CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIII, Número 2
Abril - Junio 1988

DINAMICA DE COMPETENCIA

AMADO REYES

1. Introducción

Es muy conocido el fenómeno que tiene que ver con una comunidad de organismos que viven en un habitat con suficiente alimento y que se multiplican a una razón de α individuos por unidad de tiempo. Por otro lado se estudia un proceso relacionado, el cual consiste en la desintegración de un material radioactivo a una razón de B Unidades de masa por unidad de Tiempo. Estos procesos no podrían ser señalados como de competencia, ya que para una competencia se necesita más de un competidor. Consideremos el caso de dos comunidades de organismos que comparten un mismo habitat y que posiblemente la presencia de una de las comunidades afecta de algún modo la forma de vida de la segunda; estamos pues en presencia de un proceso de competencia.

Muy grande es el número de Procesos de Competencia que podemos advertir en la Naturaleza; más aún, entre los mismos hombres advertimos competencia entre grupos deportivos, grupos económicos, grupos sociales, entre países por lograr la hegemonía política y económica o ambas; así aparece la guerra, una manifestación "Catastrófica" del proceso de competencia. En este trabajo tratamos de presentar de manera sencilla una de las formas más populares para estudiar los fenómenos de competencias mediante los llamados sistemas Dinámicos, los cuales hacen un amplio Uso de las ecuaciones Diferenciales y otras herramientas de la Matemática para obtener informaciones no solamente del presente del Proceso, sino de su Conducta futura. Esperamos que resulte de utilidad al amable lector.

2. Ecuaciones Diferenciales

En lo sucesivo entenderemos como una ecuación diferencial un Campo de direcciones y sus soluciones serán funciones definidas en algún intervalo de los reales y cuyas gráficas son tangentes al campo de direcciones. Sin embargo, presentamos las ecuaciones diferenciales en forma analítica como:

$$1.2 \quad dx/dt = f(t, x)$$

Donde f: R^{n+1}--- R^n es una función definida y continua en un conjunto abierto D c R^{n+1}. Así, para cada punto $(t, x) \epsilon R^{n+1}$, $f(t, x)$ nos da la dirección del campo en ese punto. En el caso de que tanto x como t sean reales se tendrá que $f(t, x)$ nos proporciona la pendiente de un segmento que pasa por el punto (t,x).

Si tenemos la ecuación diferencial

$$dx/dt = t-2x$$

Entonces $f(t,x) = t-2x$, el Campo de direcciones se presenta en la figura A y las curvas soluciones se presentan en la figura B.

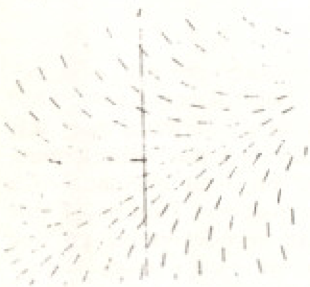


Figura A

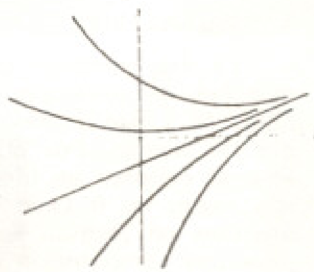


Figura B

Es bueno observar que entre todas las funciones x que son soluciones de la ecuación 1.2 hay unas que son de particular importancia, son las llamadas soluciones de equilibrio (puntos fijos) y para ellas $dx/dt = 0$. Así, para determinar las soluciones de equilibrio ponemos

$$2.2 \qquad f(t,x) = 0$$

y resolveremos para x. En el caso de que 1.2 sea una ecuación escalar, la ecuación 2.2 es una ecuación con una incógnita x, pero si 1.2 es una ecuación Vectorial, entonces 2.2 es un sistema de ecuaciones para las incógnitas dadas por las componentes de x.

Se precia de muy importante para las aplicaciones el hecho que una solución x,de 1.2 es estable (en sentido de Lyapunov) si dado un número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|x_1(t_0) - x_2(t_0)| < \delta(\epsilon)$, entonces $|x_{1(t)} - x_{2(t)}| < \epsilon$.

para $t_0 < t < \infty$, y x_2 es otra solución con condición inicial en el mismo conjunto que x_1. Un caso particular muy común es la llamada estabilidad asintótica para x_1, la cual exige que $\lim_{t \to \infty} | x_{1(t)} - x_{2(t)} | = 0$.

En las diferentes disciplinas se entiende por un sistema dinámico aquel que evoluciona con el "tiempo", de ahí que cada sistema dinámico da origen a una ecuación diferencial de la forma general 1.2. En general se piensa que un sistema que originalmente estaba en el estado x_0 a $t = t_0$, evolucione con el tiempo para mostrarnos el estado $x_{(t)}$ en cualquier $t > t_0$. En este caso la expresión 1.2 se amplía para tener

$$3.2 \qquad dx/dt = f(t,x)\,,\ x_0 = x_{(t_0)}.$$

3. Modelos de las Facciones Competitivas

Este trabajo está limitado a considerar sólo dos facciones en el proceso competitivo. Dos casos estudiaremos para ilustrar un proceso tal: el modelo general de competencia entre dos facciones y un caso particular de este modelo general, los cuales se estudiarán por su importancia en muchos campos.

a. Modelo General

Dos especies similares de animales compiten en un habitat donde el modelo disponible es limitado. Existen varios resultados posibles al final de la Competencia:

a) La especie número uno sobrevive y la número dos se extingue.

b) La especie número dos sobrevive y la especie uno se extingue.

c) Las dos especies coexisten.

d) Las dos especies se extinguen.

Cada uno de esos resultados puede expresarse en términos de un estado de equilibrio de las poblaciones x_1 y x_2 de las dos especies. La ecuación diferencial usada para modelar la dinámica de x_1 y x_2 debe tener cuatro puntos fijos aislados.

Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales dinámicas no lineales

$$1.3 \quad dx_1/dt = (a - bx_1 - \sigma x_2)x_1,\ \ dx_2/dt = (c - \nu x_1 - dx_2)x_2$$

donde a, b, σ, c, ν, d son positivos. Se observa que la tasa de crecimiento per cápita, digamos de la población x_1, consiste de tres términos, la tasa de crecimiento de la población x, vista aisladamente, a, la tasa de crecimiento debido a la competencia intra-especie, $-bx_1$, y la competencia inter-especies, $-\sigma x_2$. Una interpretación similar se puede dar para los términos c, $-dx_2$ y $-\nu x_1$ para la tasa de crecimiento percápita x_2/x_2.

Si ha de darse una coexistencia entre las especies significa que el sistema de ecuaciones (1) tiene un punto fijo con $x_1>0$, $x_2>0$. Ahora, un tal punto fijo puede aparecer si las ecuaciones lineales

$$2.3 \qquad bx_1+\sigma x_2 = a_1, \quad \nu x_1+dx_2 = C$$

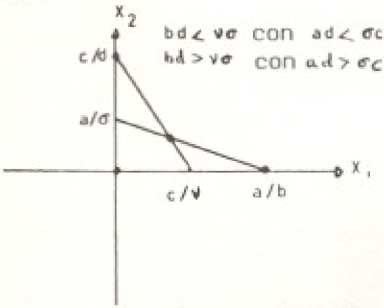
tienen una solución. Si existe una solución para el sistema en el primer cuadrante del plano x_1, x_2, el punto fijo está dado por:

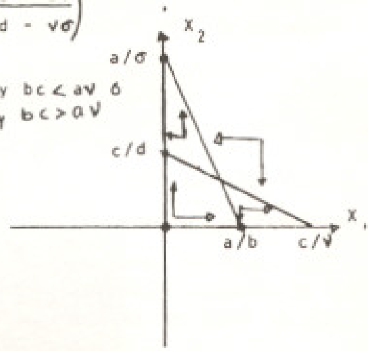
$$\left(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu\sigma}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma}\right)$$

donde

$bd<\nu\sigma$ con $ad<\sigma c$ y $bc<a\nu$ ó

$bd>\nu\sigma$ con $ad>\sigma c$ y $bc>a\nu$





Se muestran los puntos fijos por .

A continuación hacemos un análisis de la dinámica para el caso 1. Observemos primero la linealización en los cuatro puntos fijos. Denotemos cada sistema linealizado por y = Wy, donde y son coordenadas locales en el punto fijo, entonces cada punto fijo y su correspondiente W está dado por

$$(o,o), \begin{bmatrix} a & \sigma \\ o & c \end{bmatrix}$$

$$(o,c/d), \begin{bmatrix} a-\sigma c/d & \sigma \\ -\nu c/d & -c \end{bmatrix}$$

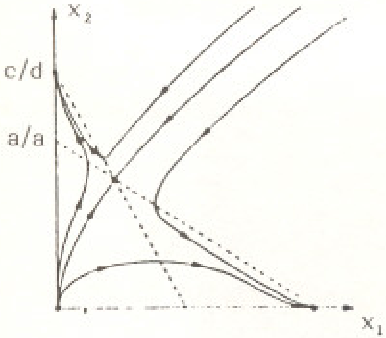
$$(a/b, o), \begin{bmatrix} -a & -\sigma a/b \\ \sigma & c-\nu a/b \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{ac-ad}{v\sigma-bd}, \frac{av-bc}{v\sigma-bd}\right), \quad \frac{1}{bd-v\sigma}\begin{bmatrix} b(\sigma c-ad) & \sigma(\sigma c-ad) \\ v(av-bc) & d(av-bc) \end{bmatrix}$$

Los puntos fijos son todos simples y su naturaleza se determina a partir de los valores propios de la matriz W_0 para el punto (o,o) los valores propios de W son a>o y c>o, entonces por el teorema de linealización, el origen es un nodo inestable. Para el punto segundo y para el tecero los valores propios son negativos y entonces estamos en presencia de nodos estables. El cuarto punto corresponde a un punto de ensilladura, ya que los valores propios tienen signos opuestos.

Si asumimos que todos los estados iniciales en el primer cuadrante son posibles, igualmente, lo más posible que suceda es que una de las poblaciones se extinga. Si se quiere más detalles sobre la evolución de las dos especies éstos se pueden obtener del plano de fase.

Figura C



b. Competencia en Mejor Oferta

Considere el caso de dos sectores comerciales que ofrecen dindero en cantidades variables a Proveedores a cambio de una determinada mercancía. Sea X_1 la cantidad de pesos que el Sector número uno ofrece por una unidad de la mercancía de los Proveedores y X_2 la cantidad en pesos que el Sector número dos ofrece por una unidad de la mercancía de los Proveedores; si denotamos por a la razón de demanda del Sector número uno, σ la razón de interrelación con el segundo Sector, por d la razón de demanda del Segundo Sector, y por v la razón de interrelación con el primer Sector, la dinámica viene expresada por el sistema

2.3 $$dx_1/dt = (a-\sigma x_2)x_1$$

$$dx_2/dt = (d + vx_1)x_2$$

Aquí se ha supuesto que en la relación con el segundo Sector el Primero pierde recursos a una razón proporcional a la cantidad de pesos que ofrece el Segundo Sector por una unidad de mercancía $(-\sigma x_2)$, mientras que el Segundo Sector gana recursos en su relación con el Primer Sector a una razón proporcional a la cantidad de pesos que ofrece el Primer Sector por una unidad de mercancía (vx_1).

El sistema 2.3 tiene dos puntos fijos (o,o) y $(-d/v,\ a/\sigma)$. Es claro que el punto fijo (o,o) no tiene aplicación. Ahora, si linealizamos el sistema alrededor del punto $(-d/v,\ a/\sigma)$, obtenemos el sistema

3.3 $$dy_1/dt = \sigma d/v\ y_2$$

$$dy_2/dt = va/\sigma\ Y_1$$

donde $y' = x_1 + d/v$, $Y_2 = x_2 - a/\sigma$

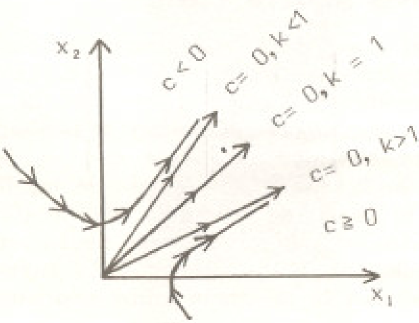
Se observa que si $y_1 \neq 0$, entonces,

4.3 $$dy_1/dy_2 = \sigma^2 d/v^2 a\ \ y_2/y_1,$$

o Integrando se tiene que las curvas solución son hipérbolas de la forma:

$$\frac{y_1^2}{c} - \frac{y_2^2}{c/k^2} = 1,$$

con $k^2 = \dfrac{\sigma^2 d}{v^2 a}$, c es constante de integración, y cuando c = 0 las hipérbolas degeneran en rectas. La situación se ve mejor en la figura D.



Observe que si $Y_1 = 0$, entonces $X_1 = -d/v$, es decir, el primer Sector no ofrecería pesos por la unidad de Mercancía, mientras que el segundo Sector pudiera fijar una cantidad determinada por la unidad de Mercancía, es decir, si $y_1 = 0$, $y_2 = P$ (una constante), para obtener que $x_2 = a/\sigma + p$. Esta situación sólo puede darse en el caso que se haga desaparecer drásticamente el primer Sector.

Es bueno hacer notar que lo razonable del comportamiento Comercial de la situación estudiada, dependerá de la interrelación de los dos Sectores demandantes. Podría ocurrir que la oferta creciera sin límites, que hubiera una situación de fluctuación cíclica, que uno de los dos desaparezca, etc. La figura D muestra la situación en que los dos sectores sobreviven y el caso en que el primer Sector se eliminara. Se puede hacer un catálogo de situaciones para tener un estudio bastante completo de los fenómenos que ocurrieran si variamos las condiciones.

Conclusión

Esta presentación procuró mostrar la importancia de la técnica de las ecuaciones diferenciales y sus planos de fase para expresar la conducta de un sistema.

Son muchos los fenómenos que se pueden modelar y estudiar mediante esta técnica. En el modelo general hablamos de especies y en la presentación particular nos referimos a una situación comercial, sin embargo, nos pudimos haber referido a problemas más concretos de nuestra propia realidad; por ejemplo, el Modelo particular puede ser aplicado para Modelar la conducta de la prima del dólar en nuestro país si nos detenemos a analizar sólo las causas nacionales.

Claro que éste no sería un modelo exacto, pero sí puede mostrarnos cualitativamente el curso de los acontecimientos en lo que respecta al Mercado Cambiario.

Queremos, además, por medio de estas consideraciones, estimular al lector para que se integre a la investigación dedicada especialmente para dar respuestas a los problemas que atañen a países como el nuestro, esto sin descuidar el interés por los avances y los logros que en ciencia se obtienen cada día en los países desarrollados.