Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017
eISSN 2526-6136 http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v1n22017a01

licenciada sob *Creative Commons*
BY NC ND

Como diferentes grupos resolvem problemas combinatórios condicionais e não-condicionais?

How different groups solve conditional and non-conditional combinatorial problems?

Ewellen Tenório de Lima
Dacymere da Silva Gadelha
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Resumo:
O presente estudo foi desenvolvido coletivamente junto a estudantes de Pedagogia e buscou investigar o desempenho, apresentado por oito grupos distintos, no que diz respeito à resolução de problemas combinatórios condicionais e não-condicionais. O instrumento de coleta utilizado foi composto por oito situações-problema, sendo duas de cada tipo de problema combinatório – *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação* – uma condicional e outra não. A existência das condições foi percebida e levada em consideração pela maioria dos participantes. Os problemas de *produto cartesiano* apresentaram maior número de acertos nos diferentes grupos pesquisados, enquanto nos de *combinação* foram obtidos os menores percentuais de acertos. Além disso, o desempenho foi superior nos problemas condicionais em todos os grupos. Atribui-se esse resultado à existência de maior número de possibilidades nos problemas não-condicionais e ao amplo uso de estratégias informais, como a listagem, que dificultou o esgotamento das possibilidades.

Palavras-chave: Educação Matemática. Combinatória. Problemas Condicionais. Problemas Não-condicionais.

Abstract:
This study was developed collectively with elementary pre-service teachers and sought to investigate the performance presented by eight distinct groups with regard to resolution of conditional and non-conditional combinatorial problems. The test used is composed of eight problems, two of each type of combinatorial problems – *cartesian product, arrangement, permutation* and *combination* – one conditional and one non-conditional problem. The existence of the conditions was perceived and taken into account by the majority of participants. The *Cartesian product* problems presented larger number of correct answers in the different groups investigated, while in the *combination* ones were obtained the lowest percentage of correct answers. Within all the groups performance was better in the conditional problems. This result is attributed to the existence of a greater number of possibilities in non-conditional problems and the extensive use of informal strategies, such as listings, which hindered the exhaustion of possibilities.

Keywords: Mathematics Education. Combinatorics. Conditional Problems. Non-conditional Problems.

Ewellen Tenório de Lima
Mestranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Brasil. E-mail: ewellentlima@gmail.com

Dacymere da Silva Gadelha
Aluna da Licenciatura em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Brasil. E-mail: dacymere@gmail.com.

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Doutora em Psicologia Cognitiva pela Oxford Brookes University. Professora da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Brasil. E-mail: resrborba@gmail.com.

Recebido em 29/04/2017
Aceito em 01/07/2017

1 Introdução

Na literatura tem sido amplamente enfatizada a necessidade de se formar professores pesquisadores, por meio do estímulo, durante sua formação acadêmica (inicial e continuada), do desenvolvimento de autonomia em investigações, por parte de professores de todos os níveis de ensino, a partir dos seus objetivos próprios e por intermédio de análises coerentes e relevantes. Defende-se que desenvolver atividades de pesquisa na formação inicial de professores pode auxiliar o estudante de graduação a perceber a importância da contribuição teórica e de investigações práticas para a sua compreensão da realidade cotidiana de ensino, como reforça Bélair (2001).

Alguns autores caracterizam o professor reflexivo como aquele que reflete antes, durante e depois de suas ações, considerando, para tal, a necessidade de atividades práticas ao invés de puramente técnicas. Essas características são também atribuídas a um professor pesquisador, como corrobora Nóvoa (2001, s.p.):

> O professor pesquisador e o professor reflexivo, no fundo, correspondem a correntes (conceitos) diferentes para dizer a mesma coisa. São nomes distintos, maneiras diferentes dos teóricos da literatura pedagógica abordarem uma mesma realidade. A realidade é que o professor pesquisador é aquele que pesquisa ou que reflete sobre a sua prática. Portanto, aqui estamos dentro do paradigma do professor reflexivo. É evidente que podemos encontrar dezenas de textos para explicar a diferença entre esses conceitos, mas creio que, no fundo, no fundo, eles fazem parte de um mesmo movimento de preocupação com um professor que é um professor indagador, que é um professor que assume a sua própria realidade escolar como um objeto de pesquisa, como objeto de reflexão, como objeto de análise.

Esses argumentos também vêm ao encontro das palavras de Freire (1996) ao enfatizar que “a prática docente crítica, implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer... É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática” (p. 43). Sendo assim, é desejável que o fazer pedagógico do professor esteja pautado em ser um sujeito reflexivo. Para que isso faça parte de suas vivências se faz necessário e importante que haja estímulo para o mesmo desde sua formação inicial.

Guimarães e Borba (2007) destacam que “a desvinculação teoria-prática tem sido vista como um dos maiores problemas existentes em cursos de formação de professores, em particular nos cursos de Pedagogia” (p. 2). Torna-se interessante, portanto, que ao longo do curso sejam propiciadas atividades que estabeleçam relação entre esses dois focos, visando uma formação mais ampla desses profissionais.

Dado que apenas uma pequena parte dos graduandos de uma turma tem a oportunidade de fazer parte de programas de iniciação à docência, iniciação científica, extensão ou de monitoria, é necessário que se busque proporcionar outras oportunidades de envolver todos os estudantes em atividades que articulem a teoria e a prática. Uma alternativa promissora é permitir “nas diversas disciplinas de cursos de formação de professores, os graduandos se envolverem em processos de pesquisa, articulando teorias de disciplinas específicas com suas respectivas práticas” (GUIMARÃES e BORBA, 2007. p. 2).

Sob essa perspectiva, foi idealizada e desenvolvida, junto aos estudantes do curso de Pedagogia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), que cursaram a disciplina eletiva *Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório* no segundo semestre de 2016, uma pesquisa que teve por público alvo oito grupos distintos: Estudantes dos Anos Iniciais, Estudantes dos Anos Finais, Estudantes da Educação de Jovens e Adultos, Estudantes do Ensino Médio, Donas de Casa com Ensino Médio completo, Estudantes do 1º Período de Pedagogia, Estudantes do 6º e 10º períodos de Pedagogia e Professores da Educação Infantil. A pesquisa teve por objetivo investigar o desempenho apresentado pelos oito grupos quanto à resolução de problemas combinatórios condicionais e não-condicionais.

O instrumento de coleta utilizado foi elaborado coletivamente – pela docente da disciplina eletiva, mestranda em estágio docência e estudantes da disciplina – em sala de aula e consistiu na proposta de resolução de um teste composto por oito situações-problema combinatórias, sendo duas de cada tipo de situação combinatória conforme indicam Pessoa e Borba (2009): *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação.* Das duas questões de cada tipo, uma apresentava condição em seu enunciado e outra não. Os problemas condicionais propostos foram, conforme Borba e Braz (2012), problemas nos quais *um elemento explicitado é fixo* (*produto cartesiano* e *combinação*) ou problemas nos quais há *um elemento fixo explicitado em determinada posição* (*arranjo* e *permutação),* sendo necessário considerar tais relações para a obtenção de sucesso na resolução desses problemas.

Foram coletados, pelos graduandos, dados junto aos oito grupos anteriormente discriminados. Duplas e trios de estudantes realizaram análises quanti e qualitativas dos dados por grupo coletado e apresentaram relatórios das pesquisas realizadas. As autoras desse artigo realizaram análises quantitativas, do conjunto de dados, por meio do *software Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), bem como efetuaram análises qualitativas. Na seção que segue são apresentados os aportes teóricos adotados na análise de dados do presente estudo.

2 Referencial teórico

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) foi adotada como referencial teórico base da presente pesquisa. Nessa teoria, um conceito pode ser definido como um tripé de três conjuntos, sendo estes o conjunto das *situações* que atribuem sentido ao conceito (S), o das propriedades e relações constantes em dadas situações, ou seja, seus *invariantes* (I) e o conjunto das *representações simbólicas* utilizadas para representar o conceito (R). O autor da teoria define, ainda, um campo conceitual como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p. 10). Para Vergnaud (1996, p. 156), "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido". Assim, para que uma ampla compreensão de dado conceito seja alcançada, é necessário que haja contato com problemas que explorem diferentes *situações*, de modo a buscar identificar e compreender os seus *invariantes* e que se faça uso de diferentes *representações simbólicas* que viabilizem a resolução de problemas que envolvam o conceito em questão.

O tema da presente pesquisa está inserido no campo conceitual das *estruturas multiplicativas*, constituído pelo "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996. p. 167). Volta-se o olhar, especialmente, para os conceitos relacionados à Combinatória, "parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (MORGADO *et al.,* 1991. p. 1).

Morgado *et al*. (1991) destacam dois tipos de problema mais frequentes no estudo da Combinatória, sendo estes: "1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e *que satisfazem certas condições dadas*" (p. 2, grifos nossos). Esses autores destacam, ainda, que "a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (MORGADO *et al.,* 1991. p. 2). Dessa maneira, é essencial que estudantes tenham experiência com situações combinatórias variadas para que sejam capazes de resolver problemas de diferentes naturezas.

Pessoa e Borba (2009) propõem uma integração de classificações anteriores, categorizando as situações combinatórias em função dos seus invariantes de *ordem* e de *escolha* em quatro tipos de problemas: *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação.* Nos problemas denominados *produto cartesiano*, há mais de um conjunto entre os quais se estabelecem relações *um-para-muitos* entre seus elementos. Nesse tipo de problema a mudança de posição dos elementos não constitui novas possibilidades. Já os problemas que exploram situações de a*rranjo*, de *permutação* ou de *combinação* tratam de escolhas que acontecem dentro de um mesmo conjunto, podendo ser utilizados todos ou alguns de seus elementos. Nos problemas de *arranjo* e de *combinação*, a escolha consiste em alguns elementos do conjunto, sendo que nas situações de *arranjo* a ordem dos elementos é determinante de possibilidades distintas e nas de *combinação* a mudança de posição de elementos não forma novas possibilidades. No caso dos problemas de *permutação*, todos os elementos do conjunto são utilizados e as diferentes possibilidades relacionadas ao problema são determinadas a partir da modificação das posições dos elementos em questão, ou seja, a ordem é determinante de novas possibilidades.

Ao se tratar de problemas combinatórios condicionais, foco do presente estudo, surgem, ainda, outras relações/invariantes, além das de *ordem* e *escolha*, a serem consideradas. Borba, Araújo e Braz (2013), afirmam que nesse tipo de problema combinatório "estão envolvidas relações referentes à explicitação (ou não) de determinados elementos que devem fazer parte das possibilidades válidas para a dada situação, posicionamentos, proximidades e/ou ordenações específicas que certos elementos devem apresentar" (p. 3). Borba e Braz (2012) classificam os problemas condicionais de *arranjo* em função de aspectos cognitivos, levando em conta as relações combinatórias que precisam ser percebidas para a resolução desses problemas, em 21 categorias. Borba, Araújo e Braz (2013) afirmam que "o efeito isolado ou combinado destas relações pode tornar algumas situações combinatórias condicionais mais complexas" (p. 14).

Na presente pesquisa são abordados apenas dois tipos de problemas condicionais apresentados por Borba e Braz (2012), estendendo-se essa classificação aos problemas de *produto cartesiano, permutação* e *combinação.* São estes:

1. *Um elemento explicitado é fixo:* nesse tipo de problema condicional há uma escolha pré-determinada de certo elemento. Dessa forma, a resolução do problema demanda a fixação do elemento em questão para a construção das possibilidades;
2. *Um elemento fixo explicitado em determinada posição*: nesse caso, não só existe um elemento determinado fixo, como este ocupa certa posição.

O esgotamento das possibilidades de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não, se apresenta como a maior dificuldade apresentada ao solucionar esse tipo de problema, principalmente quando há um grande número de possibilidades, visto que

> nas atividades escolares se deseja que sistematicamente se determine o número total de possibilidades. [...] não se deseja que se liste apenas alguns casos, mas todos os

> casos possíveis, [...] não se está falando em preferências pessoais, mas se deseja pensar em todos os casos possíveis de serem combinados – independentes de 'combinarem', ou não (BORBA, 2016. p. 2).

O tipo de *representação simbólica* utilizado pode também dificultar o esgotamento das possibilidades. Ao fazer uso de listagem ou de árvore de possibilidades, por exemplo, é necessário enumerar todas as possibilidades que satisfazem as condições presentes no enunciado dos problemas. Assim, "a explicitação de todas as possibilidades por meio destes recursos torna-se mais viável se o número de possibilidades for menor" (BORBA, ARAÚJO e BRAZ, 2013. p. 9).

Dado o posto, a hipótese levantada – pela docente e estudantes, propositores da pesquisa – era a de que os problemas combinatórios condicionais seriam resolvidos corretamente mais vezes, visto que apresentam um número de possibilidades menor, podendo assim, ser facilmente resolvidos por meio do uso de estratégias mais simples e informais. O grupo de pesquisadores objetivou verificar a validade da hipótese para os distintos grupos de participantes, bem como para os diferentes tipos de problemas combinatórios.

Na seção que segue, os diferentes grupos de participantes da pesquisa são caracterizados. Além disso, o método utilizado é detalhado, discutindo-se o teste e a estrutura dos problemas propostos.

3 Método

A pesquisa aqui relatada teve o objetivo de levantar os desempenhos apresentados por diferentes públicos no que se refere à resolução de problemas combinatórios condicionais e não-condicionais. Além disso, buscou-se comparar esses desempenhos em função do grupo de participantes, bem como verificar a existência de estratégias próprias de cada grupo, a fim de relacionar o uso das mesmas ao desempenho apresentado na resolução dos diferentes tipos de situações combinatórias trabalhadas (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação)* e em função da presença, ou não, de condições nos problemas propostos.

O público alvo da presente pesquisa é constituído de 55 participantes distribuídos em oito grupos característicos investigados. A coleta de dados foi realizada por diferentes equipes de estudantes do curso de Pedagogia da UFPE.

Os grupos de participantes do estudo foram escolhidos de maneira tal que na pesquisa fossem coletados dados junto a diferentes níveis e modalidades de ensino da Educação Básica

(Grupos 1 a 4), bem como junto a pessoas que concluíram a educação básica há certo tempo e estão afastadas do ambiente escolar (optou-se pela coleta de dados com donas de casa que concluíram o Ensino Médio e não deram continuidade aos estudos – Grupo 5). Além disso, a pesquisa foi realizada com estudantes de Pedagogia em processo de formação inicial (Grupos 6 e 7) e pedagogos atuantes na Educação Infantil (Grupo 8). A presença de dois grupos de participantes compostos por estudantes de Pedagogia (6 e 7) se justifica pelo fato de os estudantes que compõem o Grupo 6 estarem iniciando sua formação e ainda não terem cursado disciplinas voltadas para o ensino de Matemática e, consequentemente, da Combinatória. Por sua vez, os estudantes de Pedagogia que compõem o Grupo 7 caracterizam-se por terem acabado de cursar uma disciplina obrigatória voltada para o ensino de Matemática (estudantes do 6º período) ou estarem concluindo sua formação inicial (estudantes do 10º período). Dessa maneira, buscou-se investigar os conhecimentos combinatórios evidenciados por estudantes de Pedagogia de diferentes períodos, a fim de observar a influência da formação inicial para o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

O Quadro 1 apresenta os oito grupos de participantes trabalhados no estudo apresentado, bem como indica o quantitativo de participantes referente a cada um desses grupos.

Quadro 1: Quantitativo de participantes por grupo

Grupo	Número de participantes
1 – Estudantes dos Anos Iniciais	6
2 – Estudantes dos Anos Finais	7
3 – Estudantes da Educação de Jovens e Adultos	4
4 – Estudantes do Ensino Médio	6
5 – Donas de Casa com Ensino Médio Completo	6
6 – Estudantes do 1º Período de Pedagogia	10
7 – Estudantes do 6º e 10º Períodos de Pedagogia	6
8 – Professores da Educação Infantil	10

Fonte: Dados da Pesquisa

A coleta de dados se deu por meio da proposta de resolução de um teste composto por oito problemas, sendo dois de cada tipo de situação combinatória conforme a integração de classificações apresentada por Pessoa e Borba (2009). Além disso, como os problemas combinatórios condicionais foram foco do estudo, das duas situações-problema de cada tipo, uma era condicional e outra não-condicional. O teste foi resolvido de maneira individual por cada participante.

Os problemas que compõem o teste proposto foram elaborados de maneira coletiva durante uma aula da disciplina *Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório*. Os problemas foram elaborados de maneira que o resultado dos problemas condicionais (dos quatro tipos de situações combinatórias) não fossem maiores que 12 e que os problemas não-condicionais de cada tipo de situação combinatória gerassem resultados maiores que 20 e menores que 24. Além disso, os contextos utilizados, ilustrações e os valores presentes nos enunciados do problema condicional e do problema não-condicional de cada tipo de problema são iguais, essa escolha se deu tendo-se em vista que essas variáveis não fossem influentes no desempenho e, assim, fosse possível realizar análises e comparações em função do tipo de problema e da existência, ou não, de condição nos problemas propostos. A ordem de apresentação dos problemas foi igual em todos os testes, sendo os quatro problemas condicionais apresentados primeiro e a ordem em função do tipo de situação combinatória foi definida por meio de sorteio. As oito situações-problema do teste são apresentadas na Figura 1 e na Figura 2.

Figura 1: Problemas de *produto cartesiano* e de *combinação*

PCCOND: produto cartesiano condicional; PC: produto cartesiano;
CCOND: combinação condicional; C: combinação.

(PCCOND) Júlio, Rodrigo, Gustavo, Cláudio e Bernardo vão formar pares para dançar quadrilha com Amanda, Mel, Larissa e Érica. Se Bernardo dançar com Larissa, de quantas maneiras os outros pares podem ser formados? **R: 12**

(PC) Júlio, Rodrigo, Gustavo, Cláudio e Bernardo vão formar pares para dançar quadrilha com Amanda, Mel, Larissa e Érica. De quantas maneiras diferentes os pares podem ser formados? **R: 20**

(CCOND) Eliane, Fernando, Gabriela, Hélio, Isaura e João vão formar um trio para uma brincadeira. Se Gabriela for uma das escolhidas, de quantas maneiras podem ser escolhidos os outros componentes do trio? **R: 10**

(C) Eliane, Fernando, Gabriela, Hélio, Isaura e João vão formar um trio para uma brincadeira. De quantas maneiras esse trio pode ser formado? **R: 20**

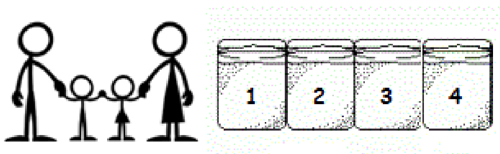
Fonte: Instrumento da Pesquisa

Os problemas propostos referentes às situações combinatórias de *produto cartesiano* e *combinação* foram elaborados de maneira a terem resultados com valores semelhantes: os problemas condicionais de *produto cartesiano* e de *combinação* possuem resultados 12 e 10, respectivamente. Por sua vez os problemas desses tipos nos quais não é apresentada condição possuem ambos 20 possibilidades como resultado. Os problemas condicionais de *produto cartesiano* e *combinação* propostos possuem como característica comum o fato de poderem ser classificados, conforme Borba e Braz (2012), como problemas condicionais do tipo *um elemento explicitado é fixo*. Nesses problemas, a condição presente está relacionada a uma escolha. No problema PCCOND um par fixo já foi escolhido (Bernardo e Larissa) e no CCOND um integrante do trio já é definido (Gabriela).

Figura 2: Problemas de *arranjo* e de *permutação*

ACOND: arranjo condicional; A: arranjo;
PCOND: permutação condicional; P: permutação.

(ACOND) Uma empresa vai contratar um diretor, um supervisor e um gerente. André, Betânia, Catarina e Daniel são candidates candidatos a essas vagas. Se Betânia já ocupou o cargo de diretor, de quantas maneiras diferentes podem ser ocupados os outros cargos com os candidatos restantes? **R: 6**
(A) Uma empresa vai contratar um diretor, um supervisor e um gerente. André, Betânia, Catarina e Daniel são candidates a esses cargos. De quantas maneiras diferentes os candidatos podem ocupar essas vagas? **R: 24**



(PCOND) Uma família (pai, mãe, filho e filha) vai ao teatro e quer sentar junta em uma mesma fileira. De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar de forma que o pai ocupe a quarta cadeira? **R: 6**
(P) Uma família (pai, mãe, filho e filha) vai ao teatro e quer sentar junta em uma mesma fileira. De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar no teatro? **R: 24**

Fonte: Instrumento da Pesquisa

Os problemas de *arranjo* e de *permutação* elaborados possuem o mesmo número de possibilidades como resultado, sendo 6 nos problemas condicionais e 24 nos não-condicionais. Esses problemas condicionais, por sua vez, podem ser classificados, em função de suas relações de condição, como problemas que possuem *um elemento fixo explicitado em determinada posição* (BORBA e BRAZ, 2012). Nesse caso, a condição existente nos problemas diz respeito à pré-determinação de ordem de certo elemento na construção das possibilidades da situação combinatória em questão. No problema de ACOND um candidato já ocupa a vaga para determinado cargo (Betânia: diretoria) e no problema de PCOND um dos integrantes da família ocupa um lugar específico no teatro (pai: poltrona 4).

Os dados coletados por meio do instrumento de coleta anteriormente descrito foram analisados quantitativamente por meio de análises estatísticas. Além disso, foram realizadas análises qualitativas, visando-se compreender as relações que se estabelecem entre as representações simbólicas utilizadas pelos diferentes grupos na resolução do teste proposto e o desempenho apresentado pelos participantes do estudo. Tais análises são apresentadas a seguir.

4 Apresentação e discussão dos resultados

4.1 Desempenho médio por grupo participante

Por meio da realização de análises quantitativas dos dados coletados foi possível constatar um baixo desempenho geral apresentado na resolução dos problemas combinatórios propostos. Os oito problemas foram pontuados com um (1) ponto quando houve esgotamento das possibilidades relativas a cada problema e com zero (0) quando o problema foi respondido incorretamente ou quando não houve resposta. Dessa maneira, o desempenho total máximo no teste é de oito (8) pontos. Na Tabela 1, são apresentadas as médias de acertos apresentadas por cada grupo participante da pesquisa.

Tabela 1: Desempenho médio por grupo pesquisado

Grupo	Desempenho médio
1 – Estudantes dos Anos Iniciais	1,83
2 – Estudantes dos Anos Finais	2,29
3 – Estudantes da Educação de Jovens e Adultos	0,00
4 – Estudantes do Ensino Médio	5,33
5 – Donas de Casa com Ensino Médio Completo	1,00
6 – Estudantes do 1º Período de Pedagogia	2,90
7 – Estudantes do 6º e 10º Períodos de Pedagogia	1,83
8 – Professores da Educação Infantil	4,90

Fonte: Dados da pesquisa

O desempenho médio geral (considerando-se o universo dos 55 participantes dos distintos grupos pesquisados) foi de 2,8 pontos. É dado destaque ao Grupo 4 (Estudantes do Ensino Médio) que obteve a maior média de acertos, seguido do Grupo 8 (Professores da Educação Infantil). Por outro lado, o Grupo 3 (Estudantes da Educação de Jovens e Adultos) apresentou a menor média de acertos, visto que nenhum dos participantes que compõem tal grupo chegou a esgotar as possibilidades de algum dos problemas propostos. Foi observada diferença significativa de desempenho total em função do grupo de participantes, sendo $F (7, 47) = 7{,}557$; $p < 0{,}001$. Essa diferença foi observada em relação ao desempenho dos Estudantes da Educação de Jovens e Adultos comparado com os desempenhos apresentados pelos Estudantes do Ensino Médio e dos Professores da Educação Infantil ($p = 0{,}004$ em ambos os casos).

A apresentação de melhor desempenho por parte dos Estudantes do Ensino Médio era esperada, dado o contato formal com a Combinatória presente nessa etapa escolar. Assim, esperava-se uma média de acertos até maior do que a obtida. Por outro lado, o grupo composto por donas de casa que concluíram essa etapa de ensino apresentou desempenho muito abaixo do esperado. Destaca-se, no entanto, que as participantes desse grupo passaram certo tempo longe do ambiente escolar e esse período de afastamento pode justificar o baixo desempenho obtido.

Por sua vez, os Estudantes da Educação de Jovens e Adultos podem ter apresentado tão baixo desempenho por não reconhecerem as situações combinatórias propostas como problemas matemáticos que exigem sistematização para o esgotamento de suas possibilidades, como observado em estudos anteriores.

É válido ressaltar, ainda, que mesmo que os Professores da Educação Infantil tenham apresentado o segundo melhor desempenho, este se mostra insuficiente, visto que estes profissionais precisam trabalhar as diversas situações combinatórias com seus alunos e, para tal, precisam ter conhecimento aprofundado dessas situações e seus invariantes.

Na seção que segue as análises são aprofundadas levando-se em consideração os diferentes tipos de problemas combinatórios e a existência ou não de condições nos problemas propostos.

4.2 Desempenho por tipo de problema

A Tabela 2 permite uma visualização geral dos resultados obtidos, apresentando o percentual de acertos em cada um dos problemas propostos em função do grupo de participantes.

Tabela 2: Percentual de acertos por tipo de problema em cada grupo pesquisado
PC: produto cartesiano; PCCOND: produto cartesiano condicional; A: arranjo; ACOND: arranjo condicional; P: permutação; PCOND: permutação condicional; C: combinação; CCOND: combinação condicional.

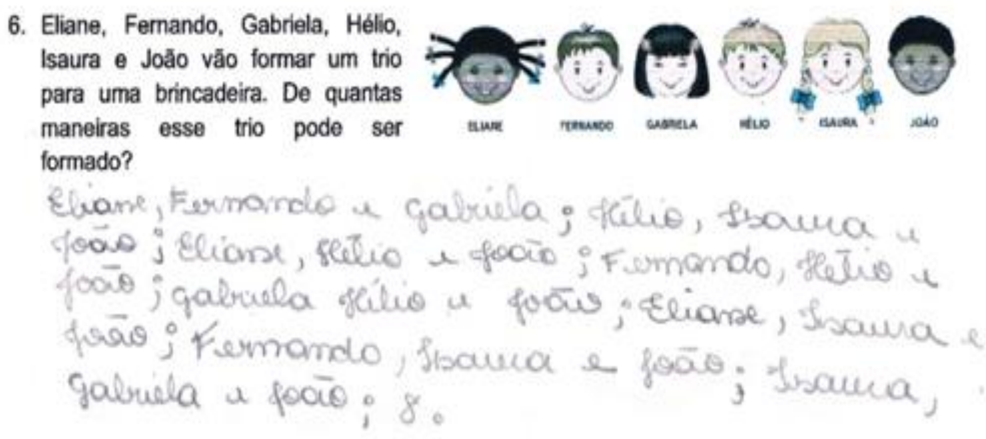
Grupo	PC	PCCOND	A	ACOND	P	PCOND	C	CCOND
1 – Estudantes dos Anos Iniciais	0	83	0	83	0	0	0	17
2 – Estudantes dos Anos Finais	57	71	0	71	0	14	0	14
3 – Estudantes da Educação de Jovens e Adultos	0	0	0	0	0	0	0	0
4 – Estudantes do Ensino Médio	50	83	67	100	83	67	17	67
5 – Donas de Casa com Ensino Médio Completo	33	33	0	33	0	0	0	0
6 – Estudantes do 1º Período de Pedagogia	50	80	20	40	40	60	0	0
7 – Estudantes do 6º e 10º Períodos de Pedagogia	50	50	17	50	17	0	0	0
8 – Professores da Educação Infantil	70	80	60	90	50	60	40	40
Total	**43,6**	**65,5**	**23,6**	**61,8**	**27,3**	**30,9**	**9,1**	**18,2**

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir dos dados da Tabela 2, constata-se que o problema no qual os participantes do estudo apresentaram melhor desempenho diz respeito a uma situação combinatória do tipo *produto cartesiano* condicional. Esse resultado era esperado, levando-se em conta que estudos anteriores (BORBA, ROCHA e AZEVEDO, 2015) indicam os problemas de *produto cartesiano* como os mais fáceis dentre os problemas combinatórios. Isso se deve, em grande parte, a uma maior presença do trabalho com esse tipo de situação combinatória no ambiente escolar. Além disso, o fato de que o problema condicional apresentava um número menor de possibilidades em seu resultado contribuiu para o alto percentual de acertos apresentado.

Por outro lado, o problema de *combinação* não-condicional obteve o menor percentual de acertos. O menor desempenho apresentado nos problemas de *combinação* (tanto condicional como não-condicional) corrobora com estudos anteriores que apontam tal situação combinatória como a mais difícil dentre as situações trabalhadas. Além disso, a listagem foi a estratégia mais utilizada na resolução desses problemas, seguida do uso de multiplicação direta dos valores presentes nos enunciados. Dessa forma, as estratégias utilizadas dificultaram o esgotamento das possibilidades pela falta de sistematização ou pela incompreensão de invariantes desse tipo de situação combinatória, como exemplificado na Figura 3.

Figura 3: Uso de listagem não sistemática na resolução do problema de *combinação* não-condicional (20 possibilidades). Participante 4, estudante dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

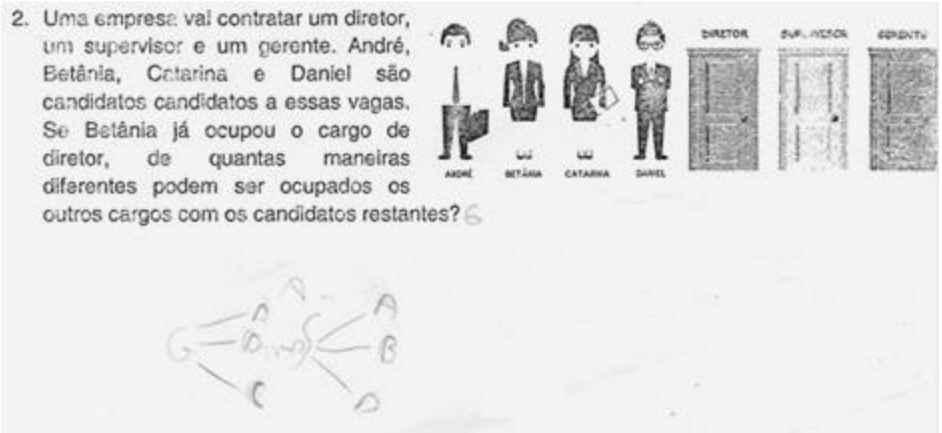


Fonte: Dados da Pesquisa

É possível observar que o Participante 4 respeitou os invariantes de ordem e escolha do problema de *combinação* (indicou sempre grupos compostos por três crianças, não repetindo as possibilidades). Entretanto, ao fazer uso da listagem, encontrou dificuldades para o esgotamento das possibilidades do problema, visto que essa estratégia constitui uma resolução extensa e a falta de sistematização da mesma torna a visualização das possibilidades confusa. Estratégias como a árvore de possibilidades ou a listagem sistemática dos casos poderia facilitar esse esgotamento. Além disso, estratégias mais elaboradas, como o uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou de fórmulas, proporcionam a resolução de maneira mais rápida, não sendo necessária a explicitação dos trios de crianças referentes ao problema proposto. Recomenda-se que no início da escolarização estratégias como a listagem sejam utilizadas, estimulando a sistematização e a progressão, com o passar dos anos, para estratégias mais estruturadas e formais, que possuem maior poder de generalização.

É importante destacar, ainda, o alto percentual de acertos obtido no problema de *arranjo* condicional (61,8%, sendo o segundo problema mais acertado), valor que não reflete a compreensão desse problema evidenciada por grande parte dos participantes do estudo. Atribui-se o elevado número de acertos nesse problema a um procedimento incorreto utilizado. Muitos acertaram o problema multiplicando os valores presentes no enunciado. Assim, embora o resultado estivesse correto, não foi obtido por um procedimento apropriado. Os participantes mostraram grande dificuldade em compreender o invariante da escolha nesse tipo de problema em especial. Assim, o número total de possibilidades foi, muitas vezes, indicado em função das formas pelas quais cada personagem indicado no enunciado pode ocupar diferentes vagas de emprego, e não à escolha de três funcionários: um diretor, um supervisor e um gerente (ver Figura 4).

Figura 4: Incompreensão do invariante de escolha do problema de *arranjo* condicional (6 possibilidades). Participante 23, estudante dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.



Fonte: Dados da Pesquisa

É possível perceber que, mesmo que o Participante 23 tenha chegado à resposta correta para o problema em questão, a resolução apresentada baseou-se no fato de que o cargo de gerente pode ser ocupado pelos três candidatos restantes, assim como o cargo de supervisor. Dessa maneira, entende-se que o invariante da escolha do problema de arranjo não foi compreendido, visto que o participante evidencia construir sua resposta a partir da possibilidade de cada candidato ocupar qualquer uma das vagas remanescentes (André pode ser escolhido para o cargo de supervisor ou de gerente, bem como Catarina e Daniel, logo o participante construiu seis possibilidades). Esse tipo de resposta foi recorrente em diferentes grupos de participantes e contribuiu para o alto percentual de acertos referente a tal problema.

A partir da realização de análises estatísticas inferenciais, com o uso do *software* SPSS constatou-se diferenças significativas no desempenho em função de existência ou não de condição nos problemas apenas no que diz respeito aos grupos de problemas combinatórios de *produto cartesiano* e *arranjo*, tomando como universo todo o grupo de participantes, sendo, respectivamente: $t(54) = 2{,}852$; $p = 0{,}006$ (para os problemas de *produto cartesiano*); e $t(54) = 5{,}775$; $p < 0{,}001$ (para os problemas de *arranjo*).

4.3 Principais estratégias e dificuldades apresentadas

Dada a variedade de públicos que compõem os oito grupos de participantes do presente estudo, considerou-se oportuno indicar algumas características observadas no desempenho apresentado nesses grupos. Nessa seção são destacados, por intermédio de análises qualitativas, os tipos de estratégias mais utilizadas e dificuldades evidenciadas pelos diferentes grupos investigados.

No geral, os participantes do Grupo 1 (Estudantes dos Anos Iniciais) perceberam e levaram em consideração as condições presentes nos enunciados ao resolverem os problemas propostos. No que diz respeito às estratégias, esses participantes tenderam a usar mais frequentemente árvores de possibilidades e multiplicação direta. Ao fazer uso da árvore de possibilidades, por vezes, mostraram incompreensão do invariante de escolha dos problemas combinatórios (principalmente nos problemas de *arranjo* e *permutação*). Por outro lado, quando do uso da multiplicação direta, foi possível observar erros de cálculo numérico frequentes, provocando o erro mesmo quando tal estratégia seria válida.

De maneira semelhante, os participantes do Grupo 2 (Estudantes dos Anos Finais) mostraram compreender e considerar as condições estabelecidas para a resolução dos problemas presentes no teste. Esse grupo de participantes fez grande uso da listagem e multiplicação direta para resolver os problemas propostos, tendo apresentado bastante dificuldade ao lidar com o invariante da escolha, principalmente nas situações-problema de *arranjo* (condicionais e não-condicionais).

Os participantes do Grupo 3 (Estudantes do Ensino Médio) consideraram as condições presentes nos enunciados dos problemas propostos ao resolvê-los e utilizaram uma grande variedade de estratégias. Em especial, as estratégias utilizadas pelos participantes de tal grupo se destacam pelo fato de apresentarem maior sistematização (listagem sistemática, árvore de possibilidades) e/ou serem características do ambiente escolar, adquiridas por meio da instrução formal (multiplicação direta, Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e fórmulas). O melhor desempenho apresentado por esse grupo de participantes é atribuído ao uso dessas estratégias, que se mostram eficazes na resolução de problemas com menor e, principalmente, com maior número de possibilidades.

No que diz respeito aos participantes do Grupo 4 (Estudantes da Educação de Jovens e Adultos), mesmo sem a presença de acertos totais houve tentativas de resoluções dos problemas propostos. A maioria dos participantes desse grupo se restringiu ao uso das ilustrações representativas de cada problema do teste, apresentando uso de listagem apenas nos problemas de *permutação* (condicionais e não-condicionais) para o registro das diferentes possibilidades de ordenação dos elementos presentes nesses problemas. Os participantes mostraram compreender as condições, entretanto, em função de incompreensões dos invariantes de ordem dos problemas, apresentaram dificuldades em esgotar o número de possibilidades.

As participantes do Grupo 5 (Donas de Casa com Ensino Médio Completo) mostraram considerar as condições presentes nos problemas para a resolução dos mesmos. Destaca-se que, mesmo que tenham passado por instrução formal escolar (visto que concluíram o Ensino Médio), tais participantes fizeram uso de estratégias semelhantes às dos estudantes dos Anos Iniciais. As estratégias desse grupo foram mais intuitivas, como listagens, diagramas e desenhos e que, por vezes, não refletiram o caráter multiplicativo dos problemas combinatórios (tendo sido feito uso de adição dos valores presentes nos enunciados).

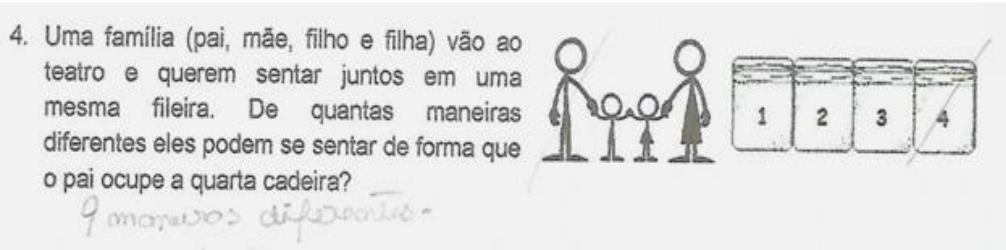
Os participantes da pesquisa cursando o 1º período do curso de Pedagogia (Grupo 6) também perceberam e levaram em consideração as condições presentes nos problemas condicionais para a resolução dos mesmos. Nesse grupo de participantes se fez presente o uso de estratégias próprias do ambiente escolar e mais eficientes para a resolução dos problemas propostos. Entretanto, o uso de fórmulas não foi muito frequente (tendo levado constantemente ao erro, visto que uma única fórmula tendeu a ser generalizada aos diferentes tipos de problemas combinatórios). Assim, as principais estratégias utilizadas foram o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), o uso de multiplicação direta e listagens com generalização, evidenciando a percepção, pelos participantes desse grupo, do caráter multiplicativo intrínseco aos problemas combinatórios.

O Grupo 7 (Estudantes do 6º e 10º períodos de Pedagogia), por sua vez, apresentaram bastante resistência em registrar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos. Na maioria das vezes foram apresentadas apenas as respostas finais. Entretanto, quando da explicitação de estratégia, foi muito presente o uso de multiplicação direta dos valores presentes nos enunciados. É válido destacar, ainda, que o uso dessa estratégia provocou uma grande quantidade de respostas incorretas, em consequência de erros de cálculo numérico.

Os participantes pertencentes ao Grupo 8 (Professores da Educação Infantil) respeitaram as condições presentes nos problemas propostos e, no grupo, se fez presente o uso de estratégias variadas como listagem, multiplicação direta, PFC e também diferentes fórmulas para resolução dos variados tipos de problemas. Estes participantes, em especial, tenderam a adotar um único tipo de estratégia, assim, por exemplo, um professor que utilizou listagem fez uso dessa estratégia em todos os problemas do teste, enquanto um participante desse grupo que fez uso de fórmulas também o fez na maioria das questões propostas. Em especial, nos problemas de *combinação* o uso de fórmula específica desse tipo de problema foi a estratégia que mais proporcionou acertos, visto que, ao fazerem uso de outras estratégias, os participantes não mostraram compreender certos invariantes desse tipo de problema, na maioria das vezes, chegando a considerar vários casos repetidos como novas possibilidades.

Percebe-se, assim, que os participantes dos diferentes grupos mostraram, ao solucionar os problemas propostos, compreender e levar em consideração a existência das condições (de *um elemento explicitado* fixo e de *um elemento fixo explicitado em determinada posição*). Mesmo aqueles participantes que apresentaram apenas resposta (não registrando a estratégia utilizada), por vezes deixaram evidências da consideração das condições, por meio de registros/marcações, como exemplificado na Figura 5.

Figura 5: Resolução do problema de *permutação* condicional (6 possibilidades). Participante 12, estudante do 6º período de Pedagogia.



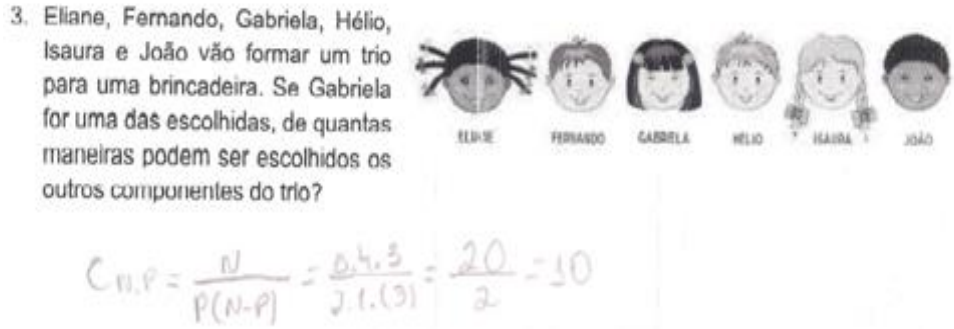
Fonte: Dados da Pesquisa

Percebe-se que o Participante 12 respondeu o problema de *permutação* condicional sem deixar indícios da estratégia utilizada para chegar ao resultado indicado (9 possibilidades). Entretanto, deixa indícios de que ao solucionar o problema em questão atentou para a condição presente no mesmo: o pai ocupar a quarta poltrona em determinada fileira no teatro.

Foi identificado, ainda, o uso de estratégias diversas pelos diferentes grupos considerados nesse estudo, estando o sucesso na resolução dos problemas propostos intimamente ligado ao uso das mesmas. Por exemplo, o Participante 21, pertencente ao de grupo Estudantes dos Anos Iniciais, que fez uso da multiplicação direta dos números presentes nos enunciados em todos os problemas resolvidos do teste, errou a solução da maioria dos problemas, visto que tal estratégia não reflete as propriedades invariantes de todos os tipos de problemas combinatórios propostos. O estudante resolveu corretamente os problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* condicionais, mas deixou o problema de *produto cartesiano* não-condicional em branco e errou todos os outros.

Dessa maneira, atribuem-se os melhores desempenhos apresentados pelos participantes dos Grupos 4 e 8 (Estudantes do Ensino Médio e Professores da Educação Infantil, respectivamente) ao uso frequente de estratégias mais formais, oriundas de um contato escolar recente com a Combinatória ou, possivelmente, da experiência adquirida na área educacional. As estratégias utilizadas por esses grupos consistiram no uso de fórmulas específicas ao tipo de problema combinatório solucionado, como ilustrado na Figura 6 e, por vezes, em sistematizações e generalizações de estratégias simples como a listagem (ver Figura 7).

Figura 6: Uso de fórmula na resolução do problema de *combinação* condicional (10 possibilidades). Participante 42, professor da Educação Infantil.

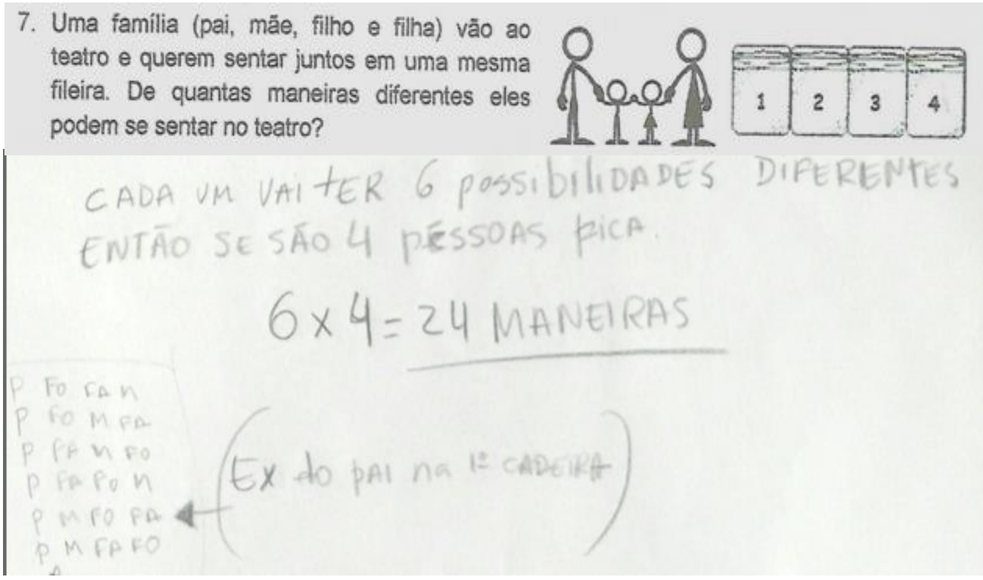


Fonte: Dados da Pesquisa

Na resolução apresentada pelo Participante 42, é utilizada a fórmula para o cálculo de combinação de cinco elementos, tomados dois a dois. Ao utilizar tais valores, o participante mostra considerar a condição presente no problema em questão, que estabelece que um dos componentes do grupo já foi escolhido: Gabriela. No desenvolvimento da solução apresentada, percebe-se a ausência dos fatoriais que fazem parte da fórmula, entretanto o uso dos mesmos está implícito dado o resultado obtido.

Os problemas de *combinação* (condicional e não-condicional) foram aqueles que obtiveram menor número de acertos no presente estudo. As principais dificuldades apresentadas na resolução desses problemas estiveram relacionadas à dificuldade de esgotamento das possibilidades quando do uso da listagem. No problema condicional a listagem levou ao acerto em apenas 33,3% das vezes nas quais foi utilizada e, dessa maneira, estratégias mais eficazes se fazem necessárias, principalmente nos problemas não-condicionais, nos quais o número de possibilidades é dobrado. A importância da instrução formal, que possibilita uma ampliação do repertório de representações simbólicas/estratégias relacionadas às diferentes situações combinatórias é evidenciada por meio do dado que indica que 60% dos participantes que esgotaram as possibilidades do problema de *combinação* não-condicional (20 possibilidades) o fizeram utilizando a fórmula para este tipo de problema.

Figura 7: Generalização de listagem na resolução do problema de *permutação* não-condicional (24 possibilidades). Participante 55, estudante do Ensino Médio.



Fonte: Dados da Pesquisa

O Participante 55, por outro lado, mesmo fazendo uso da listagem consegue esgotar o número de possibilidades referentes ao problema de *permutação* não-condicional, apesar do resultado relativamente elevado (24 possibilidades). O estudante, que já havia utilizado a listagem no problema condicional desse tipo, esgotando as possibilidades do mesmo, generaliza o resultado anteriormente encontrado para solucionar o novo problema proposto. Assim, não precisa listar as 24 possibilidades em questão, pois, ao eliminar a condição presente no problema anterior, multiplica o número de possibilidades pelo número de membros da família descrita no problema.

Como esperado, os problemas não-condicionais apresentaram menor percentual de acertos em função do maior número de possibilidades referentes aos mesmos. Dessa forma, o uso de estratégias mais formais determinou o sucesso no esgotamento dessas possibilidades (estratégias que se mostraram características de certos grupos de participantes).

Na seção que segue são apresentadas as considerações levantadas a partir do desenvolvimento do presente estudo. Destacam-se a importância da instrução formal voltada para a resolução de problemas combinatórios que proporcione a exploração de diferentes *situações*, seus *invariantes* e *representações simbólicas*, tendo por intuito a criação de um amplo repertório de estratégias eficazes para a resolução desses problemas.

5 Considerações finais

A pesquisa na formação inicial de professores se constitui como importante oportunidade de estabelecimento de relações entre teoria e prática, contribuindo para a exploração de conceitos de diversas áreas, sob um olhar diferenciado: o olhar de pesquisador. Dessa forma, a pesquisa aqui relatada atende ao apontado por diversos autores, tais como Guimarães e Borba (2007), de que a realização de investigações pelo professor em formação – inicial e continuada – é indispensável à formação docente.

A presente pesquisa foi desenvolvida coletivamente junto a estudantes de Pedagogia que cursaram uma disciplina eletiva. A realização da mesma permitiu um contato mais aprofundado dos discentes com conceitos da Combinatória, investigando o desempenho apresentado no que diz respeito à resolução de problemas combinatórios condicionais e não-condicionais apresentado por 55 participantes, pertencentes a diferentes públicos-alvo: estudantes de diferentes níveis e modalidades da educação básica, pessoas com educação básica completa, colegas de curso (estudantes de diferentes períodos) e colegas de profissão já formados e em exercício na Educação Infantil. Os graduandos, dessa forma, ampliaram suas compreensões de *situações* combinatórias, dos *invariantes* dessas situações e das variadas formas de *representação simbólica* das mesmas – como Vergnaud (1986) indica ser necessário ao desenvolvimento conceitual. Os estudantes de Pedagogia também desenvolveram maior entendimento do que distintos grupos já compreendem e quais dificuldades apresentam no que diz respeito à Combinatória.

O grupo de pesquisadores (docente, mestranda e discentes da disciplina) constatou que, no geral, os participantes dos oito grupos compreendem e consideram a existência, ou não, de condições presentes nos enunciados dos problemas combinatórios para a resolução dos mesmos. Como indicado por Borba (2016), problemas combinatórios têm particularidades que uma vez entendidos podem auxiliar no desenvolvimento de modos de raciocínio matemático e saber que pessoas distintas possuem, ao menos, compreensões iniciais/intuitivas de Combinatória é um importante resultado de pesquisa.

Corroborando com a hipótese inicial, os problemas condicionais apresentaram maior percentual de acertos, visto que apresentavam menor número de possibilidades, sendo estas mais facilmente esgotadas, mesmo quando do uso de estratégias informais como a listagem, estratégia que se fez predominante na maior parte dos grupos. Por outro lado, no que diz respeito aos problemas não-condicionais, o menor percentual de acertos é atribuído à necessidade do uso de estratégias mais sistematizadas/formais que possibilitassem o esgotamento das possibilidades dos problemas, uma vez que o número de possibilidades nesse tipo de problema foi maior que nos problemas condicionais.

Foi o uso de estratégias adequadas que possibilitou o sucesso na resolução de ambos os tipos de problemas (com maior e menor número de possibilidades; não-condicionais e condicionais) que fez com que o grupo dos Estudantes do Ensino Médio e o dos Professores da Educação Infantil tenham apresentado desempenho superior. As estratégias utilizadas por esses dois grupos os levaram a conseguir esgotar o número de possibilidades da maior parte dos problemas.

Os problemas de *produto cartesiano* apresentaram o maior número de acertos dentre os quatro tipos de problemas propostos. Por sua vez, os problemas de *combinação* foram aqueles nos quais os participantes dos oito grupos apresentaram maior dificuldade. O baixo desempenho nos problemas de *combinação* (condicional e não-condicional) deveu-se à dificuldade de esgotamento de possibilidades desses problemas quando do uso de estratégias (tais como multiplicação direta...) que não refletem o invariante de ordem dos mesmos ou pela falta de sistematização quando do uso da listagem.

Destaca-se, assim, a importância da instrução formal para o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio da ampliação do repertório de estratégias/*representações simbólicas* eficazes à resolução dos problemas que abordam as diferentes *situações* combinatórias e exploram os seus respectivos *invariantes*. Desse modo, cabe à escola a responsabilidade de ampliar modos de raciocínio matemático – dentre os quais o raciocínio combinatório.

Referências

BÉLAIR, Louise. Formação para a complexidade do ofício de professor. In: PAQUAY, Léopold, PERRENOUD, Philippe; ALTET, Marguerite; CHARLIER, Évelyne. *Formando professores profissionais*: quais estratégias? Quais competências? Porto Alegre: Artmed, 2001.

BORBA, Rute. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. In: ENCONTRO DE COMBINATÓRIA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE DOS ANOS INICIAIS, 2016, Recife. Anais do ENCEPAI. Recife: UFPE, 2016, p. 1-15.

BORBA, Rute; ARAÚJO, Ana Cristina; BRAZ, Flávia Myrella. A compreensão por alunos do Ensino Médio de problemas combinatórios condicionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 2013, Curitiba. Anais do IX ENEM: Educação Matemática – retrospectivas e perspectivas, PUC-PR, SBEM, 2013, p. 1-16.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia Myrella. O que é necessário para se compreender problemas combinatórios condicionais. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Fortaleza. Anais do III SIPEMAT. Fortaleza: UFC, UECE, 2012.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015. DOI: 10.1590/1980-4415v29n53a27.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

GUIMARÃES, Gilda; BORBA, Rute. Professores e graduandos de pedagogia valorizam e vivenciam processos investigativos? *Revista Tópicos Educacionais*, Recife, v. 17, n. 1-3, p. 61-90, 2007.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; PINTO; Paulo César de Carvalho; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NÓVOA, Antônio. *O professor pesquisador e reflexivo*. Entrevista concedida em 13 de setembro de 2001. Disponível em: http://www.tvebrasil.com.br/salto/entrevistas/antonio_novoa.htm; acesso em 22 abr. 2017.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, Campinas, v. 17, n. 31, p. 105-150, dez. 2009.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUM, Jean. (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas – um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, v. 5, n. 1, p. 75-90, 1986.