CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XV, Número 1
Enero - Marzo 1990

EL USO DEL ALGEBRA MATRICIAL EN LA INGENIERIA

DANIEL COMARAZAMY*

Durante mucho tiempo se consideró que el álgebra de matrices era una de las herramientas más poderosas con que contaba el ingeniero, pero que dada la complejidad de sus operaciones, resultaba muy difícil su puesta en operación, especialmente cuando el orden de la matriz aumentaba considerablemente como ocurre en muchos casos de la ingeniería de estructuras.

Sin embargo, hoy día con el advenimiento del computador, los ingenieros hemos tenido que desempolvar y repasar, una y otra vez, esta importante rama de las matemáticas.

Gracias a este formidable instrumento, encontrar la determinante de una matriz de 40 x 40, su inversión, trasposición, multiplicación, solución y demás operaciones del álgebra ordinaria, son tareas realmente sencillas y rutinarias.

En estas breves cuartillas trataremos de demostrar la validez de nuestra aseveración tomando como ejemplo la creación de los

* Carrera de Ingeniería Civil. INTEC.

momentos del área y sus consecuentes transformaciones ocasionadas por rotaciones y/o traslaciones de los ejes.

A pesar de que en este estudio sólo nos limitaremos a esta parte de la mecánica de sólidos, es bueno apuntar que las ecuaciones matriciales y las consecuentes transformaciones, que trataremos de explicar en lo que sigue, son aplicables a otros campos de la ingeniería tales como la Teoría de Elasticidad, la Ingeniería de Estructuras, Topografía, Agrimensura, Hidráulica, Vial, etc...

Para empezar debemos recordar que para poder efectuar el producto de dos vectores cualesquiera, uno de los dos, el multiplicador y el multiplicando, debe estar de forma transpuesta, de la siguiente manera:

$\{p\}^T\{q\}$ o $\{p\}\{q\}^T$, obviamente en el primer caso el resultado es un escalar, pero en el segundo se trata de una matriz.

Ahora bien, si el vector en cuestión se multiplica por sí mismo, en el primer caso obtendríamos la magnitud del vector, pero en el segundo caso formaríamos una matriz llamada la 'diádica' del vector.

Imaginemos un área infinitesimal (dA) contenida en el plano X-Y e identificada por las coordenadas de posición (x,y) las cuales pudiéramos expresar mediante el vector,

$$\{p\} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

si construimos la diádica de este vector posicional, obtendríamos el siguiente resultado:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x^2 & xy & x \\ xy & y^2 & y \\ x & y & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si esta diádica la multiplicamos por el escalar dA y la integramos en toda el área del elemento, tendríamos el siguiente resultado:

$$\int_A \begin{bmatrix} x^2 & xy & x \\ xy & y^2 & y \\ x & y & 1 \end{bmatrix} (dA) \qquad [J]= \begin{bmatrix} Ixx & Ixy & Qx \\ Ixy & Iyy & Qy \\ Qx & Qy & A \end{bmatrix}$$

la matriz formada se conoce como el **Tensor de Inercia** donde I_{xx} e I_{yy} representan Momentos de Inercia rectangulares, I_{xy} se define como el Producto de Inercia, Q_x y Q_y representan los Momentos de 1er orden (Momentos Estáticos) y A, el área de la sección en cuestión.

Nótese que en el caso anterior hemos podido describir, de un solo plumazo, todo un capítulo de la Estática de Sólidos, simple y llanamente con un análisis matricial sencillo.

Veamos ahora como se afecta el Tensor de Inercia al realizar sobre él, transformaciones de coordenadas por rotación y por traslación.

Si observamos la Fig. 1, notaremos que en la misma hemos rotado un cierto ángulo θ, los ejes rectangulares X-Y a una posición U-V, de forma tal que podamos expresar las coordenadas originales en función de las nuevas, teniéndose,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{o en otras palabras } \{x\} = [R]\{u\}$$

siendo [R] la Matriz de Transformación de Coordenadas por Rotación.

Ahora bien, para efectuar la transformación rotacional del Tensor de Inercia hacia los ejes nuevos, procedemos a realizar el triple producto matricial que gobierna a las cantidades tensoriales:

$$[Iu] = [R]^T[Ix][R]$$

para una mayor comodidad de espacio, llamaremos C = Cosθ y S = Senθ

$$\begin{bmatrix} Ixx & Ixy & Qx \\ Ixy & Iyy & Qy \\ Qx & Qy & A \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C & S & O \\ -S & C & O \\ O & O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} IxxC+IxyS & IxyC+IyyS & QxC+QyS \\ IxyC-IxxS & IyyC-IxyS & QyC-QxS \\ Qx & Qy & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} IxxC^2+2IxySC+ \\ +IyyS^2 \end{matrix} & \begin{matrix} IxyC20 \\ -(Ixx-Iyy)SC \end{matrix} & QxC+QyS \\ \begin{matrix} IxyC2\theta \\ -(Ixx-Iyy)SC \end{matrix} & \begin{matrix} IxxS^2-2IxySC+ \\ +IyyC^2 \end{matrix} & QyC-QxS \\ QxC+QyS & QyC-QxS & A \end{bmatrix}$$

De lo anterior podríamos concluir que el Tensor de Inercia, referido a los nuevos ejes U-V, se lee como sigue:

$$[Ju]=\left[\begin{array}{c|c|c} IxxCos^2\theta + IyySen^2\theta + \\ + 2IxySen\theta Cos\theta & IxyCos2\theta - \\ -(Ixx-Iyy)Sen\theta Cos\theta & QxCos\theta + QySen\theta \\ \hline IxyCos2\theta - \\ -(Ixx-Iyy)Sen\theta Cos\theta & IxxSen^2\theta + IyyCos^2\theta - \\ -2IxySen\theta Cos\theta & QyCos\theta - QxSen\theta \\ \hline QxCos\theta + QySen\theta & QyCos\theta - QxSen\theta & A \end{array}\right]$$

Si los ejes son centroidales, obviamente Qx y Qy serían nulos, y si a la vez quisiéramos encontrar el ángulo que produce valores máximos o mínimos del tensor nuevo, bastaría con diagonalizar la matriz, lo que significa anular los términos (1,2) y (2,1). En otras palabras, $Iuv = 0$;

$$Iuv + IxyCos2\theta - \frac{(Ixx - Iyy)}{2} Sen2\theta = 0$$

despejando tenemos que:

$$\tan 2\theta = \frac{2Ixy}{(Ixx-Iyy)}$$

Si ahora evaluamos las funciones $Sen2\theta$ y $Cos2\theta$ y sustituimos en los valores Iuu, obtendremos la conocida expresión para valores máximos del Momento de Inercia:

$$Imax/min = \underline{Ixx + Iy} \pm \sqrt{\underline{Ixx - Iyy}^2 + (Ixy)^2}$$

Si por el contrario, la transformación de las coordenadas se establece mediante una traslación de ejes, como se observa en la Fig. 2, podríamos expresar las nuevas coordenadas en función de las originales de la siguiente manera:

$u = x - a$

$v = y - b$

expresado de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{o simplemente } \{u\} = [T]\{x\},$$

donde [T] representa la Matriz de Transformación de Coordenadas por Traslación.

Si ahora efectuamos el triple producto matricial, tomando en cuenta la naturaleza contravariante del Tensor de Inercia, es decir, que su transformación está asociada a la matriz usada para definir las nuevas coordenadas, tenemos que:

$$[I_u] = [T][I_x][T]^T$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \left[\begin{array}{c|c|c} Ixx & Ixy & Qx \\ Ixy & Iyy & Qy \\ Qx & Qy & A \end{array}\right] & & \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c|c|c} Ixx-aQx & Ixy-aQy & Qx-aA \\ \hline Ixy-bQx & Iyy-bQy & Qy-bA \\ \hline Qx & Qy & A \end{array}\right] & & \left[\begin{array}{c|c|c} Ixx + a^2A- & Ixy + abA- & \\ -2aQx & -aQy - bQx & Qx - aA \\ \hline Ixy + abA- & Iyy + b^2A- & \\ -aQy - bQx & -2bQy & Qy - bA \\ \hline Qx - aA & Qy - bA & A \end{array}\right]
\end{array}$$

La nueva matriz que identifica el Tensor de Inercia transformado por traslación de ejes, queda formulada de la siguiente manera:

$$[J]u = \left[\begin{array}{c|c|c} Ixx + a2A - 2aQx & Ixy + abA - aQy - bQx & Qx - aA \\ \hline Ixy + abA - aQy - bQx & Iyy + b2A - 2bQy & Qy - bA \\ \hline Qx - aA & Qy - bA & A \end{array}\right]$$

Si los ejes originales fueran centroidales, donde los Momentos Estáticos son nulos ($Qx = Qy = 0$), tendríamos lo siguiente:

$$Iuu=Ixx + a^2A$$

$$Ivv=Iyy + b^2A$$

$$Iuv=Ixy + abA$$

lo que se conoce en la Estática como Teorema de los Ejes Paralelos, Fórmula de Transferencia de Momento de Inercia o simplemente el Teorema de Steiner.

Nótese que en las dos transformaciones que hemos presentado asociadas al Tensor de Inercia, el término (3,3), que corresponde al valor del Area de la Sección, no se alteró ni con la rotación ni con la traslación, tal y como se esperaba.

Otro aspecto que consideramos importante señalar sobre el Tensor de Inercia, es que su primera invariante (la asociada a la traza de la matriz, es decir la suma de los términos de su diagonal principal), permanece inalterado cuando se transforma al rotar los ejes. Dicha traza se conoce como el Momento Polar de Inercia.

De igual manera la segunda invariante, que se refiere al determinante de la matriz, se mantiene constante.

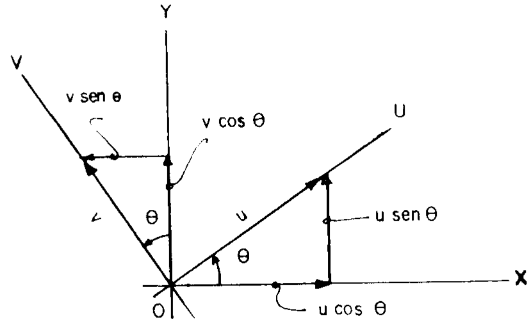

Fig 1 Rotación de ejes

$$x = u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta$$
$$y = u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

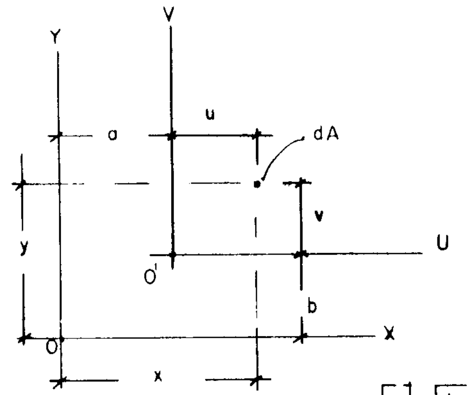

Fig 2 Traslación de ejes

$$u = x - a$$
$$v = y - b$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$