CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIII, Número 2
Abril - Junio 1988

DERIVADA GENERALIZADA

DANIEL BAEZ

Introducción

Los finales del siglo XIX y los inicios del XX fueron en extremo importantes para el avance de la ciencia en general y particularmente de la Matemática. Grandes fueron los aportes de las escuelas francesa, alemana, rusa e italiana.

Estas contribuciones se pueden ver en dos vertientes: en lo extensivo y en lo intensivo o lo que es igual, hacia la generalización y hacia la delimitación de los campos. En lo relaivo al análisis, por ejemplo: para tomar una área, podríamos hacer una acotación entre Cauchy y Sóbolev. Fijemos el inicio en los trabajos de Cauchy sobre convergencia uniforme de funciones lo que sería más tarde sistematizado por Riemann y Weierstras. Entre los elementos de esa sucesión de personajes y hechos podríamos mencionar entre otros, los trabajos de Arzelá y Dini, quienes determinaron las condiciones necesarias para que el límite de funciones continuas sea continuo, así como los de Ascoli sobre equicontinuidad.

El nacimiento de la Topología, con Riemann y la noción de espacio métrico con Fréchet, más tarde desarrollada por Hausdorff, crean el ambiente propicio para el nacimiento de la teoría general de los Espacios Vectoriales Topológicos. Esta teoría general ligada a la noción de espacio métrico fue introducida por Banach en el campo de los espacios fundamentales. No menos importantes fueron los trabajos de Hilbert, como no menos determinantes los de Lebesque. Siguiendo esa lista casi interminable de personajes y aportes se llega a nuestros tiempos donde se introduce la noción de funciones generalizadas o distribución sistematizadora Sóbolev, en el año 1930.

La generalización del concepto corriente de función se hizo necesaria en análisis, no sólo por la matemática misma, sino por la exigencia que de ello ha hecho la práctica. Por ejemplo el tratamiento de funciones pulsos en física o funciones de distribución en probabilidad. Ocurre que en estas áreas y en muchas otras ya no era suficiente el concpeto corriente de función como la regla que asigna a cada elemento X del dominio un elemento y de la imagen. Para el caso de la teoría de probabilidad, se conoce que si $\phi(x)$ define una función de distribución de probabilidad, entonces $\frac{d\phi(x)}{dx} = P(x)$ donde la $P(x)$ es la densidad de probabilidad. Si la función de distribución de probabilidad $\phi(x)$ es discontinua en un número finito de puntos, o si existen puntos de picos en la gráfica de $\phi(x)$, entonces esto no sería pósible por el concepto corriente de función, pues en este caso se exige la continuidad del dominio y la suavidad de la curva.

Para el caso de las funciones pulsos en Física, se tiene el concepto de función impulso, denotada por $\delta(t)$ (Delta de Dirac) y que se define como un pulso de amplitud infinita y de duración cero. La dificultad estriba en que esta función no puede definirse, en la forma corriente de: asignación de punto a punto.

Para solucionar los problemas anteriores se introdujo el concepto de función generalizada (Distribución).

Función de Prueba

Sea $Q \subset R^n$ (Espacio euclideo n dimensional) y sea F una función definida sobre Q y evaluada sobre los complejos, entonces se llama soporte de F, denotado por SuppF a la clausura en Q de $A = \{x/f(x) \neq 0\}$. Una función de prueba sobre Q, es, por definición, una función de $C^\infty(Q)$, espacio de funciones continuas cuyas derivadas de cualquier orden son también continuas. El espacio vectorial de toda función de prueba se denota por $C_c^\infty(Q)$ o D(Q). Un ejemplo muy clásico de este tipo de función es:

$$\sigma(x) = \begin{cases} e^{-\alpha^2/(K^2 - t^2)} & /t/ < \alpha \\ 0 & \text{si } /t/ \geq \alpha \end{cases}$$

Esta es una función C^{∞} (Q), lo que está condicionado por el exponencial, y además posee soporte compacto, ya que $\theta(x)$ no es cero en $/x/<\alpha$ cuya clausura es $/x/\leq\alpha$ y por Heine Borel $(x/\leq\alpha$ es compacto.

Función Generalizada

Sea Q R^n se llama función generalizada sobre Q a toda funcional lineal continua (En el sentido $T(\theta)_c \to T(\theta))$ sobre el espacio D(Q). El espacio vectorial de todas las distribucines se denota por D'(Q) y en consecuencia es el dual topológico de C_c^{∞} (Q).

Por ejemplo: Sea B_{loc} el espacio de funciones localmente integrables sobre Q, entonces la funcional $T_f(Q)$: $B \xrightarrow[loc]{} C$ definida por la expresión:

$$T_f(\theta) = \int_Q f(x)\ \theta\ (x)\ dx, \quad f \in B_{loc}(Q)\ y \forall \theta(x) \in C_c^{\infty}(Q)$$

define una función generalizada sobre Q. Por comodidad, regularmente, estas distribuciones se denotan por $<f, \theta>$ y son llamadas regulares, en oposición a otras distribuciones que no vienen definidas por la expresión anterior y a las que se les llama singulares, por ejemplo:

Sea f(x) = 1/x, esta función no es localmente intégrable en R; por tanto, no define una distribución de acuerdo a la expresión $\langle f, \theta \rangle$ vista anteriormente; pero sin embargo, para cada $\theta \in C_c^{\infty}(Q)$ la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\ \frac{1}{x} dx$ existe y es finita en el sentido del valor principal de Cauchy, en efecto.

$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\ \frac{1}{x} dx = \int_a^b \theta(x)\ \frac{1}{x} dx$; pues $\theta(x)$ se anula fuera de (a,b).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\ \frac{1}{x} dx = \int_a^b \theta(x)\ \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \to 0} \left\{ \int_a^{0-\xi} \theta(x)\ \frac{1}{x} dx + \int_{0+\xi}^{b} \frac{\theta(x)}{x} dx \right\}$$

Integrado por parte en cada término.

$$\lim_{\xi \to 0} \left[\theta(-\xi) \ln \xi - \int_a^{-\xi} \theta'(x) \ln /x/dx - \theta(\xi) \ln \xi - \int_{\xi}^{b} \theta'(x) \ln /x/dx \right]$$

poniendo $\theta(x) = \theta(0) + x\psi(x) \quad ; \xi(0) = \theta'(0)$

y sustituyendo tendremos:

$$\theta(-\xi) = \theta(0) - \xi\,\xi(\xi) \quad ; \theta(\xi) = \theta(0) + \xi\,\xi(\xi)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[[\theta(0) - \varepsilon \xi(\varepsilon)] \ln \varepsilon - \int_a^{\varepsilon} \theta'(x) \ln/x/ dx - [\theta(0) + \varepsilon \xi(\varepsilon)] \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{b} \theta'(x) \ln/x/ dx \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-2\varepsilon \xi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_a^{-\varepsilon} \theta'(x) \ln/x/ dx - \int_{\varepsilon}^{b} \theta'(x) \ln/x/ dx \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-2\varepsilon \xi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_a^{\varepsilon} \theta'(x) \ln/x/ dx - \int_{\varepsilon}^{b} \theta'(x) \ln/x/ dx \right]$$

$$= - \int_a^{0} \theta'(x) \ln/x/ dx - \int_0^{b} \theta'(x) \ln/x/ dx = - \int_a^{b} \theta'(x) \ln/x/ dx$$

la cual es una integral que existe y está definida. Por tanto, $F(x) = \frac{1}{x}$ define una distribución singular sobre D(R).

Otro ejemplo de función generalizada singular es:

La función delta (δ) de Dirac, esta distribución se define para toda $\theta \varepsilon D(Q)$;δ: D (Q) $\to$ C por $\delta_0(Ç) = \theta(0)$ y más generalmente $\delta a\ (\theta) = \delta(a)$, es la distribución dada por la medida de Dirac concentrada en el punto a. Estas funcionales se expresan generalmente por $\delta_0(\theta) = \int_{00}^{00} \delta(x)\, \theta(x)\, dx$ y por $a(x) = \int_{00}^{00} \delta(x-a)\, \theta(x)\, dx$.

Sobre el espacio de las funciones generalizadas se pueden realizar múltiples operaciones, en especial dos de las operaciones fundamentales del análisis que son: a) El paso al límite; se dice que la sucesión de funciones generalizadas $\{fn\}$ convergerá f, cuando para cada C_c (Q) se cumple la relación $\langle fn, \theta \rangle \to \langle f, Ç \rangle$ y b) Derivada de funciones generalizadas.

Derivada de una Distribución

Sea $T_f \in D'$ (Q) la derivada parcial de T_f con respecto a la variable X_k, $(1 \leq k \leq n)$ es la distribución $\partial T_f / \partial X_k$, definida por la fórmula

$$\frac{\partial . T}{\partial X_k} = - \left\langle f, \frac{\partial \theta}{\partial X_k} \right\rangle \quad , \forall \theta \in C_c^{00}(Q).$$

Muchas veces se identifica a la distribución T por la función f que la genera, así al hablar de $T_f(\theta) = \langle f, \theta \rangle$; podemos también hablar de la distribución f. De este modo al definir la derivada de $T, \frac{\partial T}{\partial x_k}$, podemos simbólicamente representarla también por:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \theta \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle \forall \theta \in C_c^{00}(Q).$$

Esto podría interpretarse de la siguiente manera, si $T_f(\theta) = \langle f, \theta \rangle$ entonces

$$\frac{\partial T_f(\theta)}{\partial x_k} = -\langle f, \theta' \rangle = H_f(\theta') = \langle -f, \theta' \rangle = \langle g, \theta \rangle = H_g(\theta):$$

g es la derivada de f en el sentido de la distribución. Supongamos que f es clásicamente diferenciable sobre Q, entonces:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \theta \right\rangle = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \theta(x)\,dx = f(x)\theta(x)\Big|_{\partial(Q)} - \int_Q f \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\,dx =$$

$$- \int_Q f \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\,dx = -\left\langle f, \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle .$$

Como se ve la derivada en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada clásica de f.

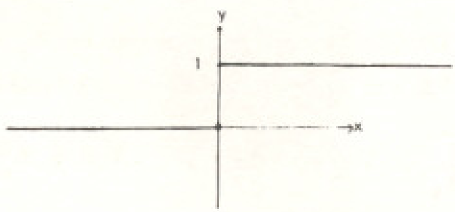
para el caso de derivadas de orden $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ de $T \in D'(Q)$, se sigue por inducción que $\langle \partial^\alpha f, \theta \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \theta \rangle, \forall \theta \in C_c^{00}(Q)$,

lo que nos permite obtener la derivada parcial de cualquier orden de una función sin necesidad de pasar por las derivadas sucesivas. Esta propiedad es importante, sobre todo para el caso de funciones clásicamente diferenciales.

Un ejemplo muy útil, en el caso de derivadas, se presenta con la derivada generalizada de función de Heaviside. Esta función está definida por la expresión:

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y cuya representación gráfica es:



Sea $\theta(x) \in C_c^{00}(Q)\ ;\ Q \subset R$, entonces se define la distribución

$H_y(\theta) = \langle y, \theta \rangle$. La derivada en el sentido de la distribución

$$\frac{d\ H_y(\theta)}{dx} = - \langle y(x), \theta'(x) \rangle$$

$$= -\int_{-00}^{00} y(x)\theta'(x)\,dx = -\left(\int_{0}^{00} y(x)\theta'(x)\,dx + \int_{-00}^{0} y(x)\theta'(x)\,dx\right)$$

pero $\displaystyle\int_{0}^{00} y(x)\theta'(x)\,dx = \int_{0}^{00} \theta'(x)\,dx = \lim_{b \to 00} \theta(x) \Big]_0^b \lim_{b \to 00}$

$(\theta(b) - \theta(0)) = -\theta(0)$

y $\displaystyle\int_{-00}^{0} y(x)\theta'(x)\,dx = \int_{-00}^{0} 0.\theta'(x)\,dx = 0$

$$\therefore -\int_{-00}^{00} y(x)\theta'(x)\,dx = -\left(-\theta(0)\right) = \theta(0) = \delta_0(\theta)$$

De donde concluiremos que la derivada, en el sentido de la distribución de la función de Heaviside es la distribución delta de Dirac.

Explotemos un tanto más el caso de la función de Heaviside. Analizaremos lo que ocurre en el punto X=0, con la derivada generalizada. Denotemos por $[Y'(x)]$ su derivada y por Jo su salto en la discontinuidad. La acotación de la derivada clásica en $R - \{0\}$ garantiza que ella genere una distribución aquí.

$$\frac{d\ H_y(\theta)}{dx} = - \langle y(x),\ \theta'(x) \rangle = -\int_{-00}^{00} y(x)\,\frac{d\theta}{dx}\,dx = -$$

$$\int_{-00}^{0} y(x)\frac{d\theta}{dx}\,dx + \int_{0}^{00} y(x)\frac{d\theta}{dx}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} y(x)\ \frac{d\theta}{dx}dx = \lim_{b \to \infty} \left[y(x)\ \theta(x) - \int \left[y'(x)\right] \theta(x)dx \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (y(b)\ \theta(b)) - \int_0^{\infty} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx - y(x+0)\theta(0)$$

$$= - \int_0^{\infty} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx - y(x+0)\ \theta(0)$$

$$y \int_{-\infty}^{0} y(x)\frac{d\theta}{dx}\ dx = \lim_{b \to -\infty} \left[y(x)\ \theta(x) - \int \left[y'(x)\right] \theta(x)dx \right]_b^0$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \left[y(x - 0)\ \theta(0) - \int_b^0 \left[y'(x)\right]\theta(x)dx - \cancelto{0}{y(b)}\theta(b) \right.$$

$$= y(x - 0)\theta(0) - \int_{-\infty}^{0} \left[y'(x)\right]\theta(x)dx$$

$$\frac{d\ H_y(\theta)}{dx} = - \langle y(x),\ \theta'(x)\rangle = -\Big(-\int_0^{\infty} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx$$

$$- y(x + 0)\theta(0) \qquad + y(x - 0)\theta(0) - \int_{-\infty}^{0} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx\Big)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx + y(x + 0)\theta(0) - y(x - 0)\theta(0) +$$

$$\int_{-\infty}^{0} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx$$

$$\frac{d\ H_y(\theta)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[y'(x)\right] \theta(x)dx + \theta(0) \left[y(x + 0) - y(x - 0)\right] \qquad \frac{d\ H_y(\theta)}{dx} = \langle y'(x),\ \theta(x)\rangle - \delta_0(\theta) J_0$$

Este resultado podríamos interpretarlo diciendo que la derivada en el sentido de las distribuciones, de la función Y(x) es igual a la derivada clásica más la función delta en el punto de discontinuidad, por el salto en dicho punto. Observe que donde la función es continua Jo = 0 y, la derivada generalizada coincide con la derivada clásica. Donde es discontinua la clásica no existe y el salto Jo = 1 y, la derivada generalizada será So (θ).

Conclusión

Hay un compromiso no escrito entre las diferentes áreas del saber y la Matemática, de tal modo que cualquier nuevo resultado en ésta, se proyecta al campo de las ciencias del mismo modo que cualquier respuesta a los problemas en las áreas no se hace a expensas de la Matemática, de aquí que el papel del matemático se ha tenido que ir conduciendo en estas dos vertientes. En todo caso, la tendencia ha sido la generalización que hemos estudiado, un tema que tuvo su origen en la Física y que la Matemática se ha encargado de sistematizar.

Indudablemente que las funciones generalizadas y las operaciones que sobre ellas se han estudiado fueron en gran medida una ayuda para el planteo y solución a problemas tales como:

a) Cálculo de las respuestas al impulso en sistema de tiempo continuo.

b) Convulsión del impulso con sistemas variables en el tiempo. En este aspecto hay que destacar el uso que de las funciones generalizadas se ha hecho para resolver ecuaciones diferenciales parciales, dado que ha sido el área de aplicación que más ha estimado la sistematización y desarrollo de las funciones generalizadas.