Scripta Philosophiæ Naturalis 13 (2018)

ISSN 2258 – 3335

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE ESTRUCTURA EN LA MATEMÁTICA MODERNA (1830-1950) (*)

Óscar Javier PÉREZ LORA

(*) Ponencia ante el VI Simposio
del Círculo de Filosofía de la Naturaleza
Universidad El Bosque, Bogotá, 1-3 de Noviembre de 2017

RESUMEN *El presente trabajo busca entender la evolución del concepto de estructura en el desarrollo de la matemática moderna, comprendida entre los años 1830-1950. Se establece en primer lugar la teoría de Galois como el primer desarrollo que distingue la matemática moderna de la matemática clásica. En segundo lugar, se expone la perspectiva de Bourbaki respecto a la matemática, la cual es heredera directa del camino inaugurado por Galois y el fracaso de la fundamentación de finales del siglo* XIX *y principios del siglo* XX*. Por último, se plantean algunas consideraciones finales respecto a la relación entre las matemáticas y el mundo, especialmente desde la mirada de dos filósofos de la matemática, Lautman y Cavaillès. Estos dos autores franceses de la primera mitad del siglo* XX *no han recibido la atención que merecen, dada la profundidad de su mirada respecto a la matemática moderna.*

PALABRAS CLAVE *Filosofía de las matemáticas, Galois, Bourbaki, Gödel, estructura matemática, fundamentación de las matemáticas, Lautman, Cavaillès.*

En la historia del pensamiento occidental se ha dado una fructífera relación entre matemática y filosofía. Progresos en la técnica matemática tienen importantes correlatos con profundas inquietudes filosóficas, así como cuestiones filosóficas encuentran un eco en la matemática. Sin embargo, en el último siglo estas dos formas del pensamiento se han distanciado. Por una parte, la alta especialización y abstracción de la matemática hace difícil a la filosofía seguir su desarrollo (aun para los matemáticos es imposible seguir todas las ramas de su propia disciplina). Por otra parte, la filosofía analítica de la matemática asume una serie de supuestos restrictivos con relación a la matemática que impide captar la gran riqueza de la misma.

Se discuten en el presente escrito elementos para comprender la evolución histórica del concepto de estructura en la matemática moderna (1830-1950), desde la teoría de grupos de Évariste Galois (1811-1832) hasta la perspectiva estructuralista de Bourbaki y la mirada filosófica de Albert Lautman (1908-1944). Esto es, entender la noción de grupo, la aparición de las geometrías no euclidianas, los intentos de fundamentación y su fracaso gracias a los teoremas de Kurt Gödel (1906-1978).

Parecería que esta discusión compete exclusivamente a las matemáticas. No obstante pueden rastrearse algunas conexiones en la historia de la filosofía occidental respecto a la búsqueda del fundamento de lo real, entre una visión sustancialista de la realidad enfrentada a una visión estructuralista de la misma. En la primera sección se expone la teoría de grupos de Galois, así como su relevancia en el desarrollo posterior de la matemática. En la segunda sección se discute el cambio que sufren las matemáticas a partir de las geometrías no euclidianas, los intentos de fundamentación y los teoremas de Gödel. Luego, y fruto de aquellos cambios, se aborda el enfoque estructuralista de Bourbaki. Por último, se realiza una breve reflexión acerca del viejo y conocido problema de la irrazonable efectividad de las matemáticas.

§ 1. — LA TEORÍA DE GRUPOS DE GALOIS

Galois introduce el término de grupo, entendido como una estructura matemática formada por un conjunto no vacío y por una operación, a partir de la cual se combina cualquier par de elementos del conjunto para componer un tercero. Pero para comprender el alcance de esta definición, en apariencia igual a las miles de definiciones matemáticas, es importante entender el problema al que Galois se enfrenta, la novedad de su solución y su relevancia en la matemática posterior.

El álgebra, en sus orígenes, fue una generalización y extensión de la aritmética. En lugar de usar números para resolver problemas concretos, el álgebra introduce letras para simbolizar números (*a, b, c*) y variables o valores desconocidos (*x, y, z*). En el Renacimiento, René Descartes (1596-1650) junto con Pierre de Fermat (1607-1655) logran dar un enorme impulso al álgebra gracias al desarrollo de la geometría analítica. En principio el interés fue usar el álgebra para la resolución de problemas concretos de la nueva ciencia. La geometría analítica asocia ecuaciones algebraicas, por una parte, a las curvas y superficies de la geometría, por otra parte. Esto será uno de los avances más relevantes de la matemática y base para sus desarrollos futuros. Entre estos avances se encuentra la inversión de papeles entre el álgebra y la geometría. Esta última dominaba el ambiente matemático desde los griegos, pero gracias a la geometría analítica el álgebra se convirtió en la disciplina matemática básica (Kline 2016, pp. 401-429).

En términos generales, una ecuación algebraica se define como una igualdad expresada por un polinomio igual a cero, compuesta de términos independientes o constantes (*a, b, c*) y coeficientes (*x, y, z*). El grado de la ecuación se define por el exponente más grande del coeficiente. Del Renacimiento hasta Galois el interés del álgebra se centró en la resolución de ecuaciones. Así, por ejemplo, una ecuación de grado uno, definida como *ax + b = 0*, tiene una solución general, esto es, *x = -b/a*. La ecuación de segundo grado, *ax2 + bx + c = 0*, tiene dos soluciones (raíces):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se dice *fórmula algebraica* a esta solución que aplica para cualquier valor que tomen las constantes. Importa, por tanto, no los valores de la ecuación sino la forma de la misma. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado la solución general de cada una es significativamente más compleja. La primera se conoce desde el siglo XVI y la segunda desde el siglo XVII. ¿Existe una solución general para las ecuaciones de quinto grado? ¿Qué hay de las ecuaciones de sexto, séptimo y de grado superior?

Niels Abel (1802-1829) probó en 1825 que no existe ninguna fórmula general para resolver polinomios con grado igual o mayor a cinco. Ya en 1770 Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) se había preguntado por qué funcionaban las fórmulas encontradas hasta ese momento. Hay un artificio de la ecuación auxiliar que rebaja en un grado el polinomio, pero en el caso de las ecuaciones de quinto grado lo aumenta. Galois llegó a la misma conclusión de Abel pero de manera independiente, y con un valor agregado: determinó qué propiedades deben tener los coeficientes de cualquier ecuación y de cualquier grado para poder tener una fórmula que permita obtener una solución general. Esta solución se da a través del estudio de las permutaciones de las raíces de una ecuación polinomial de cualquier grado, con lo que se establece si es posible encontrar una solución por fórmula o no. No interesa, por tanto, el significado atribuido de los elementos y operaciones, solo expresar su estructura algebraica interna.

El gran avance de Galois fue observar que los coeficientes de las ecuaciones auxiliares usadas en las fórmulas de solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado eran invariantes bajo unos subgrupos del grupo de permutaciones de las raíces[1]. Lo contrario sucede con las ecuaciones de quinto grado en adelante, estos subgrupos no necesariamente existen, es decir, el grupo puede o no poseer los subgrupos requeridos.

> Estas son características centrales del *modus operandi* estructuralista: análisis de estructura abstracta e identificación de invariantes. La primera es la metodología en sí; la segunda produce, si es posible, la expresión resolvente o auxiliar y corresponde, por así decirlo, al contenido (Falk de Losada 2013, p. 23).

Gracias al desarrollo de la noción de grupo nace el álgebra abstracta, la cual se ocupa del estudio de estructuras algebraicas; no hay necesidad de conocer las raíces para estudiar el grupo de sus permutaciones. Una solución es posible si y solo si el correspondiente grupo de permutaciones de las raíces es soluble. Esto quiere decir que existe una cadena de subgrupos con determinadas características sin importar el grado de la ecuación. (Falk de Losada 2013, pp. 14-17). No se pretende hacer una exposición exhaustiva de esta noción, solo los elementos esenciales para su comprensión. Definimos un grupo como sigue. Sean G un conjunto no vacío y una operación binaria definida en G. Las propiedades o axiomas del grupo son:

---

[1] De una permutación baste decir que es una función uno-a-uno del conjunto A sobre A (el conjunto de las raíces). Producto de esta operación se generan diferentes subgrupos o subconjuntos del conjunto original de todas las posibles permutaciones ($E, \rho, \pi, \theta, \varphi, \psi$), y cuya operación entre las mismas se define por la composición de funciones ($\varphi, \pi, E, \psi, \theta, \rho$, ...). A partir de aquellas operaciones se conforma la tabla del grupo de permutaciones. Lo importante a considerar es que los coeficientes de la ecuación son invariantes bajo cada una de las permutaciones de las raíces y bajo el grupo de permutaciones.

i. Propiedad clausurativa: para todo $a, b \in G, a * b \in G$.
ii. Propiedad asociativa: para todo $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$
iii. Propiedad modulativa: existe un $e \in G\ tal\ que\ a * e = a$
iv. Propiedad invertiva: para todo $a \in G, \exists\ x \in G\ tal\ que\ x * a = e$
v. Propiedad conmutativa o abeliana: para todo $a, b \in G, a * b = b * a$

La primera propiedad se refiere a la ley de composición interna, esto es, toda combinación de los elementos del grupo *G*, por medio de la operación binaria, genera un elemento que también pertenece al grupo *G*. La segunda propiedad establece que el orden en el que se aplica la operación binaria entre los elementos no afecta el resultado. La tercera propiedad define un elemento identitario que, al efectuar la operación binaria sobre cualquier elemento de *G*, da como resultado el mismo elemento. En concordancia con lo anterior, la cuarta propiedad define que para todo elemento de *G* existe un elemento inverso que por medio de la operación binaria resulta en el elemento identitario. Por último, la propiedad conmutativa se refiere a un tipo particular de grupo denominado grupo abeliano. Ejemplo: sean *Z* el conjunto de los números enteros y (+) la operación de suma definida en *Z*, tenemos que:

i. Para todo $a, b \in Z, a + b \in Z$
ii. Para todo $a, b, c \in Z, a + (b + c) = (a + b) + c$
iii. Existe $0 \in Z\ tal\ que\ a + 0 = a$
iv. Para todo $a \in Z, \exists - a \in Z\ tal\ que - a + a = 0$
v. Para todo $a, b \in Z, a + b = b + a$

Hemos definido el conjunto de los enteros a partir de estas simples propiedades. Pero la relevancia de ello consiste en que con estas mismas propiedades se define un sinnúmero de otros objetos matemáticos. Así pues, objetos que en apariencia son independientes entre sí, comparten en lo profundo un mismo conjunto de propiedades estructurales. Esto permite concebir a la matemática más allá de una mera colección de cálculos, sino como una realidad invisible de estructuras profundas que se manifiestan en diferentes construcciones formales. Dos edificios matemáticos, en apariencia diferentes, responden a estructuras idénticas e indiscernibles entre sí, siendo cada uno de estos edificios la manifestación o realización concreta de un mismo grupo abstracto *G* (Lentin 1962). ¿Qué es entonces una estructura? Básicamente, es un conjunto no vacío con una colección elementos, operaciones y relaciones. ¿Cuántas estructuras básicas o naturales existen? ¿Responde en última instancia todo objeto matemático a una estructura natural? ¿Existe una sola estructura natural, o familia de éstas, a la que es posible reducir toda la matemática? O, por el contrario, ¿hay un número indefinido de estructuras?

Dos conceptos importantes que se derivan del estudio de los grupos son *homomorfismo* e *isomorfismo*. El primero es un tipo especial de funciones que permite transportar la estructura de grupo. Esto es, los homomorfismos conservan operaciones y con ello la estructura en cuanto tal. Por su parte, el isomorfismo se refiere a la representación de teorías matemáticas o de alguna situación fáctica del mundo por medio de un modelo matemático. Mientras que el isomorfismo representa la noción de modelo, el homomorfismo formaliza la noción de analogía: identifica las semejanzas y omite las diferencias entre dos situaciones con el fin de conocer a una de ellas por medio de la otra.

Las nociones de homomorfismo e isomorfismo unifican la metodología de la matemática pura y aplicada. Gödel, por ejemplo, usó el isomorfismo entre aritmética y metaaritmética para estudiar el problema de la consistencia absoluta de la aritmética de los números naturales. Así mismo el uso de modelos ha sido fundamental en la aplicación tanto en las ciencias físicas y naturales como en las ciencias sociales y humanas bajo una misma metodología (Falk de Losada 2013, pp. 34-40). A pesar de lo aparentemente anodino del problema inicial al que se enfrentó Galois, la solución que desarrolló permite generalizar una metodología estructuralista aplicable a muchos otros problemas, tanto matemáticos como físicos y sociales. “Actually, since Galois, Algebra is not only the solving of equations, or literal calculus, but becomes the science of structures (groups, rings, fields, and so on)” (Marcja and Toffalori 2003, p. 1).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue quizá el último gran matemático clásico. Su famoso lema “pocas, pero maduras”, *pauca sed matura*, recuerda la búsqueda paciente de perfección y elegancia de los griegos. Pero esta misma perfección repelía a los matemáticos más jóvenes e impacientes que buscaron caminos más efectivos para rodear los obstáculos (Bell 2014, pp. 207-209). Por ejemplo, en lugar de desarrollar andamiajes sofisticados para construir por regla y compás aquellas figuras geométricas que han fascinado a matemáticos por siglos (la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo), interesa su posibilidad (realidad) matemática a través del estudio de la estructura interna de estas figuras.

La adopción de las revolucionarias ideas de Galois por parte de la comunidad matemática no fue inmediata. Su obra fue tachada de “incomprensible” y corrió el riesgo de perderse debido a su trágica y prematura muerte a los 20 años de edad. Sin duda, sus ideas son fundamentales para la comprensión y posterior desarrollo de la matemática moderna y contemporánea.

§ 2. — CRISIS, FUNDAMENTACIÓN Y FRACASO

Posterior a Galois, la matemática experimenta a lo largo del siglo XIX y principios del XX un desarrollo espectacular en todas sus áreas. Uno de los más importantes avances se da en un área que había permanecido casi que inalterada por más de 2000 años, y que como tal se había considerado fundamento de la verdad matemática y paradigma del conocimiento racional: la geometría. Los *Elementos* de Euclides fue el primer texto matemático en hacer un uso sistemático del método axiomático. Esto es, parte de la definición de cinco principios o axiomas de los que se deducen todas las verdades de la geometría. Sin entrar en el detalle de estos axiomas, podemos decir que todos parecen bastante intuitivos y acordes con la experiencia.

La geometría euclidiana como paradigma ejerció una profunda influencia sobre el pensamiento filosófico. Uno de los pensadores más representativos en ese sentido fue Kant, quien realizó una justificación epistemológica tanto de la matemática como de la física newtoniana, ambas como paradigma del camino seguro de la ciencia. La *Crítica de la razón pura* (1781) intenta decidir la posibilidad o no de una metafísica general, así como de sus alcances y límites. Por ello, la filosofía kantiana de la matemática y de la física se enmarca en la necesidad de presentar un libro y decir "esta es la metafísica" como punto de inicio; tal como sí puede hacerse con los *Elementos* respecto a la matemática y de los *Principia* respecto a la física (Campos 2008, pp. 89-95).

Esta tentativa de transformar el procedimiento hasta ahora empleado por la metafísica, efectuando en ella una completa revolución de acuerdo con el ejemplo de los geómetras y de los físicos, constituye la tarea de esta crítica de la razón pura especulativa. Es un tratado sobre el método, no un sistema sobre la ciencia misma. Traza, sin embargo, el perfil entero de ésta, tanto respecto de sus límites como respecto de toda su articulación interna (Kant 2013, p. 23).

Sin embargo, el quinto axioma, más conocido como el axioma de las paralelas, siempre generó cierta inquietud entre filósofos y matemáticos. Su propia formulación resulta más compleja respecto a los demás y es el único que tiene una relación con el infinito. Todos los intentos por derivar este axioma de los cuatro primeros fueron fallidos, aunque difícilmente se llegó a dudar de su veracidad (Gowers 2008, pp. 141-144). En su formulación original reza:

> Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma ángulos internos, por el mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se las prolonga indefinidamente, se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.

Es inconcebible, por tanto, un triángulo cuya suma de sus ángulos sea diferente a 180 grados. Gauss fue quizá el primero en poner en duda esta verdad irrefutable. Intentó medir un triángulo cuyos vértices se definen por la cima de tres montes localizados en la región alemana de Hannover, alrededor del año de 1816. Pero debido a la dificultad inherente de la medición desistió de tal idea. ¿Por qué Gauss se tomó la molestia de realizar esta complicada medición? Implica de su parte, al menos, la sospecha por la veracidad de los principios de la geometría, pero no del razonamiento en sí mismo.

La otra manera de abordar estos supuestos es asumiendo que son falsos. Por ejemplo, asumir que el postulado de las paralelas resulta incorrecto en la superficie de una esfera. No parece claro que existan líneas rectas en una esfera, por ello se elabora una nueva interpretación de la misma. Así, línea recta se define como la distancia más corta recorrida entre dos puntos (x, y). Este recorrido sucede íntegramente sobre la superficie de la esfera (Gowers 2008, p. 144-151). Es posible entonces construir un triángulo sobre la esfera, pero cuya suma de los ángulos interiores es mayor que 180º. De hecho, con esta definición de línea recta, este nuevo tipo de geometría tiene todas las propiedades de la geometría euclídea, a excepción de aquellas que dependen del quinto postulado. Básicamente existen tres tipos de geometrías, la euclídea que supone un espacio plano y suma de los ángulos internos del triángulo igual a 180º, la elíptica que presenta curvatura positiva (esfera) y cuya suma de los ángulos es mayor que 180º y la hiperbólica con curvatura negativa y suma de los ángulos menor a 180º (Penrose 2014, pp. 81-101).

El desarrollo de estas geometrías significó que, además de la geometría euclidiana, existen otras representaciones del espacio coherentes y bien fundamentadas desde su lógica interna. La intuición que garantizaba en Kant la verdad apriorística de la geometría euclidiana nos había engañado. ¿Cuál de estas representaciones es la verdadera? Todas son coherentes en su razonamiento, pero solo una puede corresponderse con el mundo. La matemática, en este escenario, ya no compete a la verdad como se había creído por siglos. Hay por ello un profundo cuestionamiento a las filosofías pitagórica y platónica frente a la correspondencia entre leyes matemáticas y leyes del universo.

¿Cómo diferenciar entonces entre conocimiento e imaginación? Esta situación exigió la creación de mecanismos internos de control, así como a la búsqueda de la fundamentación de la matemática más allá de la geometría. En este escenario la lógica se desarrolla como instrumento de fiscalización interna de la ciencia. Esto impulsa la profusión de lógicas no clásicas, tales como la lógica simbólica, de proposiciones y de relaciones. El foco ya no se aplica sobre el objeto matemático en sí, sino en el reconocimiento y formulación de relaciones entre estos objetos. Esta nueva perspectiva también impulsa la aparición de la teoría de conjuntos, la cual permite tener en cuenta tanto al individuo (elemento) como a la colectividad (conjunto).

Por otra parte, la rebaja de la geometría euclidiana de verdad absoluta y fundamentada deductivamente a un simple sistema alterno llevó al replanteamiento de la existencia de los entes matemáticos. Hasta ese momento existían en tanto que se les dotaba de una interpretación geométrica. Sumado a esto, la presencia de paradojas y el uso intuitivo y vago de nociones geométricas llevaron a una nueva fundamentación aritmética de la matemática.

¿Qué significado tiene entonces la existencia de los entes matemáticos? Para el logicismo, la lógica es la base, niñez y fuente de la matemática, por lo que la existencia de un ente matemático se fundamenta y reduce a las leyes lógicas. El intuicionismo, por su parte, establece que un ente matemático existe si ha sido construido o calculado por una inteligencia humana a partir de los números naturales. Por último, el formalismo plantea la consistencia absoluta de la matemática, en cuanto que como actividad se restringe a la manipulación, por medio de reglas de transformación explícitas y formales, de símbolos carentes de significado. Algo existe, por tanto, si no implica contradicción (Falk de Losada 2012, pp. 195-199).

Al final, la disputa entre estas escuelas no brinda un ganador absoluto, pero cada una aporta a su manera fructíferas perspectivas que enriquecerán el desarrollo posterior de la matemática. En el caso del formalismo, la obra de su más importante representante, David Hilbert (1862-1943), implica una continuidad directa de la obra de Euclides. En los *Fundamentos de la geometría* (1899) se continúa el espíritu de axiomatización de la geometría, pero incluyendo las geometrías no euclidianas y respondiendo a los cuestionamientos sobre los *Elementos*. El avance fundamental de Hilbert es una nueva concepción de la axiomatización, no como la búsqueda de primeros principios, sino de consistencia interna (no contradicción) sin importar los axiomas u objetos ideales que sean utilizados (Campos 2008, pp. 239-240). De aquí se entiende su conocida frase: “en lugar de hablar de puntos, rectas y planos, los objetos para los que se postula la validez de los axiomas podrían llamarse mesas, sillas y jarras de cerveza” (Bombal 2013, p. 13).

El programa de Hilbert parecía conducir a buen camino. Por otra parte, Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947), avanzaban en su proyecto de fundamentar la aritmética sobre las teorías de clases y relaciones. Su principal obra, *Principia Mathematica*, se publicó en tres volúmenes entre los años de 1910 y 1913. Parecía resolver las inconsistencias del intento de Gottlob Frege (1848-1925) por fundamentar las matemáticas en la lógica. No obstante, una nueva figura (¿fantasma?) hacía su aparición en la escena matemática del siglo XX. Gödel, a través de sus dos teoremas de incompletitud de 1931, echaría por tierra esta y cualquier otra pretensión de fundamentación de las matemáticas.

Todo sistema formal lo suficientemente rico como para contener la aritmética de los números naturales, contiene proposiciones no susceptibles ni de demostración ni de refutación dentro del mismo sistema. Hasta ese momento se consideraba que todo problema o proposición al interior de un sistema tendría alguna solución, aunque nosotros no la supiéramos. Las tradicionales clasificaciones de falso y verdadero ya no funcionan. Esto obligará al posterior desarrollo de lógicas no tradicionales que serán a la lógica clásica lo que la topología o la geometría proyectiva es a la geometría euclidiana (Falk de Losada 2013, p. VIII).

En una frase, las matemáticas son incompletas. De antaño ya la filosofía había tenido un acercamiento a esta implicación. La conocida frase de Sócrates “solo sé que nada sé” o la famosa paradoja del mentiroso en sus diferentes variantes, evidencian el problema con las proposiciones autorreferenciales. Violan la tradicional dicotomía entre verdadero y falso pues no es posible clasificarlas en una u otra categoría. Gödel asume por su parte la siguiente proposición: "Esta aseveración no es demostrable". En otras palabras, la aseveración puede ser verdad, pero nunca podremos demostrar que es verdadera. "Aquí aparece por primera vez el hecho de que la verdad es más poderosa que la demostrabilidad" (Careaga 2002, p. 5).

En "Sobre proposiciones formalmente indecibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines" de 1931, Gödel pone a prueba la aparente formulación completa (toda proposición matemática puede demostrarse) y consistente (sin contradicciones ni paradojas) de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, así como de su aspiración de construir cualquier formulación matemática presente y futura. Además de *Principia*, Gödel también se refiere a la teoría axiomática de conjuntos de Zarmelo-Fraenkel, como los sistemas formales más amplios y sólidos construidos en su época. Esto es, todos los métodos de la matemática podían ser formulados en éstos o, en otras palabras, pueden reducirse a unos pocos axiomas y reglas de inferencia.

Por "proposición formalmente decidible" se entiende aquella proposición que puede determinarse como "verdadera" o como "falsa" usando la lógica formal del sistema al que pertenece. En contraposición, una "proposición formalmente no decidible" es una proposición que puede ser verdadera o falsa pero imposible de demostrar con los axiomas del sistema y la deducción lógica de los mismos. Al constatarse que en todo sistema hay proposiciones tanto decidibles como indecidibles, se concluye que "no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas" (Gödel 1996, p. 92). Esto último es justamente lo que muestra Gödel para los sistemas formales en el llamado Teorema de indecidibilidad.

Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas). Este hecho no se debe a la especial naturaleza de los sistemas citados, sino que se da en una clase muy amplia de sistemas formales, a la que en especial pertenecen todos los que resultan de añadir un número finito de axiomas (Gödel 1996, p. 54).

Ahora bien, se puede pensar que la solución a este inconveniente es añadir nuevos axiomas que cubran aquellas proposiciones no decidibles en el sistema formal. Esto puede solucionar algunas proposiciones puntuales, pero al incluirse nuevos axiomas en el sistema lógico se generan otras proposiciones que no serán decidibles en el sistema formal ampliado, y así sucesivamente. El segundo teorema, Teorema de incompletitud, apunta a estas objeciones, pues demuestra que aun en un sistema lo suficientemente rico y poderoso para demostrar la falsedad o veracidad de una proposición, siempre existirán proposiciones contradictorias o paradójicas y el sistema será inconsistente. En resumen, todo sistema basado en un conjunto finito de axiomas es incompleto, y si se requiere un sistema completo, este no será consistente (Careaga 2002, pp. 8-10). Estos resultados han tenido un profundo impacto en la matemática posterior, así como en la ciencia y la filosofía. En primer lugar, termina con toda pretensión de reducir toda la matemática a un conjunto finito de axiomas, pero esto a su vez significará una liberación creativa de la matemática contemporánea. El impacto filosófico más profundo será entonces la pérdida de la noción de verdad.

Ahora bien, estas cuestiones que preocupan al filósofo y al lógico no tienen mayor impacto en el matemático. La reducción de los objetos matemáticos a la teoría de conjuntos, por ejemplo, no incide en la manera en que el matemático trabaja estos objetos en su quehacer. Por otro lado, las paradojas pasan casi inadvertidas para el matemático pues considera que no es un problema de las matemáticas mismas sino de sus presentaciones formales. Así, por ejemplo, la teoría de Zermelo-Fraenkel se consideró la compleja solución de un problema irrelevante:

> [E]l análisis lógico de la matemática presenta las mismas limitaciones que la crítica literaria: interesa a los especialistas pero no a los autores ni a los lectores, en este caso, a los lógicos pero no a los matemáticos (Odifreddi 2006, p. 35).

En los años de la década de 1930 un grupo de matemáticos franceses, conocidos con el nombre colectivo de Nicolás Bourbaki, se propuso fundamentar la matemática de manera más significativa para los matemáticos[2], pero retomando a su vez la discusión lógica y filosófica previa. Esto es, un análisis y ordenamiento de la matemática que ya no era lógico sino estructural. Toda la matemática puede construirse sobre la noción de estructura; la matemática como ciencia de las estructuras. Entre sus miembros más notables se encuentra André Weil (1906-1998), Jean Dieudonné (1906-1992), Claude Chevalley (1909-1984), Henri Cartan (1904-2008), y muchos otros.

§ 3. — La perspectiva estructuralista de Bourbaki

El enfoque estructuralista de Bourbaki surge como una respuesta natural a las limitaciones impuestas por los teoremas de Gödel, el fracaso de los

---

[2] Esta situación refuerza lo expuesto en la anterior sección: es necesario que el filósofo se aventure al terreno de la matemática real, o de lo contrario corre el riesgo de elaborar sistemas cuyo contenido son pálidas imágenes de la matemática. No es una tarea fácil debido a la alta especialización de esta disciplina, pero ello puede redundar en grandes ganancias tanto para la matemática como para la filosofía misma.

proyectos logicista y formalistas, el desarrollo de las geometrías no euclidianas y el estructuralismo francés de Saussure[3] (Falk de Losada 2013). ¿Qué es entonces un objeto matemático? ¿Es posible conocerlo y cómo lo podemos conocer? El interés se centra ahora en la segunda cuestión de carácter epistemológico, esto es, la organización y comprensión de las matemáticas tal como éstas son practicadas. Pero aun así evoluciona también una visión ontológica de la matemática, esto es, el carácter estructural de la misma.

> Las matemáticas según una concepción primitiva, son la ciencia del número y de la cantidad; con una visión posterior, la ciencia de la regularidad; desde los griegos, la ciencia de lo infinito, y desde Bourbaki, la ciencia de las estructuras (Hayek 1996, p. 247).

Abandonada la noción de verdad absoluta, el enfoque estructuralista deja de concebir a la matemática como un cuerpo de conocimientos: la concibe ahora como una colección de métodos o de metodologías de construcción de conocimientos. Las estructuras significan una economía de pensamiento, pues una vez identificada cierta estructura en determinada situación matemática, se cuenta con todos los resultados consignados en los teoremas generales relativos a las estructuras de este tipo. Antes de esto se deba usar una serie de hipótesis restrictivas que respondan a las particularidades de cada caso. Se define una jerarquía de estructuras que va de lo simple a lo complejo y de lo general a lo particular (Falk de Losada 2013, pp.1-8).

> Mathematics is seen as the investigation, by more or less rigorous deductive means, of "abstract structures", systems of objects fulfilling certain structural relations among themselves and in relation to other systems, without regard to the particular nature of the objects themselves (Hellman 2005, p. 536).

El estructuralismo hereda elementos tanto del logicismo como del formalismo. Del primero adopta la metodología de construcción de conceptos más generales de naturaleza lógica. También toma del logicismo la generalidad de los conceptos de clase y relación, así como la importancia tanto matemática como filosófica o metodológica atribuida a la noción de relaciones semejantes, base de las nociones de homomorfismo e isomorfismo. Del formalismo retoma el estudio de estructuras abstractas en las que no se identifican los elementos ni las operaciones o relaciones entre estos. Se concentra en los elementos metodológicos y no en la forma pura. Esto ha

---

[3] Frente al estructuralismo de Ferdinand de Saussure (1857-1913) baste decir que sus ideas fueron fundamentales para el desarrollo de la lingüística moderna, así como del posterior movimiento del estructuralismo francés de la primera mitad del siglo XX. Sin duda, existe una fuerte influencia del estructuralismo en la nueva visión bourbakiana, pues tal como Piaget afirmara, "el estructuralismo es un método, no una doctrina".

permitido la extensión del estructuralismo a otros campos de la investigación científica.

Se entiende por estructura a un conjunto de elementos cuya naturaleza no está especificada. Para definir una estructura se da, en primer lugar, una serie de relaciones en las que han de intervenir estos elementos. En segundo lugar, se postulan sobre estas relaciones ciertas condiciones (axiomas de la estructura) que deben ser satisfechas. Así, pues, definir la teoría axiomática de una estructura implica deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura con exclusión de cualquier otra hipótesis. En resumen, cada estructura se compone de elementos, relaciones entre ellos y unos axiomas. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos los números reales se definen artificialmente como conjuntos de números enteros. También las operaciones y relaciones basadas en ellos se reducen a operaciones y relaciones entre conjuntos. En contraste, el enfoque de Bourbaki asume los números reales, sus operaciones y relaciones como datos con el fin de aislar sus propiedades de manera abstracta (Odifreddi 2006, p. 37).

Tales propiedades pueden ser de naturaleza muy variada. Si estas propiedades son leyes de composición, las correspondientes estructuras son algebraicas (por ejemplo la estructura de grupo). Los otros dos tipos de propiedades corresponden a estructuras topológicas que formulan matemáticamente las ideas intuitivas de vecindad, límite y continuidad, y las estructuras de orden (retículas). La estructura de categoría abarca las tres anteriores y se denomina estructura *abuela*. Se parte entonces de estructuras fundamentales con las que se construyen estructuras cada vez más complejas. En esto consistió el éxito de este enfoque, pues con un reducido número de *estructuras madre*, captura de mejor manera la esencia de los objetos matemáticos sin recurrir a hipótesis restrictivas o reduccionistas. La influencia de Bourbaki en la matemática posterior se evidencia en las divisiones híbridas de la matemática actual, como el álgebra topológica o la geometría algebraica, en contraste a la clásica división entre aritmética, álgebra, análisis y geometría (Odifreddi 2006, p. 38).

La matemática se presenta, por tanto, como un organismo que adquiere cada vez más cohesión y unidad, gracias a la sistematización de las relaciones existentes entre sus elementos. Las viejas pretensiones filosóficas que partían "siempre de ideas a priori sobre las relaciones de la matemática con el doble universo del mundo exterior y del mundo del pensamiento" (Bourbaki 1962, p. 37) son abandonadas. No importan los objetos con los que se opera ni la naturaleza de la operación. Los axiomas, en este sentido, adquieren un lugar preponderante, pues son estos las condiciones que deben cumplir las relaciones entre los objetos. El método axiomático es la manera de descubrir estructuras y de hacerlas inteligibles.

Bourbaki insiste en que el matemático no trabaja mecánicamente como obrero en una cadena de montaje. Por el contrario, cierta intuición particular constituye una suerte de "adivinación directa" anterior a todo razonamiento.

"Pues cada estructura lleva en sí su lenguaje propio, cargado de resonancias intuitivas particulares, provenientes de las teorías de donde las ha extraído el análisis axiomático descrito anteriormente" (Bourbaki 1962, p. 44). La intuición reina la génesis de los descubrimientos matemáticos, pero disponiendo a su vez de la teoría de los tipos de estructura y de la unificación de diferentes campos de las matemáticas, "terrenos en los que antaño parecía reinar el caos más informe" (Bourbaki 1962, p. 44).

Este nuevo sentido de la axiomatización es muy diferente al concepto tradicional de la misma. No consiste en la "larga cadena de razonamientos" de la que Descartes hace mención. Los hechos de las matemáticas son verificados y presentados por el método axiomático, pero no es el contenido mismo. Los filósofos confunden el método axiomático como un instrumento axiomático para descubrir la verdad. Han perdido la creencia que el razonamiento filosófico pueda llegar a la verdad y se han esclavizado a una superficial imitación de la verdad matemática (Rota 1991, pp. 171).

El razonamiento por silogismos es solo un mecanismo transformador aplicable a todo tipo de premisas sin caracterizar su naturaleza. Esto es, la forma exterior que usa la matemática para hacer su conocimiento comunicable a otros. Pero este es solo uno de los aspectos del método axiomático y el menos interesante. La axiomática se propone hacer justamente lo que el formalismo es incapaz de hacer: aprehender la inteligibilidad profunda de las matemáticas. Lo que en apariencia son dos teorías muy distintas entre sí,

> el método axiomático enseña a buscar las razones profundas de este descubrimiento, a encontrar las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas, a discernir estas ideas y a llevarlas a la luz (Bourbaki 1962, p. 39).

Es únicamente en este sentido de la palabra "forma" que se puede decir del método axiomático que es un "formalismo"; la unidad que confiere a la matemática no es el armazón de la lógica formal, unidad de esqueleto sin vida; es la savia nutricia de un organismo en pleno desarrollo, el instrumento flexible y fecundo de las investigaciones en las que han trabajado conscientemente, desde Gauss, todos los grandes pensadores de las matemáticas, todos los que, según la fórmula de Lejeune-Dirichlet, han tendido siempre a "sustituir el cálculo por las ideas" (Bourbaki 1962, p. 49).

Albert Lautman, filósofo francés muy cercano al grupo de Bourbaki, es quizá quien mejor entiende el viraje que significa el estructuralismo en una filosofía sintética de las matemáticas. Al intentar elaborar todas las nociones matemáticas de un reducido número de nociones y proposiciones lógicas primitivas, se pierde el carácter cualitativo e integral de las teorías matemáticas. Así, el filósofo habría de develar la armonía entre sus construcciones teoréticas con lo que la búsqueda de nociones primitivas debe ceder a un estudio sintético de conjunto. Esto es, reconocer la matemática como el desarrollo de síntesis sucesivas, donde cada etapa es irreductible a la anterior (Lautman 2011, pp. 133-140).

CONSIDERACIÓN FINAL: LA MATEMÁTICA Y EL MUNDO

Como ya se ha mostrado, el enfoque de Bourbaki se ha alejado conscientemente de las posibles implicaciones ontológicas o metafísicas de la matemática. En términos generales, ha desarrollado un enfoque muy crítico respecto a consideraciones más allá de la misma matemática, o injerencias ajenas a la misma. Este enfoque ha permitido un gran avance en la matemática contemporánea, pues la dinámica de la matemática es dictaminada por la propia matemática. Sin embargo, el grupo de Bourbaki tampoco ignora la relación de la matemática con el mundo.

En la concepción axiomática, en definitiva, las matemáticas se presentan como un depósito de formas abstractas — las estructuras matemáticas — y ocurre, sin que se sepa bien por qué, que ciertos aspectos de la realidad experimental se amoldan a algunas de estas formas, como por una pre-adaptación (Fragmento de Bourbaki tomado de Ledesma and Ferreirós 2010, p. 162).

Buena parte de los desarrollos de la matemática del siglo XX se deben al enfoque estructuralista de Bourbaki, y estos desarrollos han tenido a su vez un rol relevante en las ciencias de la naturaleza y sociales. ¿Puede pensarse que el estructuralismo no responde únicamente a un enfoque epistemológico de las matemáticas sino que describe las estructuras profundas de la realidad? ¿Se compone el mundo de estructuras y no de cosas? ¿Pueden las estructuras de la matemática coincidir con las estructuras físicas del mundo? ¿De qué manera coinciden si así lo hacen?

Lautman estuvo siempre, en el desarrollo de su corta vida académica, ligado al grupo de Bourbaki y se atrevió a formular algunas consideraciones respecto a la relación entre física y matemáticas. Contaba por un lado con la sólida formación matemática francesa y alemana del periodo de entreguerras, y tenía, por otro lado, la mirada penetrante y global del filósofo. La obra de Lautman trata de evidenciar la armonía del edificio matemático en el concepto de estructura, y sobre lo que se ha denominado un "platonismo estructural", indagar las conexiones entre realidad y matemática por medio de la estructura.

Hay un real físico, y el milagro por explicar consiste en que se requieran las teorías matemáticas más desarrolladas para interpretarlo. Hay, así mismo, un real matemático, y es también motivo de admiración el observar dominios que se resisten a la exploración hasta que se les aborda con nuevos métodos (Lautman 2011, p. 77)

Cavaillès, por su parte, presenta una interpretación de la estructura matemática más cercana a la epistemología y a la fenomenología que a la metafísica. Intenta generalizar una "filosofía del concepto" pues gracias a la estructura produce una matemática efectiva, objetiva y sin sujeto. Si "Kant sustituyó las estructuras del mundo por las estructuras de la mente, Cavaillès quiso reemplazar éstas por las estructuras de los conceptos" (Ledesma and Ferreirós 2010, p. 162).

Al respecto quizá sea pertinente reinterpretar algunas aportaciones que provienen de la filosofía en relación a la estructura. Por ejemplo, el carácter geométrico de la obra de Spinoza pueda que haya sido subvalorado. Generalmente se asume que el subtítulo de la *Ética, ordine geometrico demonstrata*, corresponde más a una estrategia expositiva que a la génesis filosófica de su pensamiento. Otro caso de posible estudio es el de la fenomenología pues Husserl se formó como matemático y conocedor de estas cuestiones en la matemática. De igual forma, es posible retomar una nueva lectura platónica de la estructura, especialmente en los diálogos del *Filebo* y el *Sofista*, los cuales son una referencia obligada de Lautman.

Desde los griegos e incluso antes, la matemática y la filosofía han desarrollado una permanente simbiosis. Es en nuestra época que hemos perdido de vista esta fructífera relación; hay quienes optan por la filosofía "porque no tiene matemáticas", y matemáticos que no encuentran mayor interés en la filosofía. Se podría plantear que la relación simplemente se perdió o que permanece presente y activa a pesar de ignorarla.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, Eric Temple. 2014. *Historia de las matemáticas*. Segunda ed. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Bombal, Fernando. 2013. "David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre." *Revista Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, pp. 123–145.

Bourbaki, Nicolás. 1962. "La arquitectura de las matemáticas". En *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* editado por François Le Lionnais, 36–49. Buenos Aires: Eudeba.

Campos, Alberto. 2008. *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen 2. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Careaga, Alfredo Alejandro. 2002. "El teorema de Gödel". Serie Hipercuadernos de Divulgación Científica. México D.F.: UNAM – Dirección General de Divulgación de la Ciencia.

Falk de Losada, Mary. 2012. *Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX. Primera parte Fundamentación*. Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

———. 2013. *Pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte Estructuralismo*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Gowers, Timothy. 2008. *Matemáticas. Una breve introducción*. Madrid: Alianza Editorial.

Kant, Immanuel. 2013. *Crítica de la razón pura*. México D.F.: Editorial Taurus.

Kline, Morris. 2016. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Lautman, Albert. 2011. *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Ledesma, Nicasio, and José Ferreirós. 2010. "Historia Cavaillès y Lautman: Repensar las matemáticas en torno a 1935." *La Gaceta de la RSME* 13 (1): 153–177.

Lentin, André. 1962. "El concepto de grupo. Su potencia y sus límites." En *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, edited by François Le Lionnais, 210–216. Buenos Aires: Eudeba.

Marcja, Annalisa, and Carlo Toffalori. 2003. *A Guide to Classical and Modern Model Theory*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Odifreddi, Piergiorgio. 2006. *La matemática del siglo XX. De los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires: Katz Editores.

Penrose, Roger. 2014. *El camino a la realidad. Una guía completa de las leyes del universo*. Quinta edición. Barcelona, España: Penguin Random House Grupo Editorial.

Rota, Gian-Carlo. 1991. "The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy." *Synthese* 88 (2): 165–178.

* * *

Óscar Javier PÉREZ LORA
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá
ojperezl@gmail.com