



Scripta Philosophiæ Naturalis 12 (2017)

ISSN 2258 – 3335

EL ENCUENTRO ENTRE SPINOZA Y HILBERT : EL ORDEN GEOMÉTRICO ENTRE LO UNO Y LO MÚLTIPLE

Óscar Javier PÉREZ LORA

RESUMEN: La obra más importante de Spinoza, *Ética demostrada según el orden geométrico*, está escrita bajo la arquitectura geométrica de axiomas, prefacios, definiciones, proposiciones, corolarios, demostraciones y escolios. La tradición filosófica confiere este modo de exposición como un entusiasmo por el desarrollo matemático de los siglos XVI y XVII, así como una estrategia expositiva que toma de modelo a Euclides. En tal sentido el carácter geométrico de la obra de Spinoza queda relegado a un segundo plano. Pienso que es posible mostrar la *Ética* en sentido geométrico, y que tal geometría está más cerca de los avances de esta disciplina a finales del siglo XIX que de la vieja geometría euclidiana. El punto de encuentro lo constituye Hilbert en conexión a la fundamentación de la geometría moderna entre lo *uno* y lo *múltiple*. Así mismo, discutir algunos elementos para pensar la fructífera relación entre la matemática y las ciencias físicas contemporáneas.

PALABRAS CLAVE: Spinoza (1632-1677); Hilbert (1862-1943); geometría; física matemática; uno – múltiple; sistemas formales; método sintético.

ABSTRACT: The most important work of Spinoza, *Ethics demonstrated in Geometrical Order*, is written under the geometric architecture of axioms, prefaces, definitions, propositions, corollaries, demonstrations and scolios. The philosophical tradition confers this mode of exhibition as an enthusiasm for the mathematical development of the sixteenth and seventeenth centuries, as well as an expository strategy that follows Euclid as a model. In this sense the geometric character of Spinoza's work is relegated to the background. I think that it is possible to show the *Ethics* in the geometrical sense, and that such geometry is closer to the advances of this discipline in the late nineteenth century than the old Euclidean geometry. The meeting point is constituted by Hilbert in connection with the foundation of modern geometry between the one and the multiple. Also, discuss some elements to think about the fruitful relationship between mathematics and the contemporary physical sciences.

KEYWORDS: Spinoza (1632-1677); Hilbert (1862-1943); geometry; mathematical physics; one – multiple; formal systems; synthetic method.

INTRODUCCIÓN

La oposición entre lo *uno* y lo *múltiple* es tan antigua como la filosofía misma, y de seguro lo es desde que el hombre posee el uso de la razón. Es una aparente contradicción: aquello que es *uno* no puede ser *múltiple* porque deja de ser *uno*; así mismo, lo *múltiple* no puede ser *uno* porque deja de ser *múltiple*. Parece necesario a la lógica más elemental que sea lo *uno* o lo *múltiple* aquello que prime sobre su contrario.

La oposición primera de la filosofía es la de Parménides y Heráclito. El primero plantea que solo existe el Ser que identifica con la esfera, la unidad inamovible¹ y perfecta; lo múltiple y el movimiento son simples apariencias de los sentidos. El segundo afirma que lo único real es el cambio y que nada permanece (*Panta rei*); el ser o esencia es una simple apariencia.

La dificultad de decidir por una filosofía de lo *uno* o de lo *múltiple* es que siempre será incompleta. Si lo *Uno* es lo real, lo verdadero, en dónde queda lo particular, qué es el sujeto que piensa, cuál es el valor del individuo. Si se elige lo *Múltiple* se explica lo particular, pero el cuadro del mundo se desdibuja en lo atómico y se pierde de vista la relación entre las cosas. En un caso se ve el bosque pero se pierde el árbol, en el otro se ve el árbol pero se desdibuja el bosque². Restan dos caminos: o bien se asume que alguno

¹ Zenón de Elea, quien fuera discípulo directo de Parménides, planteó una serie de paradojas para demostrar que el movimiento y el cambio son conceptos ilusorios y por ello no reales.

² Esta dualidad tiene su correlato en lo político. Por ejemplo, buena parte del siglo XX transcurrió en la confrontación de sistemas opuestos respecto a la relación entre el individuo y la sociedad.

es lo real y lo otro es lo aparente o dependiente, o bien se explora la posibilidad de que no existe una jerarquía ontológica entre lo *uno* y lo *múltiple*, sino que ambos poseen igual realidad.

Junto a la oposición *uno-múltiple* también se da la relación antagónica entre permanencia y cambio. Generalmente el Ser, la unidad, se identifica con lo eterno y lo inmutable, con lo perfecto que, al ser perfecto, prescinde de todo movimiento porque ya es. Por su parte, el cambio continuo se identifica con lo múltiple, el movimiento eterno de las mutaciones. Ahora bien, ¿es posible concebir un Ser que se identifique con el movimiento? ¿O un cambio que se identifique con lo inmutable? Se descarta la última pregunta por ser una simple contradicción lógica: un cambio que no es cambio.

Respecto a la primera pregunta, un Ser que se identifique con el movimiento, es justo concebirlo como aquello que *es* en tanto que *movimiento* ; y es *movimiento* en tanto que *es*: lo *uno* y lo *múltiple*, en tal sentido, son expresiones diferentes de una misma realidad. Planteado de esta manera es aún difícil comprender esta relación entre lo uno y lo múltiple, por lo que desde el punto de vista de la filosofía es una exploración de caminos.

Ahora bien, tal exploración necesita de herramientas y caminos, los cuales no pueden omitir los impresionantes desarrollos de la ciencia moderna, y en especial de la matemática. Desafortunadamente la tradición filosófica ha perdido en buena medida este contacto con la matemática, bien sea por su creciente especialización y complejidad, bien sea por la supuesta invariabilidad ontológica y epistemológica de la matemática respecto a la teoría de conjuntos y la lógica de primer orden (Zalamea 2009). Por un lado, está el filósofo que más que filósofo se convirtió en un comentarista de la historia de la filosofía. Por otro lado, está el matemático con una poderosa caja de técnicas pero que raramente comprende su alcance en términos de la cultura y la filosofía.

En línea con lo anterior, el presente trabajo propone el encuentro entre dos figuras relevantes en el pensamiento occidental moderno: Baruch de Spinoza (1632-1677) y David Hilbert (1862-1943). El primero es considerado uno de los filósofos más importantes de la modernidad y del racionalismo junto a René Descartes (1596-1650) y Gottfried Leibniz (1646-1716)³. Durante mucho tiempo fue considerado como el

Por una parte, los sistemas liberales predicaron al individuo como única realidad posible, mientras que el comunismo daba primacía al conjunto social sobre el individuo. A la luz de los acontecimientos sabemos que ninguno de ellos es el salvador de la humanidad, y que la cuestión es más compleja de lo asumido inicialmente.

³ La relación entre Spinoza y Leibniz es tanto enigmática como interesante. Los dos filósofos tuvieron un encuentro en La Haya en 1676. Leibniz calificaba en público la obra de Spinoza como “horrible” y “espantosa”, ni siquiera digna de refutación; pero en privado llenaba cuadernos con notas meticulosas de sus escritos y en las cartas secretas que compartieron se dirigía a él como

filósofo maldito, expulsado de la sinagoga y sus libros prohibidos. Pero aun así ejerció una fuerte influencia en el Idealismo Alemán y la Ilustración. Hoy goza de un renovado interés por su filosofía, especialmente por sus escritos éticos y políticos.

El segundo es sin duda uno de los matemáticos más relevantes, si no el más importante, de la matemática moderna. Su espíritu universal cubrió el amplio espectro de la matemática, con aportes desde la Teoría de Números hasta la Lógica, pasando por la Geometría, la Física, la Teoría de Funciones, entre otras. Pero contrario a considerarse un pensador disperso, su capacidad de perspectiva le llevó a formular 23 problemas en el Congreso Internacional de Matemáticos de París (1900), los cuales influyeron (y siguen haciéndolo) en el desarrollo de la matemática moderna y contemporánea. En muchos aspectos Hilbert representa la clausura de la matemática moderna (Zalamea 2016).

Si bien la importancia de estos pensadores modernos no es discutible, la relación entre ellos no es clara o aparentemente inexistente. Un primer indicio viene desde el área de la geometría: Spinoza escribió su obra más importante con un sugerente título: *Ethica ordine geometrico demonstrata*⁴. Por su parte, Hilbert publica en el año 1899 *Los Fundamentos de la geometría*, el cual significa la culminación de un proceso de investigación geométrica y del método axiomático durante el siglo XIX.

Es claro que la coincidencia de títulos no es suficiente para relacionarlos. Por ello se pretende mostrar puntos de encuentro que den cuenta de la riqueza tanto de la filosofía de Spinoza como de la matemática de Hilbert. Pero más importante y dejando atrás el lugar de simple comentarista, se pretende explorar nuevas maneras de formular y elaborar la pregunta respecto al mundo. No obstante, es pertinente considerar dos posibles objeciones por parte de la tradición a la propuesta aquí desarrollada. La primera consiste en afirmar que el concepto de geometría en Spinoza es una analogía o mero método de exposición de sus ideas, pero sin un fundamento realmente geométrico. La segunda objeción, y aun salvando la primera, consiste en que Spinoza se refiere a la geometría de Euclides, mientras que Hilbert se refiere a una geometría más general que incluye a la geometría proyectiva y las geometrías no euclidianas.

Sin embargo, es propósito del presente trabajo mostrar que tal distancia insalvable

“célebre doctor y profundo filósofo”. En público, Leibniz le restó importancia asegurando que fue algo fortuito, breve y aburridor. Pero lo cierto es que el filósofo alemán viajó exclusivamente a entrevistarse con Spinoza, y según se dice, estuvieron discutiendo por tres días. A partir de ahí Leibniz no sería el mismo y ello influiría posiblemente en el desarrollo posterior de su obra. Apenas contaba con 30 años, mientras que Spinoza estaba a pocos meses de su muerte a los 44 años. (Matthew Stewart (2001), *El hereje y el cortesano. Spinoza, Leibniz y el destino de Dios en el mundo moderno*. Madrid: Editorial Intervención Cultural).

⁴ Ética demostrada según el orden geométrico

no es del todo cierta: Spinoza concibió una geometría como método más cercano al de Hilbert que a la del propio Euclides. Es más: gracias a este enfoque desarrolló su filosofía como un pensamiento de lo *uno* (substancia) y lo *múltiple* (modos), por los mismos caminos en los que Hilbert elabora lo *uno* y lo *múltiple* en la geometría moderna.

Además de la presente introducción, se expone en la siguiente sección el problema de la *expresión* entre la substancia y los modos, que en otras palabras consiste en la forma por la cual la substancia (*uno*) se expresa en los modos (*múltiple*). Sirve de guía para esta lectura de Spinoza el trabajo del filósofo francés Gilles Deleuze (1975). Luego, se explora el sentido de “orden geométrico”, primero en Spinoza y luego su encuentro con Hilbert respecto a la geometría como orden mismo de la naturaleza de lo *uno-múltiple*. Por último, y a manera de exploración, se discuten brevemente algunas consideraciones finales.

§ 1. — SPINOZA Y EL PROBLEMA DE LA EXPRESIÓN

El primer libro de la *Ética* trata de Dios o de la substancia. Este capítulo representa la ontología de su pensamiento y contiene tres conceptos claves: substancia, atributos y modos. La substancia es la unidad, la totalidad de lo real, mientras que los modos representan, *grosso modo*, lo particular y lo múltiple. Los atributos constituyen la manera en que la substancia se expresa en modos: de lo *uno* a lo *múltiple*.

Sea como sea, la idea de expresión resume todas las dificultades que conciernen la unidad de la substancia y la diversidad de los atributos. La naturaleza expresiva de los atributos aparece entonces como un tema fundamental en el primer libro de la *Ética* (Deleuze 1975, p. 9).

Spinoza define *substancia* como “aquello que es en sí y se concibe por sí, esto es, aquello cuyo concepto, para formarse, no precisa del concepto de otra cosa” (E1, def. 3)⁵. Más adelante, define a Dios como “un ser absolutamente infinito, esto es, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita” (E1, def. 6). Dios, o la substancia, es un ser *absolutamente infinito*, es decir, en cuanto expresa su esencia sin implicar negación alguna (E1, def. 7). A su vez, esta sustancia es una, en tanto que no es limitada ni por sí misma ni por otra cosa y tampoco está compuesta por partes (E1, prop. 12). De estar limitada no sería sustancia sino caso particular de algún género (E1, prop. 14).

Spinoza entiende por *atributo* “aquello que el entendimiento percibe de una substancia como constitutivo de la esencia de la misma” (E1, def. 4). Pero no debe

⁵ A partir de ahora se designan las citas de la *Ética* (E) por la siguiente notación: E - número del Libro; definición (def.), proposición (prop.), escolio (esc.) y Prefacio (Pref.).

interpretarse como ideal sino como real, en tanto que se concibe en el entendimiento y en la relación misma de las cosas. Los modos, por su parte, son “las afecciones de una substancia, o sea, aquello que es en otra cosa, por medio de la cual también es concebido” (E1, def. 5). De las definiciones se sigue entonces que todo lo que existe expresa la naturaleza de Dios de una determinada manera.

La substancia se expresa en los atributos y éstos en los modos. Pero, a su vez, los modos expresan la modificación de los atributos y éstos expresan la esencia de la substancia. La expresión substancia-atributos constituye la genealogía de la esencia de la substancia (*Naturaleza naturante*), mientras que la expresión atributos-modos constituye la producción de cosas (*Naturaleza naturada*).

Siguiendo a Deleuze, los atributos son puntos de vista sobre la substancia, pero en el Absoluto los puntos de vista ya no son exteriores. La substancia comprende en sí la infinidad de sus propios puntos de vista. Los modos se deducen de la substancia, de igual forma en que las propiedades se deducen de una cosa definida. Pero en el Absoluto las propiedades adquieren un ser colectivo absoluto.

La idea de expresión tiene dos correlativos en la obra de Spinoza: explicar (*explicare*) y englobar (*involvere*). El primero equivale a “desarrollar” la manifestación de lo *uno* en lo *múltiple*; mientras que el segundo se entiende como “implicar”, es decir, la expresión múltiple que engloba el *uno*. Leibniz le reprocha a Spinoza haber tomado el significado de la expresión de la Cábala y el neoplatonismo como emanación de la *uno*. Pero es todo lo contrario, pues en la idea de expresión hay una evolución de una causa emanativa a una causa inmanente (Deleuze 1975).

En otras palabras, la evolución que representa Spinoza no es concebir que de lo *uno* se desprende o emana lo *múltiple*, sino que lo *uno* se expresa (desarrolla) en lo *múltiple*; así mismo lo *múltiple* expresa (implica) el *uno*. Es un cambio radical, pues tanto lo *Uno* como lo *Múltiple* adquieren igual estatus ontológico de interrelación y nunca más de subordinación. Se refleja lo que Lautman define como la *unidad* de métodos estructurales y polaridades conceptuales tras la multiplicidad efectiva (Zalamea 2009).

§ 2. — GEOMETRÍA: MÉTODO Y ESTRUCTURA DE LO REAL

¿Cuál es entonces el lugar de la geometría en la filosofía de Spinoza de lo *uno* y lo *múltiple*? Para encontrar ese lugar es necesario recordar la posición privilegiada de la matemática en la filosofía moderna como ideal de demostración científica, dado el rigor del procedimiento deductivo y su claridad. En ese sentido Spinoza busca cumplir tal

ideal, pero yendo más allá de un tema expositivo sino de la matemática como expresión misma de lo real. Por tanto, método y realidad son indisolubles.

El método matemático es paradigmático en la medida que sigue el presupuesto básico de los antiguos: el conocimiento verdadero no es otro que el que procede de las causas a los efectos, siendo propio del sistema de Spinoza la reducción de todo tipo de causalidad al de causalidad inmanente. Así, la promesa del método consiste en partir de la causa y, a partir de ahí, deducir los efectos *more geometrico* (Zurro 1972).

Ahora bien, el método matemático puede ser tanto analítico como sintético. Descartes desarrolla el primero, el cual parte de los efectos para conocer la causa. Spinoza será crítico frente al mismo y privilegia, por su parte, el método sintético como la vía correcta tanto de *invención* como de *demostración*. Es decir, el método sintético no se limita a exponer a otros el conocimiento adquirido por vía del método analítico (Descartes), sino que también es el método para descubrir verdades acerca de la realidad misma.

Dios o la substancia es causa inmanente de los modos, *son* en Dios. Es decir, Dios es causa de todas las cosas en el mismo sentido en que se dice que es causa de sí. Ello implica que la causalidad de Dios no es transitiva (pasa una vez y se encuentra en un plano diferente), sino que por el contrario es inmanente (los modos necesitan de Dios para ser: Dios es su causa). Esta causalidad inmanente identifica el entendimiento humano con el divino, lo cual garantiza el que toda la verdad sea *index sui*.

Es necesario partir entonces de la posesión de una idea verdadera (Zurro 1972). La tarea que sigue consiste en encontrar una idea que conlleve el carácter de verdad, esto es, que no dependa de un criterio extrínseco para definirla (la verdad no es la adecuación entre el entendimiento y la cosa, ni el conocimiento por la causa primera). Así, la forma del pensamiento verdadero depende de la capacidad y de la naturaleza misma del entendimiento. La idea verdadera que Spinoza ha puesto como modelo es la definición geométrica. Si la Metafísica es posible como ciencia se debe al hecho de que la geometría revela al hombre la capacidad del entendimiento de lograr la verdad (Gueroult 1968).

En la Geometría, el hombre capta en acto la producción espontánea de ideas por su pensamiento y ve cómo la verdad de esas ideas se impone a él por el hecho de que, produciéndolas él mismo, las capta interiormente en su génesis (Zurro 1972, p. 100).

Tal idea verdadera se caracteriza por la claridad, la distinción y la adecuación (contenido). De las dos primeras no hay mucho que decir, pues siguen el significado usual en Descartes de algo que es captado por el entendimiento sin mediación y distinto de todas las demás cosas. La adecuación, por su parte, se define como *idea expresiva* en tanto que expresa su causa, explica la esencia de la cosa y ofrece el conocimiento de su

causa próxima. Una idea puede ser clara y distinta (idea de la idea o *idea reflexiva*) sin ser adecuada, pero una idea adecuada siempre es clara y distinta. A partir de la idea adecuada de alguna cosa se conciben ciertas propiedades que conforman una *definición genética*, de la cual se derivan todas sus propiedades⁶ (Deleuze 1975).

[...] se ha de realizar todo un programa: tener ideas claras y distintas o sea, formalmente verdaderas, que posteriormente se convertirán en adecuadas, cuando demos de ellas una definición que exprese su causa, causa que, en definitiva, no es otra que Dios, al cual se remiten, en el cual tienen su origen al igual que las cosas o modos de la extensión y de acuerdo con cuyo orden se encadenan; de esta manera podremos reproducir la estructura real de la Naturaleza (Zurro 1972).

El método sintético se afirma como *ars inveniendi*: si se parte de una buena definición, es posible reproducir correctamente el orden de la naturaleza de manera deductiva. Adquiere por tanto relevancia la *definición* como el concepto de la cosa, de tal manera que comprenda su causa próxima y que todas sus propiedades puedan ser deducidas. Así la geometría constituye no solo el modelo de exposición sino el conocimiento del orden mismo de la naturaleza. Es decir, una “deducción productiva” en la medida en que la deducción de la idea se corresponde con la deducción de lo real (Spinoza 2011).

Así se responde la pregunta inicial por el lugar de la geometría en el sistema filosófico de Spinoza: es a la vez método y sistema que da cuenta del orden de la Naturaleza entre lo *uno* y lo *múltiple*: la manifestación de lo *uno* en lo *múltiple* y la implicación de lo *múltiple* en lo *uno*.

En consecuencia, si la filosofía es justificable de las matemáticas, es porque las matemáticas encuentran en la filosofía la supresión de sus límites ordinarios. El método geométrico no encuentra dificultades cuando se aplica al absoluto; al contrario, encuentra el medio natural de superar las dificultades que gravaban su ejercicio, mientras se aplicaba a antes de razón (Deleuze 1975, p. 18).

§ 3. – LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Hasta aquí se ha explorado el pensamiento de Spinoza a modo de preparar el encuentro con Hilbert. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿se encuentra el concepto de geo-

⁶ Si se define el círculo como una figura cuyas rectas trazadas del centro a la circunferencia son iguales, se expresa una propiedad del círculo de forma clara y distinta. Sin embargo, no es adecuada porque solo describe una propiedad, un efecto pero no su causa. En cambio, si se define como la figura producida por una línea en movimiento, uno de cuyos extremos permanece fijo, se explica entonces la génesis del círculo y se derivan en consecuencia las propiedades del mismo.

metría (y de filosofía) en Spinoza más cercano a Euclides o a Hilbert? Como ya se mencionó, la tradición considera el carácter geométrico de la filosofía de Spinoza como una cuestión de exposición de ideas ya concebidas, un entusiasmo “inocente” por el carácter paradigmático de los *Elementos* de Euclides⁷. Ya en el apartado anterior se mostró el carácter inventivo concebido por Spinoza en la geometría. Ahora es necesario mostrar que Spinoza no sigue realmente a Euclides sino que desarrolla una postura cercana a Hilbert y a la geometría moderna.

Para el año de 1891 el matemático alemán imparte un curso de geometría proyectiva, en donde adoptó un punto de vista sintético (axiomático), esto es, renuncia al uso de coordenadas. Si bien para el tiempo de Hilbert el método analítico es más general y avanza más rápido que el método sintético, el carácter de este último es mucho más puro, necesario y autocontenido. Recuérdese la disputa que libra precisamente Spinoza a favor del método sintético en matemáticas.

En 1894 dicta el curso de “Fundamentos de geometría” en donde adopta el enfoque axiomático de Pasch. El objetivo de Hilbert consiste en deducir toda la geometría de un conjunto mínimo de axiomas. El cuerpo del sistema deductivo debe ser consistente (sin contradicciones) y completo (toda afirmación verdadera es deducible de los axiomas en un número finito de pasos): justo las mismas características observadas con el sistema deductivo de Spinoza.

Hilbert desarrolló sus demostraciones en el uso de propiedades elementales sobre incidencia de puntos, rectas y planos. No se interesó por una descripción exhaustiva de los axiomas ni de su estudio en sí. A su vez, se liberó de las ideas preconcebidas de recta, punto o plano... “uno podría decir “mesas”, “sillas” y “jarras de cerveza” y no por ello los resultados perderían su validez”⁸ (Almira and Sabina de Lis 2007). Resulta interesante contrastar esta cita de Hilbert con la siguiente de Spinoza:

Así pues, trataré de la naturaleza y fuerza de los afectos, y de la potencia del alma sobre ellos, con el mismo método con que en las partes anteriores he tratado de Dios y del alma, y considerar los actos y apetitos humanos como si fuese cuestión de líneas, superficies o cuerpos (E3, Pref.).

En ambas citas se identifica una “axiomática a la manera de Hilbert”. Es decir, lo relevante no es el contenido de los enunciados sino su encadenamiento. Luego, a partir de la elaboración de la axiomática formal, se obtiene una axiomática concreta, esto es, dando a los términos primitivos una definición y deducir así las proposiciones verdaderas

⁷ “[...] hay cierta compasiva ironía en Bourbaki cuando escribe que Spinoza ‘tal vez obraba de buena fe al exponer la ética a la manera de los geómetras’”. (Campos 2008, p. 209).

⁸ Al parecer esta frase fue pronunciada por Hilbert en una conversación con Blumenthal.

(Campos 2008). Este es el camino seguido por Spinoza en la discusión de la definición y en la aplicación del sistema axiomático. Al definir los actos y apetitos humanos *como si fuese* una cuestión geométrica, concibe el sistema formal y le dota de contenido en función del campo a investigar.

En contraste, la “axiomática a la manera de Euclides” se asume a imagen de una especie de física. Los puntos, rectas y planos se constituyen como idealizaciones de objetos físicos del que se toman propiedades y nombres. En otras palabras, la axiomática ya asume unos contenidos específicos y cuyo estudio y aplicación solo se refiere a tal contenido.

Resulta pertinente la crítica que realiza Klein a los *Elementos* de Euclides. La geometría euclidiana responde a las ideas de la escuela platónica, sin ningún tipo de aplicación y concebida como una preparación para estudios generales. Como tal, el sistema carece del álgebra, los números negativos y los números complejos. No es flexible ni general y por ello debía recurrir a muchos casos particulares. No todas las verdades son deducidas de los axiomas. Por otra parte, el programa de Pasch parte de reconocer el riesgo de la geometría euclidiana de creer que la figura, como imagen dibujada sobre un plano bidimensional, es lo esencial de la geometría. Por este motivo Pasch se propone abandonar todo llamado a la intuición y a la influencia del lenguaje cotidiano.

Hay que formalizar el conjunto de las proposiciones nucleares, enseña Pasch, esto es, reemplazarlas por expresiones en las que los conceptos geométricos figuran solamente mediante signos cuya única función es la de servir de lugares vacíos, que eventualmente pueden ser llenados. Se obtiene de tal manera un marco que encierra un tablero en blanco, en el que, no obstante, se está expresando algo: la estructura del conjunto de las proposiciones nucleares; y esta es la única tarea de la geometría pura (Campos 2008, p.226).

Otra idea que Hilbert toma de Pasch es el carácter especial de la geometría como ciencia natural. Junto con Pasch, Hilbert asume dos posturas respecto a la geometría. Por un lado, una ciencia natural frente a la fuente, validez y explicación genética de los axiomas. Es un empirista en cuanto considera que la validez de los axiomas proviene de la experiencia sensorial, siendo la aplicación de la misma el estudio de la relación entre los cuerpos y su forma externa (Courant and Robbins 2014). Por otro lado, es una ciencia pura en tanto sistema hipotético deductivo cuyos axiomas son definiciones implícitas de los términos que contiene (Campos 2008).

Esta idea de la geometría como ciencia natural ya era común en la matemática moderna. *Los Fundamentos de la Geometría* (1899) aparece entonces como una culminación de la investigación del último tercio del siglo XIX, la cual se originó en la

confluencia de las geometrías no-euclidianas y la geometría proyectiva (Corry 2002). Al respecto, hay que decir que Spinoza es muy anterior a este programa de investigación, pero es muy probable que conociera la geometría proyectiva y concibiera la geometría más allá de Euclides ⁹.

Para Spinoza la geometría es tanto ciencia natural como ciencia formal. Como se expuso más arriba, los atributos expresan la esencia de la substancia, y como tales son infinitos tanto en cantidad como en cualidad. Al expresar la esencia todos expresan lo mismo pero desde dos puntos de vista diferentes. Nosotros solo conocemos dos atributos: de Pensamiento y de Extensión. En ese sentido, la geometría expresa una esencia que o bien identificamos con el atributo de Pensamiento – geometría como ciencia formal – o bien con el atributo de Extensión – geometría como ciencia natural. Pero esto no se limita a la geometría como campo de estudio, sino que la estructura misma de lo real es geométrica y por ello es posible, y necesario, aplicar el orden geométrico al estudio de toda ciencia¹⁰. Al respecto, Hilbert plantea lo siguiente:

Entre las apariencias o hechos de la experiencia que se nos manifiestan al observar la naturaleza, hay un tipo peculiar, es decir, aquellos hechos que corresponden a la forma externa de las cosas. La geometría se ocupa de este tipo de hechos. [...] La geometría es una ciencia cuyos factores esenciales están a tal punto desarrollados, que todos sus hechos pueden ya ser deducidos de otros más básicos. El caso de la electricidad o el de la óptica son muy diferentes, pues muchos nuevos hechos están siendo continuamente descubiertos en ellas. Sin embargo, en lo que respecta a su origen, la geometría es una ciencia natural¹¹.

⁹ Al respecto es preciso mencionar tres indicios. Primero, Spinoza vivió en Holanda entre los años 1632 y 1677, período durante el cual ya se habían estudiado y aplicado los problemas de *perspectiva* por artistas del Renacimiento como Leonardo da Vinci y Alberto Durero. Segundo, Spinoza ejerció el oficio de pulidor de lentes para instrumentos ópticos, lo cual exige conocimientos en geometría óptica. Tercero, Spinoza es contemporáneo de Desargues, éste murió cuando aquel contaba con 30 años, y es posible que conociera su teorema de homología.

¹⁰ Valga decir que el interés principal de Spinoza es la ética y la filosofía política, a la cual aplica el método geométrico de la manera como se ha expuesto. En ese sentido sus posibles aportes para la geometría y la matemática podrían pasar desapercibidos, pues no los expone de manera explícita sino contenidos en su filosofía ética. “He ahí, pues, el fin que me propongo: alcanzar tal naturaleza y esforzarme para que muchos la adquieran junto conmigo; es decir, que también forma parte de mi felicidad entregarme a que muchos conozcan lo mismo que yo, para que el entendimiento y el deseo de ellos coincida plenamente con mi entendimiento y mi deseo. Para que así suceda sólo es necesario conocer de la Naturaleza lo que basta para alcanzar tal naturaleza; después, formar una sociedad tal como debe ser deseada para que el mayor número posible alcance el fin de la manera más fácil y segura” (Spinoza 2011, p. 10).

¹¹ Citado en Corry 2002, p. 36.

Aquí radica, entonces, la relevancia de la idea adecuada que se expuso más arriba. No es el mero juego formal de describir propiedades de las figuras (claro y distinto), sino de establecer una definición genética de la cual se derivan todas sus propiedades a manera de reproducir la estructura *uno-múltiple* de la Naturaleza en general, y de los diversos campos de estudio en específico. En resumen, y a nuestro criterio, la filosofía de Spinoza establece una estrecha relación con los fundamentos geométricos de Hilbert.

§ 4. — CONSIDERACIONES FINALES

El presente trabajo ha desarrollado una exploración de posibles puntos de encuentro entre Spinoza y Hilbert respecto al método geométrico. Se afirma que el *more geometrico* de Spinoza es más cercano a la geometría de Hilbert que de Euclides, y que como tal, contiene elementos importantes de lo *uno* y lo *múltiple*. Por otro lado, ambos pensadores identifican en la geometría un método que no se limita a la construcción formal de la mente humana, sino que la estructura misma de lo real responde al orden geométrico.

Son muchos los temas que quedan por abordar, en especial, lo relacionado con el movimiento y la situación de la filosofía de Spinoza luego del Teorema de Incompletitud de Gödel. Este Teorema echó por tierra la intención de Hilbert de elaborar una sección global de la matemática moderna y de su fundamentación. ¿Gödel también echa por tierra la ética de Spinoza si asumimos su relación con la geometría de Hilbert? A su vez, ¿es posible concebir una nueva ética *more geometrico* sobre la elaboración de la geometría contemporánea? ¿Es posible que la nueva geometría dé cuenta de las estructuras profundas de conexión del mundo?

Gödel impone un límite a la pretensión de cualquier sistema formal, entre otras razones, por la existencia de proposiciones verdaderas que no son deducibles de los axiomas. Esto hace al mundo más complejo y variado en sus formas de lo que un sistema deductivo pueda atrapar. Ahora bien, Spinoza plantea: “En la naturaleza no hay nada contingente, sino que, en virtud de la necesidad de la naturaleza divina, todo está determinado a existir y a obrar de cierta manera” (E1, prop. 29). Y más adelante en la Demostración de esta Proposición: “todas las cosas están determinadas, en virtud de la necesidad de la naturaleza divina, no sólo a existir, sino también a existir y obrar de cierta manera, y no hay nada contingente”. ¿Es posible que algo exista y obre más allá de la necesidad? ¿Hay determinaciones que escapan a nuestro entendimiento?

El devenir de la materia, contrario a lo matemático, no es reversible ni obedece a los criterios matemáticos de exactitud, de perfección, de completitud. Lo matemático es dife-

rente de la materia a tal punto, que la expresión “física matemática” es un oxímoron. Sin embargo, a pesar de lo paradójico de este estado de cosas, la física matemática es la ciencia dura mejor desarrollada. Si sectores de las matemáticas se aplican a la materia, es porque el aparato psíquico forjó los fundamentos de todos nuestros sistemas de símbolos por abstracción frotándose al entorno y como consecuencia de la vida biológica¹².

A partir de lo discutido en este artículo es posible plantear de forma aventurada, claro está, que tal diferencia entre lo matemático y lo físico responde a que no se han descubierto los métodos matemáticos que dan cuenta de ciertos fenómenos físicos. En ese sentido, la física ha sido en muchas ocasiones un catalizador del desarrollo matemático, pues plantea problemas físicos que encuentran un correlato posterior en la matemática. Piénsese, por ejemplo, en la física cuántica y el surgimiento de la geometría no conmutativa. Es decir, la relación en doble vía entre la física y la matemática contemporánea da cuenta de una relación quizá más profunda de lo que podría intuirse inicialmente.

Respecto al movimiento como característica esencial de lo real, se hizo en la Introducción una breve referencia al preguntar si es posible concebir el Ser en tanto que movimiento. Tschirnhaus (1651 - 1708), matemático, físico, médico y filósofo alemán, escribe a Spinoza que en geometría aún se necesita al geómetra para prolongar la base del triángulo (no lo hace por sí mismo) para considerar un nuevo punto de vista. Hegel, por su parte, sostiene que el método geométrico no es apto para comprender el movimiento orgánico (autodesarrollo) que conviene solo con el Absoluto.

Hilbert plantea el grupo de axiomas de congruencia. Tales axiomas definen el concepto de congruencia y junto a éste el de movimiento. Se definen ciertas relaciones de segmentos entre sí para cuya descripción es *congruente* o *igual* (Campos 2008). Queda abierta la cuestión de si la axiomatización de Hilbert responde a la cuestión planteada por Tschirnhaus.

Spinoza, por su parte, responde a Tschirnhaus que en geometría las figuras pueden ser definidas por una causa próxima o por definición geométrica. Tales causas son ficticias o imaginarias (inferidas a partir de sus efectos). Las propiedades concluidas una por una por el geómetra adquieren un ser colectivo en relación a sus causas y por medio de esas ficciones. Pero en el Absoluto no hay nada ficticio. La causa no se infiere del efecto. La causa de lo absolutamente infinito se encuentra contenido en su concepto.

Por lo tanto, no hay necesidad de ficción para que los modos en su infinidad sean asimilados a propiedades colectivamente concluidas de la definición de la substancia, y de

¹² Miguel Espinoza, comunicación al *Círculo de Filosofía de la Naturaleza*, 4 de junio de 2017. Ver también, del mismo autor, *Les mathématiques et le monde sensible*, Ellipses, Paris, 1997.

los atributos, a puntos de vista interiores a esa substancia en la que se han enraizado (Deleuze 1975, p. 18).

REFERENCIAS

- Almira, J. M., and J. C. Sabina de Lis, *Hilbert, matemático fundamental*, Nivola Libros Ediciones, Tres Cantos, 2007.
- Campos, Alberto, *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen 2. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2008.
- Corry, Leo, “David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometría”, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana IX* (1): 27–43, 2002.
- Courant, Richard, and Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, Fondo de Cultura Económica, México D.F., 2014.
- Deleuze, Gilles, *Spinoza y el problema de la expresión*. Muchnik Editores, 1975.
- Gueroult, Martial, *Spinoza, I: Dieu*, Editions Aubier-Montaigne, París, 1968.
- Spinoza, Baruch, *Ética demostrada según el orden geométrico*, Ediciones Orbis, S.A., Barcelona, 1980.
- *Tratado de la reforma del entendimiento y otros escritos*, Segunda, Editorial Tecnos, Madrid, 2011.
- Zalamea, Fernando, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009.
- 2016. “Epistemología e Historia de las matemáticas. Seminario continuo de filosofía de las matemáticas.” *Lo múltiple y lo uno de Galois a Gromov*, 2016.
- Zurro, María del Rosario, “Método y sistema en Spinoza.” *Logos: Anales del Seminario de Metafísica 7* (7): 85–110, 1972.

* * *

Oscar Javier PÉREZ LORA
 Universidad Nacional de Colombia
 ojperetzl@unal.edu.co