicação) e as propriedades operatórias (comutativa, associativa, distributiva da multiplicação em relação a adição e elemento neutro) determinadas pelo uso de parênteses, chaves e colchetes. (SILVA e ARRUDA, 2011, p. 26)

Pelo o que estamos habituados a presenciar em sala de aula, regras não é o melhor caminho. Há alunos criativos e questionadores; eles querem que a Matemática faça sentido, tenha um porquê para tudo, e ela tem. Porém, como professores, muitas vezes guardamos estes conhecimentos conosco. Defendemos que não podemos perder a oportunidade de encantá-los com a Matemática, de mostrar para eles que tudo foi construído, não simplesmente inventado e aceito.

3 Sobre os documentos PCN e as Matrizes de Referência da Prova Brasil

A partir dessas referências citadas, vimos a necessidade de buscar o que os documentos oficiais abordam a respeito dessas expressões. Não nos detivemos a pesquisar em sala de aula como o ensino deste conteúdo está sendo realizado, mas buscamos verificar se nos documentos constam orientações sobre o ensino de expressões e como está configurado. Verificamos também como é tratado este conteúdo em alguns livros didáticos.

Realizamos uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) que apresentam os objetivos para o Ensino Fundamental, uma breve análise sobre a trajetória das reformas curriculares, algumas considerações sobre o conhecimento matemático, ressaltando sobre a evolução do mesmo, da importância que se faz em âmbito cultural. Mas o que mais se fez importante para nossa pesquisa refere-se à seleção de conteúdos neste documento, pois assim verificaremos se expressões numéricas constam na listagem de conteúdos ou não.

Vejamos então partes que são apresentadas nos PCN sobre os números e as operações:

> Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos. (BRASIL,1998, p. 50).

Com relação às operações, nos PCN há orientações no sentido de que "o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos-exato e aproximado, mental e escrito" (BRASIL, 1998, p. 50).

Um item que chamou nossa atenção nesse documento é o que se refere a conceitos e procedimentos de números e operações. No 3º ciclo, tem-se como objetivo a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Com isso, salientamos o fato de que para resolver uma expressão algébrica o aluno precisa saber os métodos de resolução de uma expressão. Mas, em momento algum os PCN sugerem esse estudo, simplesmente não se encontra tal tópico. Porém, no documento em questão, nos parece ter falhas entre conteúdos que deveriam se encadear e complementar, mas com esta citação ele deixa livre para o professor fazer tais ajustes.

Isso vem ao encontro com o que o documento esclarece:

> O detalhamento de conteúdos por ciclos, que será feito na sequência deste documento, não implica sua imediata transposição para a prática da sala de aula. É fundamental ressaltar que, ao serem reinterpretados regionalmente (nos estados e municípios) e localmente (nas unidades escolares), os conteúdos, além de incorporar elementos específicos de cada realidade, serão organizados de forma articulada e integrada ao projeto educacional de cada escola. (BRASIL,1998, p. 54)

O documento expõe que de fato não é obrigatório seguir rigorosamente o que nele consta, que nas escolas os professores devem filtrar e adequar conteúdos conforme a necessidade.

Outro documento pesquisado são as Matrizes de Referência da Prova Brasil, no âmbito do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (BRASIL, 2011). O Sistema de Avaliação da Educação Básica abrange, além da Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Por se tratar de um documento que direciona o que deve ser ensinado e o que será avaliado nestas avaliações, entendemos ser importante verificar se o conteúdo expressão numérica está sendo abordado e proposto para o Ensino Fundamental.

Nessas Matrizes é mencionado que

> essas iniciativas têm como finalidade subsidiar os gestores educacionais e as comunidades escolares a refletirem sobre o cotidiano organizacional dos sistemas de ensino e das escolas e também orientar a tomada de decisões sobre políticas públicas que promovam a melhoria da qualidade da educação. (BRASIL, 2011, p. 2)

Ainda reforçam que a

> matriz de referência de avaliação não deve ser tratada como o único instrumento que pode orientar o professor em sala de aula e nem como uma lista de conteúdos para o desenvolvimento das ações pedagógicas. A função das matrizes de referência está, principalmente, na possibilidade de apoiar o professor no planejamento e desenvolvimento das atividades pedagógicas fortalecendo, assim, o trabalho docente". (BRASIL, 2011, p. 38)

Além do mais, nessas matrizes constam que

> as matrizes de referência de Matemática estão estruturadas em quatro temas, relacionados às habilidades desenvolvidas pelos estudantes. E, nesta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos temas:
>
> I. Espaço e forma;
>
> II. Grandezas e medidas;
>
> III. Números e operações / Álgebra e funções;
>
> IV. Tratamento da informação. (BRASIL, 2011, p. 39)

O tema de nosso interesse é Números e operações/Álgebra e funções, composto por vinte descritores, dos quais três dizem respeito às operações, conforme podemos observar:

> D18 – Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
>
> D19 – Resolver problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
>
> D20 – Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). (BRASIL, 2011, p. 46).

Percebemos que o conteúdo sobre expressão numérica não consta como um descritor. Porém, na escala de Matemática, que é feito após as avaliações, é citado que os alunos do 5º e do 9° anos calculam expressões numéricas (adição e subtração), envolvendo o uso de sinais associativos. Expõem que alunos do 9º ano calculam expressões numéricas com números inteiros e decimais positivos e negativos; calculam o resultado de expressões envolvendo, além das quatro operações, números decimais (positivos, negativos, potências e raízes exatas).

Portanto, trata-se de mais um documento que não orienta como trabalhar este tema, mas cobra em suas avaliações. Mais uma vez, entendemos que tal conteúdo é filtrado e, por ser importante, é selecionado nas escolas. Além do mais, pelo fato do SAEB cobrar esse conteúdo, mesmo que não os mencione como descritores, continua a dar "força" aos professores que os ensinem. Buscávamos analisar de que modo é apresentado o conteúdo, se há explicação para a ordem que devem ser realizadas as operações e se possuem justificativas para tais regras que sabemos ser ensinadas.

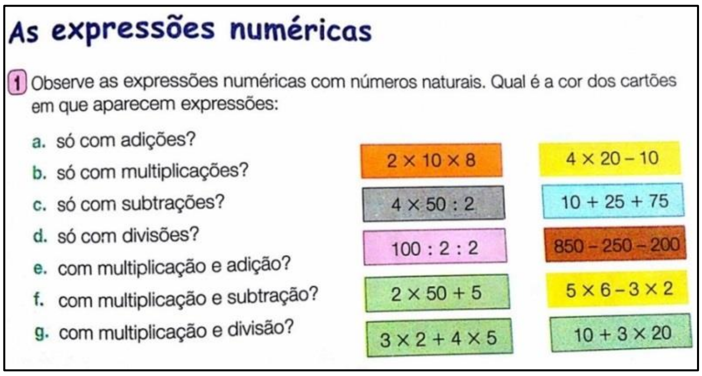
4 O que trazem alguns livros didáticos sobre expressões numéricas

Buscamos em alguns livros didáticos como este assunto é tratado. Como uma das autoras da pesquisa é professora da Educação Básica, buscamos fazer uma relação da teoria com a prática. Para isso, foram analisados os livros que são adotados nas escolas que essa autora atua.

Os livros analisados foram: *Porta Aberta Matemática* para o 5° ano (que tem como autores Marília Centurión, Júnia La Scala e Arnaldo Rodrigues, da editora FTD, ano de edição 2011); *A Conquista da Matemática* para o 6º ano (dos autores Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Júnior, da editora FTD, ano de edição 2012); e *Projeto Teláris* para o 6º ano (do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, ano de edição 2012).

O livro *Porta Aberta Matemática* é composto por dez unidades. A unidade quatro que tem como título "Operações: ideias, algoritmos e propriedades" é a de nosso interesse. Nesta unidade são abordados os seguintes temas: adição, propriedades da adição, subtração, multiplicação, padrões geométricos e multiplicações, propriedades da multiplicação, divisão e as expressões numéricas. Na Figura 1 apresentamos como esse livro inicia o conteúdo de expressão numérica.

Figura 1: As expressões numéricas no livro Porta Aberta


As expressões numéricas

1 Observe as expressões numéricas com números naturais. Qual é a cor dos cartões em que aparecem expressões:

a. só com adições?
b. só com multiplicações?
c. só com subtrações?
d. só com divisões?
e. com multiplicação e adição?
f. com multiplicação e subtração?
g. com multiplicação e divisão?

$2 \times 10 \times 8$	$4 \times 20 - 10$
$4 \times 50 : 2$	$10 + 25 + 75$
$100 : 2 : 2$	$850 - 250 - 200$
$2 \times 50 + 5$	$5 \times 6 - 3 \times 2$
$3 \times 2 + 4 \times 5$	$10 + 3 \times 20$

Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 97)

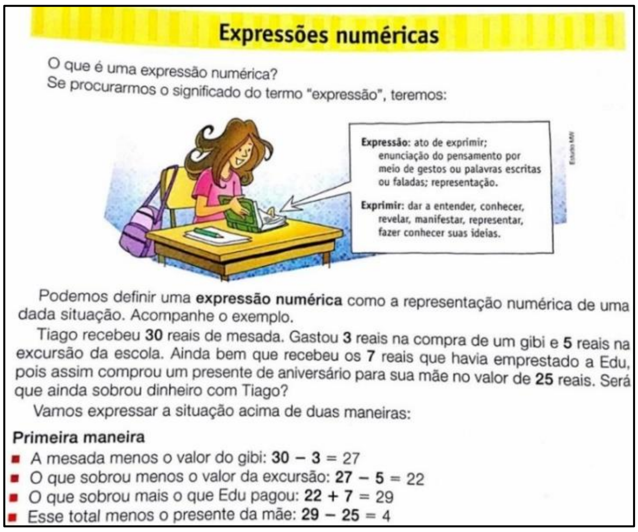
Por esta figura podemos perceber que os autores tomaram cuidado para introduzir este conteúdo, pois em primeiro momento apresentam atividades para que o aluno possa ir se familiarizando com a estrutura de expressões numéricas, uma atividade que muitas vezes acaba instigando a curiosidade pelo fato de parecer fácil. Deste modo, é possível ir aos poucos apresentando cada novo procedimento a ser tomado para resolver uma expressão numérica.

Nas páginas 98 e 99, são apresentadas atividades e explicações sobre o assunto, mas não justificam o porquê das prioridades entre as operações. Nessas páginas do livro, primeiro se trabalha com expressões que constam somente adição e depois somente multiplicação, usando a propriedade associativa, o que achamos de grande valia, pois muitas vezes as propriedades são ensinadas e nunca mais usadas em sala de aula. Em seguida, faz-se o uso dos parênteses e explicita-se que deve ser resolvido primeiro o que está entre parênteses, porém não há uma justificativa para este procedimento. Por fim, trabalha-se questões envolvendo valores monetários, questionando se resolvermos a adição e subtração antes da multiplicação é um procedimento correto. Percebe-se que os autores tomam o cuidado de apresentar o conteúdo sequenciado, não apresentando todas as regras de uma vez só, mas sem apresentar as justificativas.

Sobre expressões numéricas, são essas três páginas que constam no livro. Vimos que a hierarquia das operações é dada sem justificativas, simplesmente colocada como verdade.

O livro *A Conquista da Matemática* é composto por nove capítulos, sendo o capítulo 2 o de nosso interesse, denominado "calculando com números naturais". Neste capítulo, são apresentas as ideias associadas a adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de números naturais. Ao final da adição e subtração são trabalhadas as expressões numéricas com essas duas operações. A Figura 2 ilustra como o livro inicia o assunto.

Figura 2: Expressão numérica



Expressões numéricas

O que é uma expressão numérica?
Se procurarmos o significado do termo "expressão", teremos:

Expressão: ato de exprimir; enunciação do pensamento por meio de gestos ou palavras escritas ou faladas; representação.

Exprimir: dar a entender, conhecer, revelar, manifestar, representar, fazer conhecer suas ideias.

Podemos definir uma **expressão numérica** como a representação numérica de uma dada situação. Acompanhe o exemplo.

Tiago recebeu **30** reais de mesada. Gastou **3** reais na compra de um gibi e **5** reais na excursão da escola. Ainda bem que recebeu os **7** reais que havia emprestado a Edu, pois assim comprou um presente de aniversário para sua mãe no valor de **25** reais. Será que ainda sobrou dinheiro com Tiago?

Vamos expressar a situação acima de duas maneiras:

Primeira maneira

- A mesada menos o valor do gibi: **30 − 3** = 27
- O que sobrou menos o valor da excursão: **27 − 5** = 22
- O que sobrou mais o que Edu pagou: **22 + 7** = 29
- Esse total menos o presente da mãe: **29 − 25** = 4

Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 48)

A Figura 3 mostra uma segunda maneira de resolver este problema.

Figura 3: Segunda maneira de resolver o problema

Segunda maneira

mesada, excursão, presente da mãe, gibi, Edu

$30 - 3 - 5 + 7 - 25 = 27 - 5 + 7 - 25 = 22 + 7 - 25 = 29 - 25 = 4$

Assim, ainda sobraram 4 reais para Tiago.

Veja mais essas expressões numéricas:

- $30 + 12 - 25 - 7$

$$\underbrace{30 + 12} - 25 - 7 = \underbrace{42 - 25} - 7 = 17 - 7 = 10$$

- $20 - (6 + 4) - 7$

Nas expressões com parênteses, devemos inicialmente efetuar as operações dos parênteses.

$$20 - \underbrace{(6 + 4)} - 7 = \underbrace{20 - 10} - 7 = 10 - 7 = 3$$

USO EXCLUSIVO DO PROFESSOR
VENDA PROIBIDA

Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 49)

Depois que aborda a multiplicação, apresenta expressões numéricas com estas três operações. Após esta explicação são propostos exercícios do número 1 ao 8. Na sequência, é apresentado o conteúdo "Ideias associadas à multiplicação" e posteriormente surge o título "expressões numéricas", onde é realiza agora com adição, subtração e multiplicação, como é mostrado na Figura 4.

Figura 4: Expressão numérica com adição, subtração e multiplicação

Expressões numéricas

Uma escola comprou várias caixas de lápis de cor para serem distribuídas entre cinco classes. Cada classe recebeu 6 caixas com 6 lápis de cor, 8 caixas com 12 lápis de cor e 1 caixa com 24 lápis de cor.

Para descobrir quantos lápis de cor cada classe recebeu, fazemos os seguintes cálculos:

6 caixas de 6 lápis → $6 \times 6 = 36$
8 caixas de 12 lápis → $8 \times 12 = 96$
1 caixa de 24 lápis → 24
$36 + 96 + 24 = 156$

De uma forma mais simplificada, temos:

$$\underbrace{6 \times 6} + \underbrace{8 \times 12} + 24 = 36 + 96 + 24 = 156$$

Cada classe recebeu 156 lápis de cor.

Na expressão $6 \times 6 + 8 \times 12 + 24$ aparecem multiplicações e adições. Observe que, para calcular o resultado, efetuamos as multiplicações antes das adições.

Nas expressões em que aparecem as operações de multiplicação, de adição e de subtração, efetuamos as operações na seguinte ordem:

- Primeiro as multiplicações;
- Depois as adições e as subtrações, na ordem em que aparecerem, da esquerda para a direita.

Veja como calculamos o valor de algumas expressões numéricas:

1 Determinar o valor da expressão $7 + 9 \times 6$.

$$7 + \underbrace{9 \times 6} = 7 + 54 = 61$$

2 Dar o valor da expressão numérica $50 - 9 \times 4$.

$$50 - \underbrace{9 \times 4} = 50 - 36 = 14$$

3 Qual é o valor da expressão numérica $3 \times 7 + 9 - 4 \times 5$?

$$\underbrace{3 \times 7} + 9 - \underbrace{4 \times 5} = 21 + 9 - 20 = 30 - 20 = 10$$

USO EXCLUSIVO DO PROFESSOR
VENDA PROIBIDA

Fonte: Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 60)

A Figura 5 ilustra como é apresentada a importância dos sinais associativos (os parênteses).

Figura 5: Importância dos parênteses

A importância dos parênteses

Veja as expressões numéricas, todas "montadas" com os mesmos valores, mas algumas com parênteses colocados em lugares diferentes:

- $80 - 6 \times 7 + 5 =$
  $= 80 - 42 + 5 =$
  $= 38 + 5 = 43$
- $80 - (6 \times 7 + 5) =$
  $= 80 - (42 + 5) =$
  $= 80 - 47 = 33$
- $(80 - 6) \times (7 + 5) =$
  $= 74 \times 12 =$
  $= 888$

Observe como a colocação dos parênteses influiu no valor de cada um dos exemplos.

Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 60)

Logo após, há uma sequência de atividades do número 1 ao 12. Mais adiante é trabalhado "Ideias associadas à divisão" e, então, há o título "expressões numéricas com as quatro operações" conforme mostra a Figura 6.

Figura 6: Expressões numéricas com as quatro operações

Expressões numéricas com as quatro operações

Sabemos que, para calcular o **valor numérico de uma expressão**, devemos seguir u ordem em relação às operações que aparecem na expressão.

Para calcular o valor de uma expressão numérica em que há as quatro operações, ob decemos à ordem a seguir:

- Primeiro as divisões e as multiplicações, na ordem em que aparecerem, da esquerda pa a direita;
- Depois as adições e as subtrações, na ordem em que aparecerem, da esquerda pa a direita.

Observe:

1 Qual é o valor da expressão numérica 17 – 40 : 5?

$$17 - \underbrace{40 : 5}_{} \qquad \underbrace{17 - 8}_{9}$$

Efetuamos primeiro a divisão.
Em seguida, efetuamos a subtração.

2 Qual é o número que pode ser expresso por 8 × 9 : 6?

$$\underbrace{8 \times 9}_{72} : 6 \qquad \underbrace{72 : 6}_{12}$$

Neste caso, como temos uma multiplicação e uma divisão, efetuamos a que vem primeiro, que é a multiplicação.
Em seguida, efetuamos a divisão.

3 Determinar o valor da expressão numérica 21 : 3 + 3 × 4 – 8.

$$\underbrace{21 : 3}_{7} + \underbrace{3 \times 4}_{12} - 8 \qquad \underbrace{7 + 12}_{19} - 8 \qquad \underbrace{19 - 8}_{11}$$

Neste caso, em que aparecem as quatro operações, efetuamos primeiro as divisões e multiplicações, na ordem em que aparecem.
Depois, efetuamos as adições e subtrações, na ordem em que aparecem.

Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 71)

Na próxima figura, Figura 7, é ilustrado como o livro menciona a importância dos parênteses.

Figura 7: A importância dos parênteses

A importância dos parênteses

As operações no interior dos parênteses devem ser resolvidas sempre em primeiro lugar, obedecendo à ordem estabelecida anteriormente.

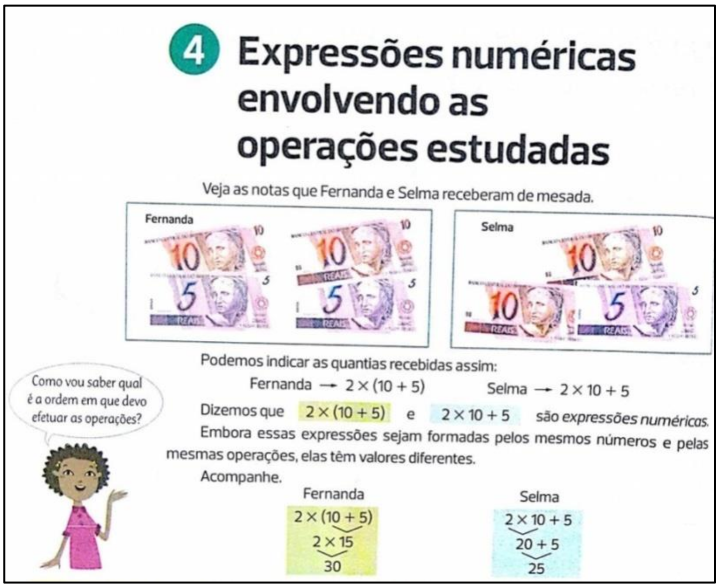
Acompanhe como a presença dos parênteses em uma mesma expressão influi em seu resultado.

- $120 : (4 + \underline{4 \times 5}) =$
  $= 120 : (\underline{4 + 20}) =$
  $= \underbrace{120 : 24}_{} = 5$
- $\underline{120 : 4} + \underline{4 \times 5} =$
  $= \underbrace{30 + 20}_{} = 50$
- $120 : (\underline{4 + 4}) \times 5 =$
  $= \underline{120 : 8} \times 5 =$
  $= \underbrace{15 \times 5}_{} = 75$

Fonte: Castrucci, Giovanni e Giovanni Júnior (2012, p. 71)

O último livro, *Projeto Teláris*, é dividido em 9 capítulos, e o assunto que estamos analisando encontra-se no quarto, intitulado "Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas". Para o assunto expressão numérica não foi necessária mais de uma página para explicar como se deve realizar os cálculos, como podemos observar nas Figuras 8 e 9 a seguir.

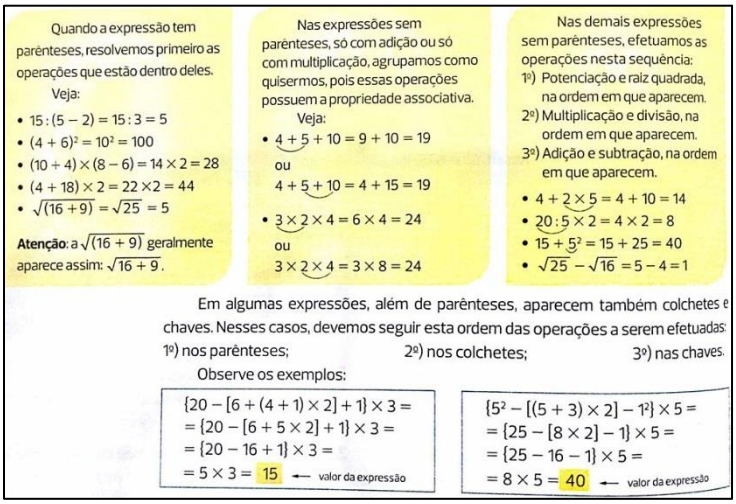
Figura 8: Expressões numéricas envolvendo as operações estudadas



Fonte: Dante (2012, p. 116)

A Figura 9 dá continuidade, agora explicando quais passos devemos tomar para resolver uma expressão numérica.

Figura 9: O uso dos símbolos de agregação



Quando a expressão tem parênteses, resolvemos primeiro as operações que estão dentro deles.

Veja:

- $15 : (5 - 2) = 15 : 3 = 5$
- $(4 + 6)^2 = 10^2 = 100$
- $(10 + 4) \times (8 - 6) = 14 \times 2 = 28$
- $(4 + 18) \times 2 = 22 \times 2 = 44$
- $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$

Atenção: a $\sqrt{(16 + 9)}$ geralmente aparece assim: $\sqrt{16 + 9}$.

Nas expressões sem parênteses, só com adição ou só com multiplicação, agrupamos como quisermos, pois essas operações possuem a propriedade associativa.

Veja:

- $4 + 5 + 10 = 9 + 10 = 19$

ou

$4 + 5 + 10 = 4 + 15 = 19$

- $3 \times 2 \times 4 = 6 \times 4 = 24$

ou

$3 \times 2 \times 4 = 3 \times 8 = 24$

Nas demais expressões sem parênteses, efetuamos as operações nesta sequência:

1º) Potenciação e raiz quadrada, na ordem em que aparecem.
2º) Multiplicação e divisão, na ordem em que aparecem.
3º) Adição e subtração, na ordem em que aparecem.

- $4 + 2 \times 5 = 4 + 10 = 14$
- $20 : 5 \times 2 = 4 \times 2 = 8$
- $15 + 5^2 = 15 + 25 = 40$
- $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

Em algumas expressões, além de parênteses, aparecem também colchetes e chaves. Nesses casos, devemos seguir esta ordem das operações a serem efetuadas:

1º) nos parênteses; 2º) nos colchetes; 3º) nas chaves.

Observe os exemplos:

$\{20 - [6 + (4 + 1) \times 2] + 1\} \times 3 =$
$= \{20 - [6 + 5 \times 2] + 1\} \times 3 =$
$= \{20 - 16 + 1\} \times 3 =$
$= 5 \times 3 = \boxed{15}$ ← valor da expressão

$\{5^2 - [(5 + 3) \times 2] - 1^2\} \times 5 =$
$= \{25 - [8 \times 2] - 1\} \times 5 =$
$= \{25 - 16 - 1\} \times 5 =$
$= 8 \times 5 = \boxed{40}$ ← valor da expressão

Fonte: Dante (2012, p. 116)

Após as explicações, há uma listagem que ocupa uma página com atividades chamadas de exercícios e problemas.

Como notamos, não são apresentadas justificativas para a ordem das quatro operações, e também explicações para o uso dos sinais de agregação. Nas obras analisadas, nos deparamos com listagens de regras sem nenhuma justificativa para tais.

Vemos, assim, que o assunto expressão numérica não é um tópico que nos documentos fique claro como deve ser realizado na Educação Básica. Porém, como professores de Matemática, sabemos que este conteúdo, a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, começa a fazer parte do dia a dia escolar, geralmente logo que se encerra o ensino das operações fundamentais, iniciando o conteúdo “expressão numérica”. Mais tarde, com radiciação e potenciação, ele é expandindo para outros conjuntos conforme os conteúdos estudados.

Percebemos, assim, que mesmo os PCN de Matemática não fazendo referência ao tema em questão como um conteúdo a ser ensinado, os professores continuam considerando o mesmo como importante e abordam nas aulas de Matemática desde cedo. Nos livros didáticos também sempre há espaço para o tema.

Isso está de acordo com o que Gregolin (2002, p. 6) afirma:

> O conhecimento escolar abrange conteúdos e procedimentos que estão postos – pela tradição, reformas, livros didáticos –, muitos deles não são questionados e se estabeleceram, também e principalmente, através da transposição didática, na perspectiva de “objetos de ensino”, *filtrados* por professores e políticas educacionais. Esses conteúdos e procedimentos podem ser investigados na perspectiva de “objetos a serem apreendidos”, *filtrados* pelo *olhar* de quem procura enxergar através do olhar do aluno.

Pelo que foi comentado, então poderíamos concluir que expressão numérica é um conteúdo que por tradição (e por se fazer importante na sala de aula) ainda é ensinado, devido ao olhar do professor que acredita ser um conteúdo pertinente, assim como também os livros didáticos o trazem como parte do conteúdo matemático.

5 Breve história da construção da Matemática

A Matemática, assim como outros saberes, faz parte da história e da cultura da humanidade, que também como outras áreas do conhecimento, houve evolução. Estes conhecimentos fazem parte da nossa cultura e todos tem o direito de aprender a respeito. A Matemática se constituiu conforme as necessidades do ser humano.

Ifrah (1995, p. 27) diz que “a história da contagem começou há muito tempo, só não se sabe o certo onde, o homem não sabia contar, no máximo identificava a unidade, o par e a multidão". A contagem é um exemplo que se desenvolveu devido à necessidade dos grupos. Com o desenvolver das relações sociais surgiam os métodos de contagem. Havia povos mais desenvolvidos que outros e isso se deu pelo fato de suas relações e necessidades serem maiores.

A história da Matemática mostra que esta ciência se desenvolveu por fatos encadeados uns aos outros, foi a necessidade e preocupações culturais, como contar os dias dos anos, concluir trocas e transações, enumerar também seus membros, esposas, mortos, filhos, bens, rebanhos, soldados, por vezes tentando datar a fundação de suas cidades, suas vitórias.

Segundo Ifrah (1995, p. 148), "a mais antiga forma para o símbolo do zero é um ponto", que de acordo com Buhler, era "usado comumente em inscrições e manuscritos para marcar um espaço vazio". Também relata que "acredita-se que os nove algarismos foram introduzidos bem cedo e que o princípio do valor posicional e o zero foi introduzido bem mais tarde" (IFRAH, 1995, p. 148). Conforme o desenvolvimento e as necessidades surgiam as operações que conhecemos hoje.

A adição é uma das mais simples operações e da qual todas as outras dependem. Cajori (1993) conta que quando surgiram as primeiras representações do sinal de mais e de menos, eles não significavam ainda a operação de adição e subtração ou números positivos ou negativos, mas sim excedentes e déficits em operações comerciais.

Esse autor cita que Burton afirma ter sido Vander Hoecke a primeira pessoa a usar os símbolos + e – para escrever expressões algébricas. Porém, afirma que Smith considera que ele tenha seguido Grammateus. Henricus Grammateus publicou uma Aritmética e Álgebra, intitulado *Ayn new Kunstlich Buech,* em 1518, no qual usou os símbolos + e – para um sentido técnico para adição e subtração.

As operações adição e subtração se faziam necessárias para saber trabalhar em alguns sistemas de numeração. Por exemplo, os Babilônios, Egípcios e Gregos faziam uso da operação de adição. No sistema de numeração romano, faz-se uso da operação subtração. Para Cajori (1993), acredita-se que este sistema tenha originado dos antigos etruscos, os quais, até onde vai o nosso conhecimento, habitaram a região entre Arno e Tiber.

Sobre isso, Cajori (1993, p. 103) tece o seguinte comentário:

> Livy nos diz que os etruscos tinham por hábito representar o número de anos passados, pregando um prego anualmente no santuário de Minerva, e que os romanos continuaram com esta prática. Um modo menos primitivo de designar os números, presumivelmente de origem etrusca, era a notação que se assemelha a presente

> "notação romana". Este sistema tem seu mérito no fato de que um princípio nele envolvido é raramente encontrado em outros, ou seja, o princípio da subtração.

Já para interpretar e utilizar o sistema de numeração maia era necessário a habilidade de multiplicar.

Vejamos alguns fatos sobre a simbologia da multiplicação. O símbolo x teria aparecido em 1618 em um apêndice anônimo endereçado a Edward Wright, tradução do livro *Descriptio* de John Napier. O ponto (**.**) foi definido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

> O ponto estava introduzido para símbolo da multiplicação por G. W. Leibniz. Em 29 de julho de 1698, ele escreveu em uma carta a John Bernoulli: "Eu não gosto de x como um símbolo para multiplicação, ele é facilmente confundido com o x; ... frequentemente relaciono duas quantidades por um ponto interposto e indicar a multiplicação por ZC . LM. Consequentemente, na designação relação eu não uso um ponto, mas dois pontos, o qual uso ao mesmo tempo para divisão". (CAJORI, 1993, p. 267).

Sabemos que os conhecimentos que temos hoje levaram anos, até mesmo séculos, para se constituírem. Estes processos de construção e evolução fazem parte da nossa cultura, professores e alunos têm o direito de aprender.

No entanto, Cajori (1993) afirma ser duvidoso que Harriott ou Gibson tenham dado significado a pontos de multiplicação. Eles são introduzidos sem qualquer explicação. Esse autor considera ainda que "é muito mais provável que estes pontos, que foram depois colocados coeficientes numéricos, são sobreviventes dos pontos habitualmente utilizados em manuscritos antigos em livros impressos para separar ou marcar números que aparecem no texto" (CAJORI, 1993, p. 268). Ele salienta que Scott escreveu que Harriot possuía o hábito de usar o ponto para denotar multiplicação.

Cajori (1993, p. 231) cita que "embora Harriot na ocasião usasse o ponto para multiplicação, este símbolo não foi proeminentemente usado até Leibniz adotar". Considera ainda que o asterisco (*) foi usado por Johann Rahn (1622-1676) em 1659 em *Teutsche Algebra*. Em um manuscrito encontrado enterrado próximo à aldeia de *Bakhshali*, Índia, a multiplicação é normalmente indicada colocando números lado a lado.

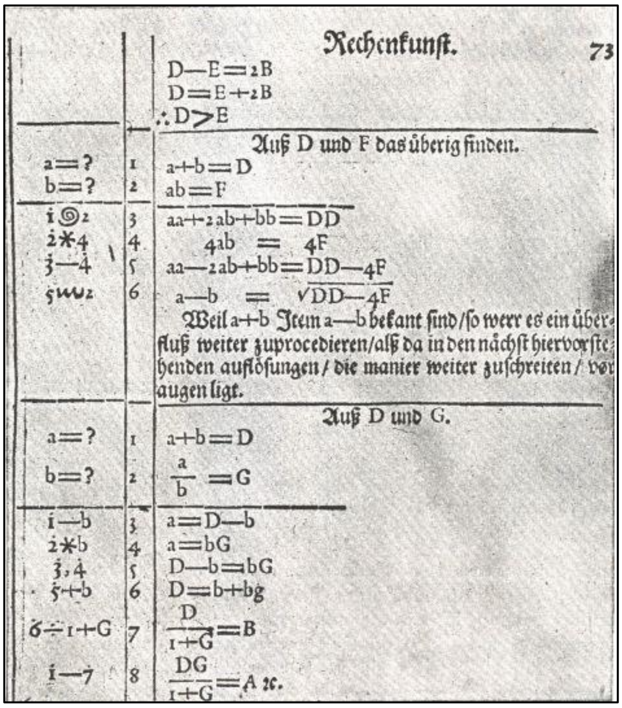
A respeito da simbologia da divisão, "em alguns países europeus '÷' significa menos". (BAUMGART, 1992, p. 3)

Ainda sobre a simbologia da divisão, Cajori (1993) relata que o fechar parênteses, o arranjo "8)24" (que significa 24/8 ou quantas vez 8 pode ser incluído em 24) foi usado por Michael

Stifel (1487-1567 ou 1486-1567) em *Arithmetica Integra,* que foi concluída em 1540 e publicado em 1544 em Nuernberg. Explicita, ainda, que os dois pontos (:) foram usados em 1633 em um texto intitulado *Johnson Arithmetik* (Londres,1633). No entanto, Johnson só usou o símbolo para indicar frações (por exemplo, três quartos eraescrito 3 : 4), ele não usou o símbolo de divisão dissociada da ideia de uma fração. Já Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou : tanto para a relação, quanto para a divisão em *Acta Eruditorum.*

A seguir, uma imagem em que o símbolo de divisão apareceu pela primeira vez na impressão, conforme reproduzido no Cajori (1993).

Figura 10: Símbolo da divisão.



Rechenkunst. 73

D—E=2B
D=E+2B
∴D>E

Auß D und F das übrig finden.

a=?	1	a+b=D
b=?	2	ab=F
1②2	3	aa+2ab+bb=DD
2*4	4	4ab = 4F
3—4	5	aa—2ab+bb=DD—4F
5ωω2	6	a—b = √DD—4F

Weil a+b Item a—b bekant sind/so werr es ein überfluß weiter zuprocedieren/alß da in den nächst hiervorstehenden auflösungen/die manier weiter zuschreiten/vor augen ligt.

Auß D und G.

a=?	1	a+b=D
b=?	2	$\frac{a}{b}$ =G
1—b	3	a=D—b
2*b	4	a=bG
3,4	5	D—b=bG
5+b	6	D=b+bg
6÷1+G	7	$\frac{D}{1+G}$=B
1—7	8	$\frac{DG}{1+G}$=A ꝛc.

Fonte: Cajori (1993, p. 213)

6 Sobre o uso dos parênteses

Slaught (1912) relata que, historicamente, os parênteses ( ) foram utilizados com o seu significado atual, primeiramente, por um inglês, A. Girard, no livro *Arithmetic* publicado no ano de 1629. O colchete e a chave têm origem posterior, como também o sinal = para simbolizar igualdade. Sobre esses símbolos, Bettinger e Englund (1963) expõem que

> Parênteses () e outros símbolos de agrupamento que têm a mesmo significado como parênteses, ou seja, colchetes [], chaves {}, e o vínculo ¯ , são usadas para associar dois ou mais termos que são para ser combinados para formar uma única quantidade. A palavra "parênteses” é frequentemente utilizada para indicar qualquer um ou todos

> esses símbolos de agrupamento. A remoção dos símbolos de agrupamento é realizada através da aplicação das leis da álgebra, tais como as leis de sinais e da distribuição. (BETTINGER e ENGLUND, 1963, p. 18)

Este texto relata também que parênteses, e outros símbolos de agrupamento, são úteis na indicação da operação e devem ser realizados pela primeira vez. Temos utilizado desta forma desde o início. A fim de evitar usá-los desnecessariamente, como já foi salientado, a convenção é adotada para executar todas as multiplicações primeiro e, em seguida, as adições. Se dois ou mais desses símbolos de agrupamento são utilizados na mesma expressão, geralmente remove-se o par mais interno dos símbolos em primeiro lugar.

7 Breve justificativa das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas

Apresentaremos de forma sucinta a proposta para justificar a hierarquia das quatro operações nas expressões numéricas, porém no trabalho de dissertação (OTTES, 2016) encontra-se completa.

Para o desenvolvimento desta proposta, iniciamos o trabalho no conjunto dos números naturais e apresentamos os axiomas referentes aos números naturais. Historicamente, o conjunto dos números naturais teve início com o número 1 e para o desenvolvimento deste trabalho também consideraremos o conjunto dos números naturais iniciando em 1. Assim, começamos abordando as propriedades primitivas da igualdade, bem como os axiomas básicos das operações de adição e multiplicação.

Na construção que segue, utilizamos a ideia de abordagem de Peano (1889), juntamente com axiomas. Peano (1889, p. 1) inicia com o axioma que $1 \in \mathbb{N}$. Após, define o número dois a partir do número 1, o número três a partir dos números anteriores e assim sucessivamente; ou seja, o próximo número é o anterior adicionando a unidade (que é um número natural); $1 \in \mathbb{N}$, 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1, ... Este fato encontra-se apresentado na Figura 11.

Figura 11: Definição dos números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

PEANO, *Arithmetices principia.*

Fonte: Peano (1889, p. 1)

Com base nestas definições e axiomas, apresentamos algumas demonstrações com o intuito de justificar a proposta de hierarquia das operações. Demonstrações tais como que o número 2 é um número natural a partir do número 1; que o número 3 é natural usando a ideia de que 1 e 2 são naturais, e assim sucessivamente.

A seguir apresentaremos duas demonstrações que compõem o texto da proposta de justificativa e que facilitaram a compreensão do leitor.

Figura 12: Demonstração de que 3 + 3 = 6

Afirmação	Justificativa
1) $3=2+1$	Definição do número 3;
2) $3+3=3+(2+1)$	Propriedade substitutiva da igualdade no segundo número 3;
3) $3+(2+1)=3+(1+2)$	Propriedade comutativa da adição;
4) $3+(1+2)=(3+1)+2$	Propriedade associativa da adição;
5) $3+1=4$	Definição do número 4;
6) $(3+1)+2=4+2$	Propriedade substitutiva da igualdade;
7) $4+2=4+(1+1)$	Propriedade substitutiva da igualdade;
8) $4+(1+1)=(4+1)+1$	Propriedade associativa da adição;
9) $(4+1)+1=5+1$	Definição do número 5;
10) $5+1=6$	Definição do número 6;
11) $3+3=6$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 2 a 10.

Fonte: Ottes (2016, p. 65)

Na Matemática são muitas as definições e regras que nos são apresentadas e aceitas como verdades, que com o tempo tomaram seu lugar e não nos questionamos o porquê. Contudo, levando em conta o modo como Peano (1889) define os números naturais, sendo sempre adicionado 1, refletindo e observando em uma sala de aula, percebemos que é deste modo que os alunos se apropriam dos números e os descobrem. Não são poucas as vezes que nos deparamos com as contagens nos dedos, ou com algum outro material que os alunos, ou pessoas que não estão mais na escola, veem a possibilidade de contar, de adicionar, e estas contagens são feitas intuitivamente de um a um.

Também iremos precisar da demonstração de 3 × 2 = 6, como pode ser observada na Figura 13.

Como podemos perceber na demonstração, a multiplicação dos números naturais é obtida por meio da adição de várias parcelas iguais. Os livros didáticos apresentam 3 × 2 = 2 + 2 + 2. Vemos que não há contradição, visto que a propriedade comutativa da multiplicação garante que

3 × 2 = 2 × 3.

Figura 13: Demonstração de que 3 × 2 = 6

1) $3\times2=3\times(1+1)$	Definição do número 2 e propriedade substitutiva da igualdade;
2) $3\times(1+1)=3\times1+3\times1$	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
3) $3\times1+3\times1=3+3$	Propriedade da identidade;
4) $3+3=6$	Provado no quadro 9;
5) $3\times2=6$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas de 1 a 4.

Fonte: Ottes (2016, p. 66)

Vejamos como proceder para efetuar o cálculo da expressão numérica: 1 + 3 × 2. Pela Figura 13, linhas 1, 2 e 3 juntamente com a transitividade da igualdade, temos que 3 × 2 = 3 + 3. Como a expressão 3 + 3 representa o valor de 3 × 2, para que isso fique claro na expressão fazemos uso dos parênteses, símbolo o qual representa uma única coisa, pois a expressão 3 × 2 foi substituída por 3 + 3. Se não tivéssemos inserido os parênteses, poderíamos pensar em efetuar primeiro a operação 1 + 3 em 1 + (3 + 3). Portanto, a necessidade em se resolver primeiro a multiplicação e, consequentemente, a multiplicação tem prioridade com relação à adição. Como escrevemos da esquerda para a direita e de cima para baixo, temos que, para a resolução de uma expressão numérica começarmos da esquerda para a direita, respeitando suas prioridades, ou seja, primeiro a multiplicação e, após, a adição.

Ao estendermos o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros, surge a necessidade de determinar a prioridade da subtração, ou seja, há algum cuidado a ser tomado além de começar da esquerda para a direita. Assim, como resolveríamos uma expressão numérica do tipo 1 + 3 × 2 - 5?

Para isso, devemos ainda incluir os axiomas do elemento neutro e oposto para números inteiros. Vejamos o axioma do elemento neutro da adição: para $l \in \mathbb{Z}$ temos que $l+0=0+l=l$. Para o axioma do elemento oposto da adição, temos o seguinte: $-l \in \mathbb{Z}$, temos que $l+(-l)=(-l)+l=0$, é denominado elemento oposto.

A operação subtração, na verdade, é a adição de números negativos, é a adição de um número ao elemento oposto de outro número. Para $l, m, n \in \mathbb{Z}$ temos por definição que $l-m=n \Leftrightarrow l=m+n$ e, por meio desta definição, podemos mostrar que $l-m=l+(-m)$. Vejamos essa demonstração ilustrada na Figura 14 seguinte.

Figura 14: Demonstração que $l - m = l + (-m)$

Afirmação	Justificativa
1) $l-m=n$	Notação. Chama-se de n a diferença;
2) $l=m+n$	Definição;
3) $l+(-m)=m+n+(-m)$	Propriedade aditiva da igualdade;
4) $m+n+(-m)=m+[n+(-m)]$	Propriedade associativa da adição;
5) $m+[n+(-m)]=m+[(-m)+n]$	Propriedade comutativa da adição;
6) $m+[(-m)+n]=[m+(-m)]+n$	Propriedade associativa da adição;
7) $[m+(-m)]+n=0+n$	Propriedade do elemento oposto da adição;
8) $0+n=n$	Propriedade do elemento neutro da adição;
9) $l+(-m)=n$	Propriedade simétrica da igualdade;
10) $n=l+(-m)$	Propriedade simétrica da igualdade;
11) $l-m=l+(-m)$	Propriedade transitiva da igualdade de 1 a 10.

Fonte: Ottes (2016, p. 67)

Assim, podemos concluir que a subtração é a adição de um número oposto. Deste modo, podemos justificar que a adição e a subtração possuem o mesmo grau de prioridade (hierarquia) na resolução de uma expressão numérica. Portanto, efetuamos os cálculos da esquerda para a direita de acordo com a ocorrência da adição e da subtração.

Vejamos um exemplo com as operações adição e subtração em uma expressão numérica. No caso de 7 – 2 + 5, podemos reescrever a mesma expressão de maneira diferente: 7 + (- 2) + 5. Neste caso, estamos trabalhando somente com a adição. Por outro lado, não precisamos reescrever a expressão, pois já justificamos que possuem o mesmo grau de prioridade, somente devendo respeitar a ordem da esquerda para a direita. Vejamos agora como calcular o exemplo citado anteriormente 1 + 3 × 2 – 5.

Neste exemplo temos as operações adição, multiplicação e subtração. Como vimos anteriormente, a multiplicação tem prioridade. Assim, obtemos 1 + (2 + 2 + 2) - 5 = 1 + 6 - 5. Agora temos as operações adição e subtração, e ambas possuem o mesmo grau de prioridade. Portanto, seguimos a ordem em que aparecem respectivamente da esquerda à direita:

1 + 6 + (-5) = 1 + 6 - 5 = (1 + 6) - 5 = 7 - 5 = (2 + 5) - 5 = 2 + (5 - 5) = 2 + 0 = 2.

Vejamos como podemos proceder na resolução de uma expressão numérica com as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Qual delas iremos resolver primeiro?

No conjunto dos números racionais faz sentido trabalhar com a divisão em geral. Para

$p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$, temos a seguinte definição: $\frac{p}{q} = r \Leftrightarrow p = r \times q$. Iremos realizar a seguinte demonstração $p \neq 0,\ \frac{p}{q} = p \times \frac{1}{q}$ para dar continuidade as justificativas desta proposta.

Figura 15: Demonstração que $\frac{p}{q} = p \times \frac{1}{q}$

Afirmação	Justificativa
1) $\frac{p}{q} = c$	Dado;
2) $p = c.q$	Definição;
3) $p \cdot \frac{1}{q} = c \cdot q \cdot \frac{1}{q}$	Propriedade multiplicativa da igualdade;
4) $p \cdot \frac{1}{q} = c \cdot \left(q \cdot \frac{1}{q}\right)$	Propriedade associativa da multiplicação;
5) $p \cdot \frac{1}{q} = c \cdot 1$	Propriedade do elemento neutro da multiplicação;
6) $p \cdot \frac{1}{q} = c$	Propriedade do elemento neutro da multiplicação;
7) $c = p \cdot \frac{1}{q}$	Propriedade simétrica da igualdade;
8) $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$	Propriedade transitiva da igualdade nas linhas 1 e 7.

Fonte: Ottes (2016, p. 68)

Deste modo, podemos justificar que a divisão possui o mesmo grau de prioridade (hierarquia) que a multiplicação, pois ambas tratam de operações inversas. Assim, quando nos deparamos com estas duas operações em uma expressão numérica, não necessitamos tomar o cuidado de resolver a multiplicação ou a divisão primeiramente, basta resolvermos da esquerda para a direita, na ordem em que ocorrem.

Vejamos como resolver a expressão $1 + 3 \times 7 - 8 \div 4$ a qual apresenta as quatro operações em uma única expressão. Podemos reescrever $1 + 3 \times 7 - 8 \div 4$ como $1 + 3 \times 7 - 8 \times \frac{1}{4}$, onde a divisão passa ser escrita como uma multiplicação. Desta maneira, podendo tratar a divisão como uma multiplicação e vice-versa. Assim, podemos justificar que a multiplicação e a divisão possuem o mesmo grau de prioridade (hierarquia) na resolução de uma expressão numérica. Mas continuando o desenvolvimento da expressão, teremos que $1 + 3 \times 7 - 8 \times \frac{1}{4} = 1 + 21 - \frac{8}{4}$. Como agora nos restou uma adição e uma subtração, já sabemos como proceder, portanto, temos: $1 + 21 - \frac{8}{4} = 1 + 21 - 2 = 22 - 2 = 20$.

Ao decorrer da proposta justificamos o porquê da adição e subtração ter o mesmo grau de prioridade na resolução da expressão numérica, usando a ideia da subtração ser a adição do elemento oposto. Para a multiplicação, inicia-se mostrando que é uma adição interada dentro do conjunto dos números naturais, sendo fundamental a noção de parênteses e seu uso. Para os números racionais, foi apresentada a noção de que é o inverso da multiplicação é a divisão. Deste modo, a multiplicação e a divisão possuem o mesmo grau de prioridade entre elas, respeitando a ordem em que ocorrem na expressão.

Para concluir a proposta, temos que incluir o conjunto dos números irracionais. Assim, teremos uma explicação que embarca o conjunto dos números reais. Para tanto, usamos o Princípio de Hankel, descrito por Waismann (2003):

> [...] Hankel denomina o princípio de permanência das regras de calcular e que podemos formular como segue: se desejamos estender um conceito em matemática além da sua definição original, então dentre todas as possibilidades de extensão, devemos escolher aquela que mantém intacta, dentro do possível, as regras de cálculo original. Este princípio de permanência não é para questionar a sua validade, mas sim considerá-lo como um princípio que guie no processo de formação de conceitos. (WAISMANN, 2003, p. 27).

Uma vez que os números irracionais não apresentam uma característica padronizada, como ocorre com os números racionais, torna-se necessário usar um processo limite para os números irracionais. Esse processo limite usa sequências de números racionais para aproximar os números irracionais. Portanto, o Princípio de Hankel é bem plausível.

8 Fendas conclusivas

O objetivo principal da pesquisa realizada durante o mestrado foi o de identificar uma justificativa para a hierarquia das quatro operações matemáticas nas expressões numéricas, porém não foste encontrado. Nos deparamos com colocações sobre expressões numéricas que não tínhamos conhecimento. O fato deste conteúdo não fazer parte dos PCN de Matemática nos causou surpresa, assim sentimos a necessidade de investigá-lo, até pelo fato de termos o conhecimento dele fazer parte do dia-a-dia escolar e dos livros didáticos.

Percebemos então que os PCN ditam os conteúdos e a sequência que devem ser trabalhados, porém com a ausência para as expressões numéricas. O documento, no entanto, nos contempla com um texto que apoia o professor a trabalhar os conteúdos do modo que pensa ser mais pertinente. Deste modo, entendemos que mesmo que o conteúdo de expressão numérica não faça parte deste documento, os professores veem a necessidade e importância dele para a aprendizagem dos alunos, até mais para o entendimento de conteúdos seguintes.

Sentimos a necessidade de verificar se nas Matrizes de Referência da Prova Brasil também acontecia o mesmo e de fato o conteúdo expressão numérica também não consta neste documento. Entendemos que o ensino deste assunto fica implícito no documento, pois ao final do 5º e 9º anos o aluno é avaliado, e um dos tópicos de avaliação é se é capaz de resolvê-las. Sendo assim, esse conteúdo não está claramente sendo ditado no documento, mas é cobrado do aluno na avaliação.

Vimos também que mesmo não sendo listadas nos documentos oficiais, as expressões numéricas permanecem nos livros didáticos e assim reforçam que são vistas nas aulas de Matemática. Entendemos assim que o conteúdo é visto como importante pelos professores, mas que de fato este conteúdo é geralmente ensinado via de regras, sem justificativas para a hierarquia que há entre as operações para a resolução de uma expressão numérica, tornando-se assim um conteúdo maçante e dificultoso para a maioria dos estudantes, que não compreendem a hierarquia, mas necessitam decorá-la para chegar ao resultado correto no final da expressão. Deste modo, sentimos a necessidade de realizar uma proposta para justificar tal hierarquia.

Para melhor embasar e justificar tal texto, foste realizado um resgate histórico sobre a construção de alguns conhecimentos matemáticos, em que os fatos encontrados e justificados nos auxiliam a entender que a Matemática é uma ciência construída com cuidado e detalhes e que estes fatos encadeados é que dão o sentido aos conhecimentos que temos hoje.

Expressão numérica é o assunto central deste trabalho, mas há muitos conteúdos que são ensinados por meio de regras, e que na maioria das vezes não são investigados e ensinados a nossos alunos. Pensamos, assim, que muitos dos estudantes estão perdendo o lado “encantador” da Matemática.

Referências

ARRAIS, Ubiratan Barros. *Expressões aritméticas*: crenças, concepções e competências no entendimento do professor polivalente. 2006. 178f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006.

BAUMGART, John K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:* Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

BETTINGER, Alvin K.; ENGLUND, John A. *Algebra and Trigonometry.* Scranton: International Textbook Company, 1963.

BRASIL. Ministério da Educação. *Plano de Desenvolvimento da Educação*: Prova Brasil, Ensino Fundamental, matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SEB/INEP, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

CAJORI, Florian. *A History of matemathical notations.* New York: Dover Publications, Inc., 1993.

CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. *A conquista da Matemática*, 6º ano. São Paulo: FTD, 2012.

CENTURIÓN, Marilia; SCALA, Júnia La; RODRIGUES, Arnaldo. *Porta Aberta:* Matemática, 5º ano. São Paulo: FTD, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris:* Matemática, 6º ano. São Paulo: Ática, 2012.

GREGOLIN, Vanderlei Rodrigues. *O conhecimento matemático escolar*: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental. 2002. 177f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. v. 2, 4. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

OTTES, Aline Brum. *Expressões numéricas*: a hierarquia das quatro operações matemáticas. 2016. 76f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria.

PEANO, Giuseppe. *Arithmetices principia*: nova methodo. Roma/Florença: Fratres Bocca, 1989.

SILVA, Graziele Cristine Moraes da; ARRUDA, Márcia Rita Mesquita Ferraz de. As expressões numéricas, o Contig 60 e a formação de professores do ensino fundamental I. In: MONTEIRO, Sueli Aparecida Itman; RIBEIRO, Ricardo; LEMES, Sebastião de Souza; MUZZETI, Luci Regina. (Org.). *Educação na contemporaneidade*: reflexões e pesquisa. Pedro e João, 2011, p. 23-42.

SLAUGHT, Herbert Ellsworth; LENNES, Nels Johann. *First principles of Algebra:* complete course. Boston: Allyn and Bacon, 1912.

WAISMANN, Friedrich. *Introduction to Mathematical Thinking:* the formation of concepts in modern mathematics. New York: Dover Publication, 2003.