CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIII, Número 2
Abril - Junio 1988

FORMAS DIFERENTES DE OBTENER LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

FELIX LARA

Introducción

El trabajo expuesto más adelante consta de cuatro tópicos fundamentales; tres de los cuales son métodos diferentes de obtener las transformacines de Lorentz y el otro tópico es sobre una forma más general de expresar dichas transformaciones: La forma Vectorial.

Los tres métodos explicados en este trabajo son:

1. La Deducción de las transformaciones de Lorentz usando los Postulados de Einstein.

2. El método del Intervalo Espacio-Tiempo.

3. El método del coeficiente "K".

Cada método tiene sus particularidades las cuales se pueden inferir de la exposición de los mismos.

1. Las transformaciones de Lorentz como una consecuencia de los postulados de Einstein

Para obtener las transformaciones de Lorentz vamos a partir de los siguientes postulados:

1) La uniformidad del tiempo y el Espacio; es decir que para los sistemas inerciales las leyes de la Física son las mismas en todos los puntos del Espacio y en todos los instantes de tiempo.

2) La Isotropía del Espacio: Para los sistmas inerciales las leyes de la Física son las mismas en todas las direcciones.

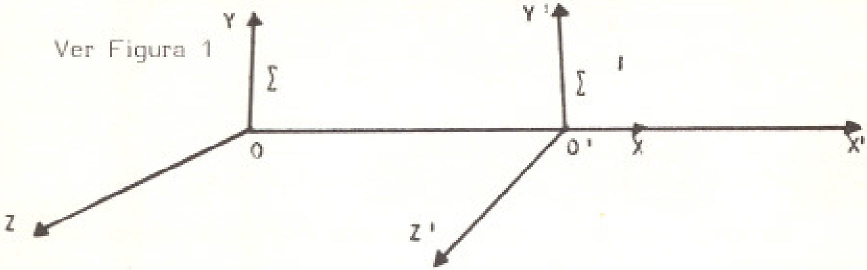
3) El principio de la Relatividad: Todos los sistemas inerciales son equivalentes.

4) La velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas inerciales.

Supongamos que queremos estudiar el movimiento de una partícula desde dos sistemas de coordenadas Σ y Σ', los cuales se mueven con velocidad constante relativa $\vec{v}$, uno con respecto al otro.

Para mayor comodidad vamos a considerar el caso particular consistente en que el movimiento de Σ con respecto a Σ' se realiza sobre un eje común, digamos el eje de las X.

Ver Figura 1



Vamos a investigar cuál es la relación existente entre las coordenadas de la partícula en movimiento según Σ y según Σ'. Es bueno aclarar que para mayor generalidad cuando se habla de coordenadas se debe incluir el tiempo, ya que en las transformaciones que buscamos no podemos suponer que éste es el mismo para todos los sistemas inerciales.

Según lo dicho anteriormente vamos a buscar relaciones de la forma:

$$X' = \phi_1 (X, Y, Z, t) \quad , \quad Y' = \phi_2 (X, Y, Z, t)$$

$$Z' = \phi_3 (X, Y, Z, t) \quad , \quad t' = \phi_4 (X, Y, Z, t)$$

Está claro que habremos encontrado las transformaciones buscadas cuando encontremos las expresiones de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4. Para esto vamos a usar los postulados antes mencionados. Veamos.

Consideremos, por ejemplo el diferencial total de X':

$$dX' = \frac{\partial \phi_1}{\partial X} dX + \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} dY + \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} dZ + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dt$$

Pero según el postulado relativo a la uniformidad del tiempo y del Espacio, las derivadas parciales $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial X}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial Y}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial Z}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial t}$, deben ser las mismas en cada punto del Espacio y en cada instante de tiempo, ya que las transformaciones buscadas son leyes de la Física, por lo que dichas leyes no deben depender del lugar ni del tiempo en que se consideren. O dicho de otra manera $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial X}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial Y}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial Z}$, $\frac{\partial \emptyset_1}{\partial t}$, no deben depender de las coordenadas X, Y, Z, t. Es decir que deben ser constantes.

Por tal motivo pongamos, por ejemplo:

$$\frac{\partial \emptyset_1}{\partial X} = \alpha_1 \ , \ \frac{\partial \emptyset}{\partial Y} = \alpha_2 \ , \ \frac{\partial \emptyset_1}{\partial Z} = \alpha_3 \ , \ \frac{\partial \emptyset_1}{\partial t} = \alpha_4$$

ó $\quad d X' = \alpha_1 dx + \alpha_2 dY + \alpha_3 dZ + \alpha_4 dt$

Integrando la expresión anterior, tenemos:

$$X' = \emptyset_1 (X, Y, Z, t) = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 t + \alpha_5.$$

Es decir que $\emptyset$ (X, Y, Z, t) es una función lineal de sus argumentos.

De forma semejante se podrían obtener expresiones similares para Y', Z', t':

$$\begin{aligned} Y' &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \beta_4 t + \beta_5 \\ Z' &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z + \gamma_4 t + \gamma_5 \\ t' &= \mu_1 X + \mu_2 Y + \mu_3 Z + \mu_4 t + \mu_5 \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores los términos independientes se pueden evaluar si suponemos que en el instante t = 0, ambos sistemas de coordenadas coinciden, es decir que: X = Y = Z = 0; X' = Y' = t' = 0 por lo que si sustituimos estos valores en las expresiones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 t \\ Y' &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \beta_4 t \\ Z' &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z + \gamma_4 t \\ t' &= \mu_1 X + \mu_2 Y + \mu_3 Z + \mu_4 t \end{aligned}$$

Donde los coeficientes α_i, β_i, γ, μ_i son coeficientes que debemos determinar. Para esto vamos a considerar primero las transformaciones correspondientes a Y' y Z':

Como el movimiento es en el eje X, si Y = 0, Z = 0 se tiene que Y' = 0, Z' = 0. Sustituyendo esto en las expresiones anteriores correspondientes a Y' y Z', tenemos:

$$0 = \beta_1 X + \beta_3 Z + \beta_4 t$$
$$0 = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_4 t$$

Pero como estas relaciones deben de ser ciertas para todo X, Y, Z, y t se tiene:

$$\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad ; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$$

Luego las expresiones buscadas para Y' y Z' son de la forma:

$$Y' = \beta_2 Y \quad , \quad Z' = \gamma_3 Z$$

Donde los coeficientes β_2 y γ_3 indican las veces que las magnitudes medidas en Σ' son mayores que las medidas en Σ.

Pero según el principio de la relatividad:

$$Y = \beta_2 Y' \quad , \quad Z = \gamma_3 Z'$$

Combinando las relaciones anteriores se obtiene:

$$\beta_2^2 = 1 \qquad , \gamma_3^2 = 1 \qquad \text{ó} \qquad \beta_2 = \gamma_3 = 1$$

Está claro que los valores negativos se excluyen debido a la elección de Y, Y', Z, Z'.

Luego: Y' = Y , Z' = Z

Veamos, ahora, cómo se obtienen las transformaciones para X y t: Según el análisis anterior en las expresiones:

$$X' = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 t$$
$$t' = \mu_1 X + \mu_2 Y + \mu_3 Z + \mu_4 t$$

No deben de estar Y ni Z, lo que significa que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

Es decir que:

$$X' = \alpha_1 X + \alpha_4 t \qquad (1)$$
$$t' = \mu_1 X + \mu_4 t \qquad (2)$$

Usando la relación (1) y suponiendo que en un instante dado se quiere estudiar el movimiento del origen de con respecto a se tiene que X' = 0, X = v t; luego sustituyendo estos valores en (1), tenemos: $0 = \alpha_1 vt + \alpha_y t \quad ó \quad \alpha_y = -\alpha_1 v$

Luego sustituyendo el valor de α_y obtenido en la relación (1) tenemos:

$$X' = \alpha_1 X - \alpha_1 vt = \alpha_1 (X - vt) \quad (2)$$

Una expresión similar se obtendría si se estudia el movimiento del origen de Σ respecto a Σ'. $X = \alpha_1' (X' + vt')$

Vamos a ver qué relación existe entre los coeficientes α_1 y α_1'

Para esto supongamos que en el sistema Σ' tenemos una regla de longitud L = $X'_2 - X'_1$, en reposo. Veamos qué longitud tendrá dicha regla según el sistema Σ.

Los puntos X'_1, X'_2 que determinan la longitud de la regla en Σ corresponden a los puntos X_1, X_2 medidas en el tiempo t = t según el sistema Σ. Luego usando la fórmula (2)

$$X'_1 = \alpha_1 (X_1 - vt), \quad X'_2 = \alpha_1 (X_2 - vt)$$

$$ó \quad X'_2 - X'_1 = \alpha_1 (X_2 - X_1), \quad X_2 - X_1 = L/\alpha_1$$

de manera similar se tendrá: $X'_2 - X'_1 = L/\alpha_1'$

Claro que según el principio de la relatividad se tiene que:

$$L/\alpha_1 = L/\alpha_1' \quad ó \quad \alpha_1 = \alpha_1'$$

Es decir que $X' = \alpha_1 (X - vt), \quad X = \alpha_1 (X' + vt') \quad (3)$

Vamos a encontrar ahora el valor de α_1. Para esto vamos a considerar que en los instantes t = t' = 0, cuando Σ y Σ' coinciden se envían señales de luz. Como la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas inerciales se tiene que la distancia recorrida por dichas señales según ambos sisemas de coordenadas es: X = ct , X' = ct' luego sustituyendo estos valores en (3), tenemos:

$$\begin{aligned} Ct' &= \alpha_1 (C - v)\, t \\ Ct &= \alpha_1 (C + v)\, t' \\ ó \quad C^2 t' t &= \alpha_1^2 (C^2 - v^2)\, t' t \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

Luego $$X' = \frac{X - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por otra parte sustituyendo

tenemos: $X' = \alpha_1 (X - vt)$ en $X = \alpha_1 (X' + vt')$,

$$X = \alpha_1 x' + \alpha_1 vt = \alpha_1^2 X - \alpha_1^2 vt + \alpha_1 vt'$$

de donde:

$$t' = \frac{X(1 - \alpha_1^2) + \alpha_1^2 vt}{\alpha_1 v} = \frac{\alpha_1 [(1/\alpha_1^2 - 1) X + vt]}{v}$$

$$ó\ t' = \frac{\alpha_1 [(1 - v^2/c^2 - 1) X + vt]}{v} = \frac{\alpha_1 (vt - v^2/c^2 X)}{v}$$

$$= \frac{t - v/c^2 X}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Es decir, que las transformaciones buscadas son:

$$X' = \Gamma (X - vt), \quad Y' = Y, \quad Z' = Z, \quad t' = \Gamma (t - v/c^2 X)$$

donde $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Observación: Si $v \ll C$ entonces $v^2/c^2 \longrightarrow 0$ y las transformaciones obtenidas se convierten en las transformaciones de Galileo: $X' = X - vt$, $Y' = Y$, $Z' = Z$, $t' = t$.

Es decir que las transformaciones de Galileo usadas en la Física clásica son un caso particular de las transformaciones de Lorentz.

2. Las Transformaciones de Lorentz como una consecuencia de la Invariabilidad del intervalo Espacio-Tiempo

a) Definición de Intervalo Espacio-Tiempo.

Supongamos que según el sistema Σ, en el instante t_1 se emite una señal de luz desde el punto $p_1(X_1, Y_1, Z_1)$ al punto $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, se tiene que dicha señal recorre la distancia:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Pero también como dicha señal viaja a la velocidad de la luz durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se tiene que la distancia recorrida es $d = C(t_2 - t_1)$.

Combinando las relaciones anteriores se tiene:

$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

$$ó\ c^2 (t_2 - t_1)^2 - (X_2 - X_1)^2 - (Y_2 - Y_1)^2 - (Z_2 - Z_1)^2 = 0 \quad (1)$$

Está claro que una expresión similar se obtiene si se estudian los sucesos anteriores desde el sistema Σ', el cual se mueve con una velocidad $\vec{v}$ respecto al sistema Σ. Es decir que:

$$c^2(t'_2-t'_1)^2 - (X'_2-X'_1)^2 - (Y'_2-Y'_1)^2 - (Z'_2-Z'_1)^2 = 0 \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se llaman cuadrados de los intervalos Espacio-Tiempo para los sucesos indicados, con respecto a los sistemas de coordenadas Σ y Σ' respectivamente.

b) Invarianza del Intervalo Espacio-Tiempo entre sucesos.

Si las expresiones antes mencionadas se representan por S^2_{12} y S'^2_{12}, respectivamente, se tiene:

$$S^2_{12} = 0 \quad , \; S'^2_{12} = 0, \; ó \quad S^2_{12} = S'^2_{12}$$

Surge la siguiente pregunta: ¿Se mantendrá la igualdad anterior para cualquier otro par de sucesos que no sean enviar y recibir señales de Luz?

Para contestar la pregunta anterior, supongamos que los sucesos a considerar ocurren en puntos e instantes infinitamente cercanos, es decir que: $X_2-X_1 = dX$, $Y_2-Y_1 = dY$, $Z_2-Z_1 = dZ$, $t_2-t_1 = dt$. De esta manera las expresiones (1) y (2) transforman en: $ds^2 = V^2dt^2-dX^2-dY^2-dt^2$, $dS'^2 = C^2dt'^2-dX'^2-dZ'^2$

Como debe de cumplirse que cualquier relación entre dS^2 y dS'^2 debe satisfacer el hecho de que si $dS^2 = 0$ se tiene $dS'^2 = 0$, vamos a suponer que los intervalos están relacionados por la fórmula:

$$dS^2 = a dS'^2 \quad (3)$$

Donde "a" no puede depender del tiempo t ni de las coordenadas X,Y,Z, ya que en este caso se violaría el postulado de la uniformidad del tiempo y el Espacio. De lo anteriormente dicho se desprende que el coeficiente "a" puede depender solamente del módulo de la velocidad relativa entre Σ y Σ'. Para ver si esto es cierto vamos a hacer las siguientes consideraciones:

Supongamos la existencia de un tercer sistema de coordenadas Σ'' y definamos las siguientes Velocidades relativas entre los tres sistemas considerados:

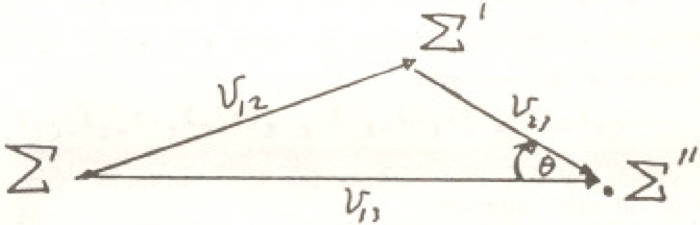
V_{12} el módulo de la velocidad de Σ' con respecto a Σ. V_{13} el módulo de la velocidad de Σ'' con respecto a Σ. V_{23} el módulo de la velocidad de Σ'' con respecto a Σ', luego usando (3) se tienen las siguientes relaciones:

$$dS^2 = a\,(V_{12})\,dS'^2$$
$$dS^2 = a\,(V_{13})\,dS''^2$$
$$dS'^2 = a\,(V_{23})\,dS''^2$$

Combinando las relaciones anteriores se tiene:

$$a(V_{12}) = \frac{a(V_{13})}{a(V_{23})} \qquad (4)$$

Si se usa el diagrama siguiente:



nos damos cuenta de si V_{12} depende de V_{13} y de V_{23} esto implica que V_{12} depende no solamente de los módulos de V_{13} y V_{23}, sino que depende también del ángulo entre dichos vectores. Pero como dicho ángulo no entra en la relación (4), esta relación solamente puede ser válida si los coeficientes "a" no dependen de los módulos de las Velocidades relativas consideradas.

Es decir que son constantes. Por lo que se tiene que a = 1, o $dS^2 = dS'^2$.

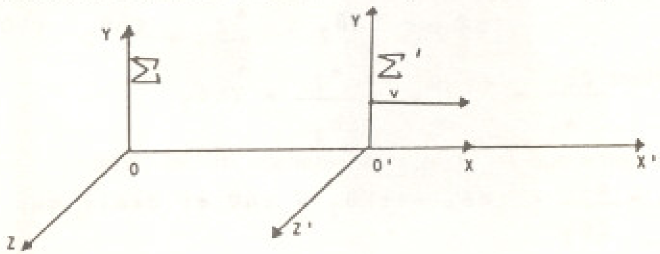
Lo que significa que $dS = dS'$ o también que $S = S' +$ constante pero si $S = 0$, $S' = 0$, se tiene que la constante es nula. Luego:

$$S = S'$$

Es decir que el intervalo Espacio-Tiempo entre sucesos es invariante.

c) Obtención de las transformaciones de Lorentz.

Para más facilidad supongamos que el sistema de coordenadas Σ' se mueve con respecto al sistema Σ según esquema siguiente:



Supongamos, además, que en (1) y (2) se tiene:

$t_1=0,\ X_1=0, Y_1=0, Z_1=0;\quad t'_1=0,\ X'_1=0, Y'_1=0,\ Z'_1=0$

$t_2=t,\ X_2=X,\ Y_2=Y, Z_2=Z,\ t'_2=t',\ X'_2=X',\ Y'_2=Y'_1, Z'_2=Z$

De manera que:

$$S^2=C^2t^2-X^2-Y^2-Z^2=C^2t'^2-X'^2-Y'^2-Z'^2=S'^2$$

Pero según el método anterior se tiene: $Y=Y'\ ,\quad Z=Z'$

De donde se obtiene que:

$$Ct^2-X^2=C^2t'^2-X'^2 \text{ ó } X'^2-C^2t'^2=X^2-Ct^2 \quad (5)$$

Vamos, ahora, a encontrar las transformaciones que satisfacen la relación anterior:

Para esto vamos a tener presente, según el método anterior, que las transformaciones para X' y t' serán lineales:

$$X'=a_1X+a_2t$$
$$t'=b_1X+b_2t$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la relación (5), tenemos:

$$X'^2-C^2t'^2=(a_1X+a_2t)^2-C^2(b_1X+b_2t)^2=$$
$$a_1^2X^2+2a_1a_2Xt+a_2^2t^2-C^2b_1^2X^2-2C^2b_1b_2Xt-C^2b_2^2t^2$$
$$=X^2-C^2t^2$$

De donde se obtiene: $a_1^2-C^2b_1^2=1 \quad (6)$

$$a_2^2-C^2b_2^2=-C^2 \text{ ó } b_2^2-\left(\frac{a_2}{C}\right)^2=1 \quad (7)$$

$$a_1a_2-C^2b_1b_2=0 \quad (8)$$

Como se podrá notar las relaciones (6) y (7) también se satisfacen si ponemos: $a_1=Ch\theta_1\ ,\quad Cb_1=Sh\theta_1 \quad (9)$

$$b_2=Ch\theta_2\ ,\quad \frac{a_2}{C}=Sh\theta_2 \quad (10)$$

ó también: $\dfrac{Cb_1}{a_1}=th\theta_1\ ;\ \dfrac{a_2}{Cb_2}=th\theta_2$

Pero si tomamos en cuenta la relación (8) se tiene:

$\dfrac{Cb_1}{a_1}=\dfrac{a_2}{Cb_2}=th\theta_1=th\theta_2=th\theta$ es decir que $\theta_1=\theta_2$

De donde usando las relaciones (9) y (10) se desprende que:

$$a_1 = ch\theta \ , \quad a_2 = CSh\theta \quad , \quad b_2 = Ch\theta \ , \quad b_1 = \frac{Sh\theta}{C}$$

Luego sustituyendo estos valores en las fórmulas:

$$X' = a_1 X + a_2 t$$

$$t' = b_1 X + b_2 t$$

Tenemos:

$$X' = XCh\theta + CtSh\theta \qquad (11)$$

$$t' = X\frac{Sh\theta}{C} + tCh\theta \qquad (12)$$

Ahora bien si hacemos X' = 0 se tiene que usando la relación (11) X = vt, lo cual nos permite encontrar a thθ, veamos:

$$0 = vtCh\theta + CtSh\theta = VCh\theta + CSh\theta \text{, de donde } th\theta = -\frac{V}{C}$$

Teniendo el valor de la thθ podemos expresar los valores de Sh y Ch en función de ésta. Esto lo hacemos usando las relaciones conocidas de las Funciones Hiperbólicas:

$$Ch\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\theta}} \ , \quad Sh\theta = Ch\theta th\theta \text{, es decir que:}$$

$$Ch\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \ , \quad Sh\theta = \frac{-v/C}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

Luego sustituyendo estos valores en las fórmulas (11) y (12) se tiene:

$$X' = \frac{X - vt}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \ , \quad t' = \frac{t - v/C^2 X}{\sqrt{1 - v/c^2}}$$

Es decir que las transformaciones halladas son:

$$X' = \Gamma(X - vt), \ Y' = Y, \ Z' = Z, \ t' = \Gamma(t - v/C^2 X)$$

Donde

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

3. El método del Coeficiente "K"

Este método se basa en el hecho experimental consistente en que si dos observadores se mueven uno con respecto al otro con una Velocidad Relativa $\vec{V}$, y uno de ellos envía dos señales consecutivas de luz con un intervalo de tiempo T, entonces el observador que recibe dichas señales las recibirá con un intervalo de tiempo KT.

Donde "K" es un coeficiente que depende solamente de V. Puesto que si "K" dependiera de la posición, la dirección o del tiempo en que los observadores envían y reciben las señales esto estaría en contraposición con las propiedades atribuidas al Espacio y al tiempo: La Uniformidad y la Isotropía del Espacio así como la uniformidad del tiempo.

Veamos, ahora cómo se calculó "K" para una $\vec{V}$ dada entre dos observadores en movimiento:

Supongamos que A y A' se mueven con una Velocidad Relativa V. Se puede suponer que en el instante $t_0 = 0$ ambos observadores coinciden y que además en dicho instante A le envía una señal a A'. Si luego en el instante t_1 A le envía otra señal a A', se tiene que A ha enviado dos señales en un intervalo de tiempo $T = t_1 - t_0 = t_1$ y A' recibirá dichas señales con un intervalo $T' = Kt_1$, pero si A' dispone de algún medio (un espejo por ejemplo) para reflejar dichas señales, éstas volverán a A con un intervalo $t_2 = KT^2$, donde t_2 es el instante en que A recibe la señal reflejada por A'.

Basándonos en el análisis anterior y en el postulado de la velocidad de la luz, se tiene que la distancia recorrida por la luz para llegar a A' según A es:

$$x = \frac{1}{2} C \, (t_2 - t_1)$$

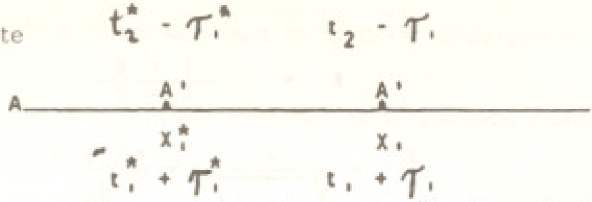
o también $$x = \frac{1}{2} C \, (K^2T-T) = \frac{1}{2} CT \, (K^2 - 1).$$

Por otro lado, supongamos que en el instante t_1 A envía una señal hasta el observador A' si dicha señal llega a A' cuando A' está en la posición X_1^* se tendrá que según A, este suceso ha ocurrido en el instante $t_1^* + T_1^*$, donde T_1^*, es el tiempo usado por la señal en alcanzar a A'. Lo mismo ocurrirá si la señal es enviada por A en el instante $t_1^* > t_1^*$, llegando dicha señal a la posición X_1 ocupada por A en el instante $t_1 + T_1$, donde T_1 es el tiempo usado por la señal en alcanzar a A'.

Supongamos, además, que cada vez que una señal alcanza a A' se refleja de nuevo hacia A. Se tiene que la señal enviada en el instante t_1^* regresa en el instante t_2^* y la señal enviada en el t_1 regresa en el t_2.

Se podría encontrar el tiempo en que (según A) A' se mueve de la posición X_1^* a la posición X_1.

Veamos el siguiente diagrama:



Como se ve en el diagrama en el instante $t_2^* - T_1$, A' debe de ocupar la posición X_1^* (según A); y en el $t_2 - T_1$, A' debe de ocupar la posición X_1 (también según A).

Siguiendo el análisis anterior se tiene que el tiempo "t" usado por A' en moverse de la posición X_1^* a la X_1 es:

$$t = (t_1 + \tau_1) - (t_1^* + \tau_1^*) \quad (1)$$

$$t = (t_2 - \tau_1) - (t_2^* - \tau_1^*) \quad (2)$$

Sumando las dos expresiones anteriores se tiene:

$$2t = t_1 + t_2 - t_1^* - t_2^* = (t_1 - t_1^*) + (t_2 - t_2^*)$$

Pero como $T = t_1 - t_1^*$, $t_2 - t_2^* = K^2 T$, tenemos:

$$2t = T + K^2 T$$

ó $$t = \frac{1}{2} T(K^2 + 1)$$

Ahora bien si $t_1^* = 0$, $t_2^* = 0$ se tiene que $X_1^* = 0$ y $\tau_1^* = 0$, es decir que:

$$T = t_1 \ ; \ K^2 T = t_2 \ , \ X = X_1 - X_1^* = X_1$$

o que $$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

De todo lo anterior se concluye que según A, A' recorre la distancia $X = \frac{1}{2} C(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} CT(K^2 - 1)$ en el tiempo

$$t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1) = \frac{1}{2} T(K^2 + 1).$$

Luego la Velocidad de A' con respecto a A será:

$$V = \frac{X}{t} = \frac{\frac{1}{2} CT(K^2 - 1)}{\frac{1}{2} T(K^2 + 1)} = \frac{C(K^2 - 1)}{K^2 + 1}$$

ó $$\frac{V}{C} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} = B$$

de la expresión anterior se puede despejar a K:

$$K = \frac{1 + B}{1 - B}$$

Veamos además, otras fórmulas que luego vamos a necesitar:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{K^2 + 1}{2K}$$

$$\Gamma B = \frac{K^2+1}{2K} \cdot \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} = \frac{K^2 - 1}{2K}$$

Observación: el método del coeficiente "K" se puede usar para obtener las principales consecuencias de los postulados de la teoría de la relatividad, pero nosotros lo vamos a usar para obtener solamente las transformaciones de Lorentz. Veamos:

Supongamos que se estudia el movimiento de una partícula "P" desde los sistemas de coordenadas Σ y Σ' los cuales se mueven con velocidad relativa v en la dirección del eje X.

Supongamos, además que "P" también se mueve en dicho eje y que las señales que Σ envía a "P" pasan, primero por Σ' siguiendo hacia "P". Pero luego que llegan a "P" se reflejan hacia Σ pasando primero por Σ'. Si en un instante dado "t," se envía una señal hacia "P" ésta pasará por Σ' en el instante t, y seguirá hacia "P" luego vendrá de vuelta pasando por Σ' en el instante t'_2 y finalmente llegará a Σ en el t_2.

De lo dicho anteriormente se tiene que:

Según : $X = \frac{1}{2} C(t_2 - t_1)$, $t = \frac{1}{2} (t_2 + t_1)$ (3)

Donde X es la distancia del origen a "P"

t es el tiempo en que "P" recorre la distancia X

t_1 es el instante en que Σ envía una señal hacia "P"

t_2 es el instante en que Σ recibe la señal enviada a "P".

De forma semejante se tendría según Σ':

$$X' = \frac{1}{2} C(t'_2 - t'_1) \quad , \quad t' = \frac{1}{2} (t'_2 + t'_1) \quad (4)$$

Usando las relaciones (3) y (4) se pueden despejar los valores de t_1, t_2, t'_1, t'_2: $t_1 = t - \frac{X}{C}$, $t_2 = t + \frac{X}{C}$

$$t'_1 = t' - \frac{X'}{C} \quad , \quad t'_2 = t' + \frac{X'}{C}$$

Por otro lado según la definición de "K" se tiene:

$$t'_1 = Kt_1 , \quad t_2 = Kt'_2$$

Es decir que:

$$t' - \frac{x'}{c} = Kt_1 = K(t - \frac{x}{c}) \qquad (5)$$

$$t + \frac{x}{c} = Kt'_2 = K(t' + \frac{x'}{c}) \qquad (6)$$

Pero multiplicando (5) y (6) de manera cruzada:

$$K\,(t' - \frac{x'}{c})\;(t' + \frac{x'}{c}) = K(t - \frac{x}{c})\;(t + \frac{x}{c})$$

$$\text{ó} \quad t'^2 - \frac{x'^2}{c^2} = t^2 - \frac{x^2}{c^2}$$

Que es lo mismo que $x^2 - c^2 t^2$ es invariante.

Ahora bien, si se usan de nuevo las expresiones (5) y (6) se tiene:

$$t' - \frac{x'}{c} = K\,(t - \frac{x}{c})$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{K}\,(t + \frac{x}{c})$$

Por lo que sumando las fórmulas anteriores se obtiene:

$$t' = \frac{K^2 + 1}{2K}\,t - \frac{K^2 - 1}{2Kc}\,x = \Gamma t - \Gamma \beta\,\frac{x}{c}$$

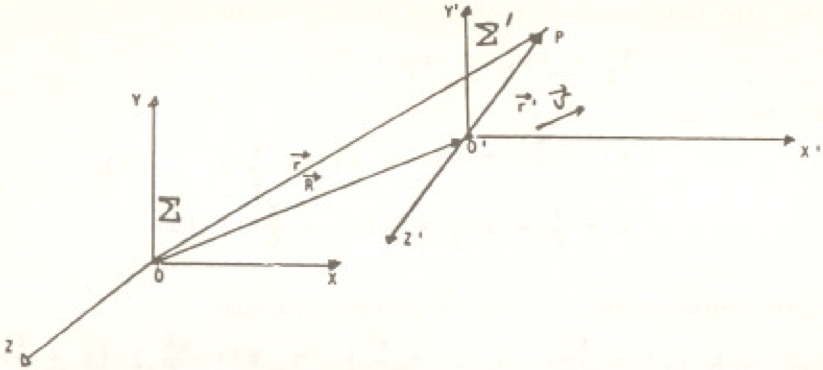
$$\text{ó} \quad t' = \Gamma(t - \frac{v}{c^2}\,x)$$

De forma similar se tendría que:

$$x' = \Gamma(x - v\,t)$$

4. A modo de apéndice:
Las transformaciones de Lorentz en forma Vectorial

Supongamos que desde los sistemas de coordenadas Σ y Σ' se quiere estudiar el movimiento de una partícula según el siguiente diagrama:



Aquí se tiene que:

$\vec{r}$ es el Vector posición de la partícula según Σ.
$\vec{r}\,'$ es el Vector posición de la partícula según Σ'.
$\vec{R}$ es el Vector posición del origen de Σ' según Σ.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Para aplicar los resultados obtenidos anteriormente vamos a descomponer $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ en dos componentes:

Una paralela a $\vec{R}$ y otra perpendicular a $\vec{R}$.

Es decir que: $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$; $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'_{\parallel} + \vec{r}\,'_{\perp}$

Donde:

$\vec{r}_{\parallel}$, $\vec{r}\,'_{\parallel}$ son los componentes paralelos a $\vec{R}$.

$\vec{r}_{\perp}$, $\vec{r}_{-}$ son los componentes perpendiculares a $\vec{R}$.

Entonces según las fórmulas obtenidas se tendría que:

$$\vec{r}\,'_{\parallel} = \Gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t),\ \vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r}_{\perp},\ t' = \Gamma\left(t - \frac{\vec{r}_{\parallel}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \quad (1)$$

pero como: $\vec{r}\cdot\vec{v} = (\vec{r}\vec{v}) = (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp})\cdot\vec{v} = \vec{r}_{\parallel}\cdot\vec{v}$ (2)

ó $\vec{r}_{\parallel}\cdot\vec{v} = r_{\parallel}v$ de donde $r_{\parallel} = \frac{(\vec{r}_{\parallel}\vec{v})}{v} = \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v}$

o, también $\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r}_{\parallel}\vec{v})}{v^2}\vec{v} = \frac{(\vec{r}\vec{v})}{v^2}\vec{v}$ (3)

Se tiene: $\vec{r}\,' = (\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}\,t) + \vec{r}\,'_{\perp}$

ó, $\vec{r}\,' = \Gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}\,t) + \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - \Gamma\vec{v}\,t + (\Gamma-1)\,\vec{r}_{\parallel}$

También usando (3) se puede poner: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \Gamma\vec{v}\,t + (\Gamma-1)\,\dfrac{(\vec{r}\,\vec{v})}{v^2}\,\vec{v}$

De forma semejante: $t' = \Gamma\left[t - \dfrac{(\vec{r}\,\vec{v})}{c^2}\right]$

Las cuales son las transformaciones buscadas.