CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XXIV, Número 1
Enero - Marzo 1999

LA RESISTENCIA CARACTERÍSTICA DEL HORMIGÓN. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS Y DETERMINACIÓN PRÁCTICA.

José Toirac Corral *

Resumen:

Se plantea la razón de aplicar los métodos de la estadística al análisis y el diseño de las estructuras, ofreciendo de forma elemental los conceptos básicos de la estadística que resultan indispensables a los fines de este trabajo. Se definen los conceptos de la resistencia media y característica del hormigón proponiendo una forma práctica para determinar la resistencia característica del hormigón producido, válido, fundamentalmente para plantas de prefabricado y plantas de hormigón premezclado. Se ilustra, con dos ejemplos numéricos, a partir de sus respectivos resultados a nivel de laboratorio.

Palabras claves:

Hormigón, estadística de estructuras, diseño, resistencia, prefabricados.

1. Introducción

Desde hace ya algunos años, el diseño de elementos estructurales de hormigón armado se imparte en las distintas universidades del país por el Método de Estados Límites, al cual están asociadas las propiedades mecánicas del hormigón expresadas por valores característicos y ya no por los valores medios que se empleaban asociados al antiguo Método Elástico. Así las cosas, muchos proyectos estructurales especifican la calidad del hormigón en términos de la resistencia característica, lo que además

* Ingeniería, INTEC

está en concordancia con lo establecido en los Códigos y Normas de Diseño de Hormigón Armado a nivel internacional.

A pesar de todo ello, en la generalidad de los casos, tanto en la producción como en los propios laboratorios estatales y consultores no determinan el valor característico como resultado de los trabajos de caracterización de la resistencia de los hormigones por ellos controlados. Es altamente frecuente la mala práctica de pretender satisfacer la resistencia característica especificada al hormigón en el proyecto, produciéndolo sobre la base de dosificaciones diseñadas en términos del valor medio inmediato superior. La media pudiera cumplir este objetivo, pero con un 50% de los elementos de la muestra superiores y el otro 50%, inferiores a ella, tiene además el grave inconveniente de no captar la dispersión de la información con los consiguientes desaciertos que esto ocasiona en cuanto a su interpretación.

El presente trabajo tiene como objetivo llevar a técnicos y profesionales involucrados en la actividad, todos los elementos necesarios para la obtención de la resistencia característica del hormigón y su uso para el control de la calidad del hormigón producido.

2. La estadística en el cálculo de las estructuras

Los trabajos a realizar que caracterizan el Proyecto de la Estructura se agrupan en los siguientes pasos:

1. Definición de la solución estructural

2. Análisis del esquema de la estructura.

3. Diseño de las partes o elementos de la estructura incluyendo sus conexiones o juntas.

Los aspectos 2 y 3 constituyen lo que se conoce por ***cálculo de la estructura***, de ellos el análisis tiene por objetivo determinar las fuerzas interiores y los desplazamientos, todo lo cual se realiza sobre un esquema que constituye la idealización de la estructura para que le sean aplicables los métodos y procedimientos matemáticos de cuantificación. Así no se calculan las estructuras propiamente dichas, sino sus esquemas, de los cuales las ***cargas*** constituyen un elemento fundamental y representan las acciones externas que las solicitan. Las cargas más frecuentes resultan ser fuerzas, aunque suelen ser también efectos térmicos, deformaciones impuestas, etc.

Estas cargas se presentan en la práctica en distintas formas y pueden agruparse según su naturaleza; por ejemplo, ecológicas (producto del viento o sismos) permanentes, por su acción sostenida sobre la estructura (peso propio de la construcción, etc. en sus distintos componentes); de uso, propias de la función o destino que se dé a la construcción, etc.

Resulta evidente que no existirá realmente un valor exacto absoluto para definir esas cargas. Así, cuando se establece que la carga base de viento es de 175 kg/m^2; la del peso del hormigón armado, de 2500 kg/m^3; o la de uso en viviendas, de 150kg/m^2, etc., no se puede afirmar que siempre y en todas las condiciones en que estén presentes correspondan a esos valores. Se trata de valores que caracterizan, en las condiciones establecidas, esas acciones o cargas. Esto es, se trata de valores que en un análisis estadístico tienen una probabilidad, previamente admitida de no ser sobrepasados.

Si atendemos ahora a las propiedades mecánicas de los materiales que han de componer la estructura, y tendrán por tanto la función de resistir adecuadamente las fuerzas interiores que en ellos surjan como consecuencia de las cargas externas, encontramos nuevamente que no pueden establecérseles valores exactos absolutos que definan esas propiedades. En el caso particular del hormigón, por las características de sus componentes, elaboración, colocación, etc., esta situación se hace particularmente más aguda.

La resistencia definida a los materiales, en este caso al hormigón, corresponde entonces a valores que resultan del análisis estadístico y caracterizan esa resistencia sobre la base de la aceptación, previamente establecida, de una probabilidad dada de no obtenerse valores inferiores.

Los valores así definidos para las cargas y la resistencia de los materiales constituyen valores característicos, y se obtienen a partir de los conceptos y métodos de la Estadística.

En última instancia eso se relaciona con establecer una probabilidad de fallo a la estructura, es decir, definirle su factor de seguridad, el cual responde además al criterio económico que determinó las probabilidades aceptadas para establecer las cargas y las resistencias características, así como sus respectivos coeficientes de mayoración y minoración usados en el cálculo.

3. Fundamentos estadísticos

3.1 Agrupación de la información.

Se exponen de modo directo los conceptos y definiciones de los elementos estadísticos básicos indispensables para establecer la resistencia característica del hormigón.

3.1.1 Población o universo. Es todo un conjunto de elementos que tienen propiedades observables comunes.

3.1.2 Muestra. Es cualquier subconjunto de una población o universo dado. La muestra tiene carácter aleatorio cuando procede de una población donde todos sus elementos han tenido oportunidad igual e independiente de ser seleccionado para formarla.

3.1.3 Frecuencia. Es el número de resultados obtenidos de la muestra (o en la población) que se ubican dentro de límites establecidos o intervalos.

3.1.4 Distribución de frecuencia. Es la agrupación de los resultados en intervalos establecidos. Su representación gráfica constituye el histograma.

3.1.5 Marca de clase. Es el valor que define un intervalo, generalmente su valor central.

3.1.6 Polígono de frecuencia. Es la línea quebrada (poligonal) que resulta de unir las distintas frecuencias del histograma en los puntos correspondientes a su marca de clase. Puede darse en forma de proporciones, es decir, situar en cada intervalo no el valor de la frecuencia que le corresponde, sino la proporción (por ejemplo, en porcentaje) que ella representa del total de la muestra.

3.1.7 Polígono de frecuencias acumuladas. Se ubica en cada intervalo la frecuencia correspondiente a valores "menores que la marca de clases" o "la marca de clase o menores". Se traza la poligonal que una a estos puntos.

3.1.8 Percentil. Es un valor definido en una distribución de frecuencias acumuladas, al cual le corresponde una proporción dada de valores respecto al cual resultan inferiores. Por ejemplo, veinte percentil (P_{20}) es el valor respecto al cual resultan inferiores el 20% de los elementos de la muestra.

3.2 Medidas de posición o de tendencia central

3.2.1 Moda. Es el elemento de la muestra que ocurre con mayor frecuencia.

3.2.2. Media aritmética. Si se dispone de los *n* elementos de una observación, que constituye su muestra, o la población si son en total; siendo estos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, se define la Media aritmética o simplemente la Media por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

En términos generales la información estadística opera con grandes volúmenes de datos por lo cual resulta común encontrarlos no en su relación individual, sino agrupado en frecuencias, dentro de los intervalos establecidos. En ese caso la Media se obtiene según

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{K}(f_i u_i)}{\sum_{i=1}^{K} f_i} \tag{2}$$

donde:

K - es el número de intervalo

f_i - es la frecuencia del intervalo i

u_i - es Marca de clase del intervalo i

3.2.1. Mediana. Es el valor central de la distribución; por lo tanto, le corresponde el percentil 50 (P_{50}).

En una muestra de número impar de elementos se define por el valor del elemento que ubica la distribución simétrica de esos elementos. Si el número de datos o elementos es par se define por el promedio de los valores centrales. Se puede ilustrar así.

100 – 120 – 130 – 140 – 150

Mediana = 130

100 – 120 – 130 – 140 – 150 – 160

Mediana = (130 + 140) / 2 = 135

3.3 Medidas de variación de esparcimiento o de dispersión

Con frecuencia resulta necesario disponer de información respecto a la forma en que se distribuyen los elementos de la muestra, lo cual no es captado por las medidas de posición antes expuestas. A modo ilustrativo se consideran las dos muestras de hormigón siguientes:

Hormigón I: 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230 (kg /cm^2)

Hormigón II: 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215 (kg/cm^2)

En ambos casos tienen la misma Media de 200 kg/cm^2, pero no por ello son iguales.

El hormigón I tiene mayor dispersión que el hormigón II, por lo cual resulta peor.

3.3.1. Amplitud o rango. Se define numéricamente por la diferencia entre las dos observaciones (datos) extremas. La mayor menos la menor.

Para el hormigón I: 230 - 170 = 60 kg/cm^2

Para el hormigón II: 215 - 185 = 30 kg/cm^2

Este parámetro muestra la dispersión total de la información.

3.3.2. Desviación o dispersión. Es una medida de la forma en que los elementos observados se separan de su media.

En una muestra de *n* elementos x_1,... x_2,... x_i, x_n con media x

$$\text{Desviación o dispersión} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \qquad (3)$$

El concepto es válido, pero no aporta una medida de la dispersión de la información considerada, ya que numéricamente la formulación (3) resulta igual a cero.

3.3.3. Desviación media. Considera el módulo de las desviaciones de cada elemento respecto a la media de la información, con lo cual se evita el resultado numérico nulo.

Toma carácter medio al referir la suma de estos módulos al número total de elementos de la información.

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} \qquad (4)$$

Cuando la información disponible esté agrupada en frecuencias sobre intervalos definidos, se tendrá:

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |u_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (5)$$

donde:

K - es el número de intervalos

f_i - es la frecuencia de intervalo i

u_i - la Marca de clase del intervalo i

El carácter absoluto (modular) que interviene en las expresiones matemáticas ha limitado el uso práctico de este parámetro como medida de dispersión.

3.3.4. Desviación típica. En lugar de recurrir al valor absoluto o modular del término $(x_i - \bar{x})$ se plantea elevar al cuadrado y luego obtener la raíz.

Resultando de ello la expresión:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (6)$$

Constituyendo S la desviación típica.

Nótese que se ha dividido en $(n \quad 1)$ y no entre n. Con ello se logra un mejor estimado de la desviación típica de la población representada por la muestra.

Con el objetivo de obtener una expresión más cómoda para su aplicación se puede efectuar:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)}{n-1} =$$

$$= \frac{n\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right]}{n(n-1)} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

Resultando finalmente:

$$S = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (7)$$

que nos evita el tener que calcular la desviación de cada elemento respecto a la media, siendo por tanto de mayor uso práctico.

Para el caso de datos agrupados se tiene, con igual notación que la descrita para formulaciones anteriores:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}(u_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}} \qquad (8)$$

o tambien,

$$S = C\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{K} u_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{K} u_i f_i\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (9)$$

por las mismas consideraciones que dieron lugar a (7) siendo C el intervalo establecido.

3.3.5 Coeficiente de variación o Desviación típica relativa. Resulta de referir la desviación típica a la media de la muestra, quedando expresada por:

$$v = \frac{S}{\bar{x}} \qquad (10)$$

o tambien,

$$v\% = \frac{S}{\bar{x}}100 \qquad (11)$$

3.4 Curva normal de la distribución de frecuencia

Al agrupar una información (muestra) en intervalos y dibujar el correspondiente histograma, se observa que en la medida que aumenta el tamaño de la muestra y se reduce la amplitud de los intervalos, en una gran cantidad de casos la configuración de dicho histograma, o mejor aún de su polígono de frecuencias, tiende hacia una curva continua, simétrica y de una forma acampanada, que matemáticamente corresponde a la llamada Curva de Gauss y responde al lugar geométrico de la expresión:

$$Y = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - x}{S}\right)^2\right]} \qquad (12)$$

donde:

S, Y = abscisa y ordenada, respectivamente, de un punto dado de la curva;

π = constante 3,1416, aproximandamente;

e = constante 2,7183, aproximadamente;

S = desviación típica de la muestra ;

x = media aritmética de la muestra;

x_i = elemento i de la muestra.

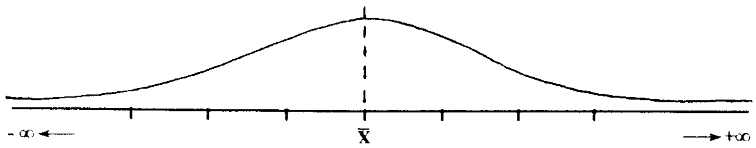


Fig. 1 Curva normal de Gauss

Esta curva de distribución normal queda definida por la media x y la desviación típica S de la muestra, y permitirá considerar en una forma generalizada las distintas distribuciones particulares normales que presente cada problema específico. Su propiedad fundamental para nuestro propósito es que el área bajo la curva, entre sus límites de abscisa $-\infty$ a $+\infty$, corresponde a la unidad. Así el área entre dos límites finitos de las abscisas a y b constituirá una fracción proporcional de ese total unitario, y corresponderá a la proporción en que la información agrupada entre la equivalencia de esos límites se presenta en la muestra considerada.

Para que la curva normal pueda ejercer ese papel general, o sea, resultar típica, hay que establecer la forma de correlacionar con ella cada distribución normal de una muestra específica. Esto se logra mediante un cambio de escala de las abscisas de la distribución particular, expresándolas en términos de la desviación típica.

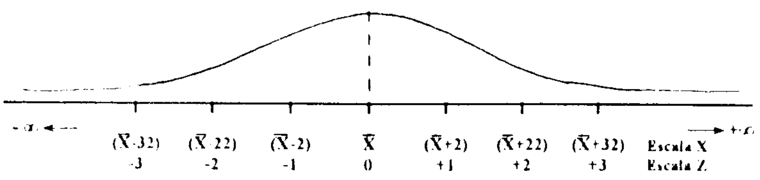


Fig. 2 Curva normal típica estándar.

Así la abscisa x_i para un punto cualquiera i corresponderá en la nueva escala a:

$$x_i = \bar{x} \pm Z_i S \tag{13}$$

$$Z_i = \pm \frac{x_i - \bar{x}}{S} \tag{14}$$

Integrando la función de Gauss entre límites definidos se obtendrá el área bajo la curva entre esos límites que, como se ha dicho, corresponde a la proporción en que se encuentran en la muestra los elementos comprendidos entre dichos límites. Para valores enteros de Z se tienen las áreas (Ω) siguientes:

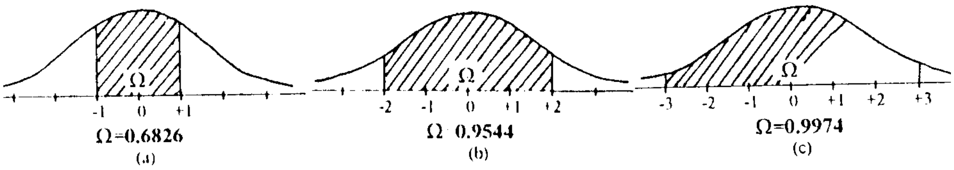


Figura 3

Dado el carácter simétrico de la curva resulta suficiente para el trabajo práctico ofrecer una tabulación de la semi área bajo la curva, para distintos valores de Z. Esto se ofrece en la Tabla 1. Para valores de Z apreciando mayor número de cifras puede consultarse la bibliografía especializada.

4. RESISTENCIA CARACTERÍSTICA DEL HORMIGÓN

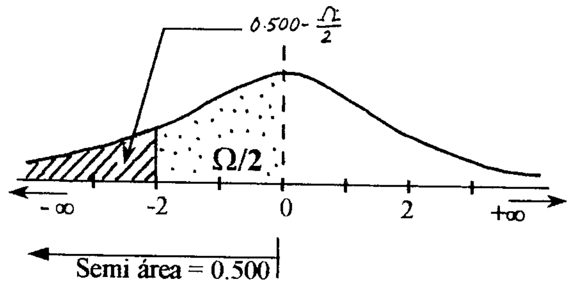
4.1 Definición general de los valores característicos.

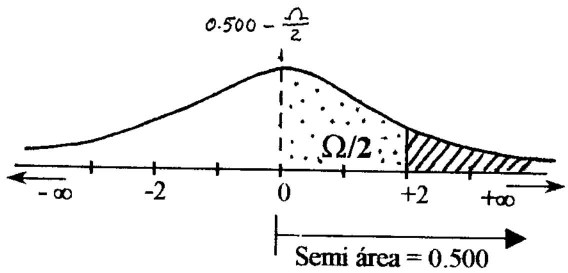
Se trata de establecer el valor que caracterice al conjunto de elementos de la muestra. La media pudiera cumplir este objetivo, pero con un 50% de los elementos de la muestra superiores y el otro 50%, inferiores a ella, tiene además el grave inconveniente de no captar la dispersión de la información.

TABLA No.1

Semiárea bajo la curva normal entre los límites de abscisa O y Z.

Z	Ω/2	Z	Ω/2
0.1	0.0398	1.6	0.4452
0.2	0.0793	1.7	0.4554
0.3	0.1179	1.8	0.4641
0.4	0.1554	1.9	0.4713
0.5	0.1915	2.0	0.4772
0.6	0.2257	2.1	0.4821
0.7	0.2580	2.2	0.4861
0.8	0.2881	2.3	0.4893
0.9	0.3159	2.4	0.4918
1.0	0.3413	2.5	0.4938
1.1	0.3643	2.6	0.4953
1.2	0.3849	2.7	0.4965
1.3	0.4032	2.8	0.4974
1.4	0.4192	2.9	0.4981
1.5	0.4332	3.0	0.4987





Como ya se planteó en (2), se establece un valor característico dentro de una muestra al aceptar una determinada probabilidad de existencia de valores superiores o inferiores a él.

Partiendo de que la muestra admite la distribución normal, se ubica el valor característico, (x_k) como aquel que se aleja en (ZS) del valor medio, y corresponde el área bajo la curva desde la abcisa (+ ZS) a + α o $-\alpha$, según el caso, a la probabilidad de obtener valores superiores o inferiores, respectivamente, al característico así establecido. Se ilustra esta situación en la Figura 4.

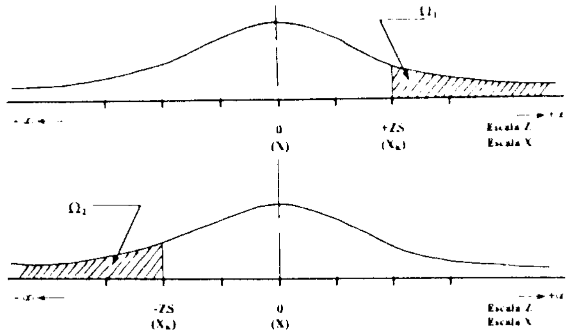


Figura 4.

El caso a) determina x_k como el valor que en un análisis estadístico, presenta la probabilidad Ω de ser sobrepasado. Esta consideración corresponde al caso de las cargas, donde lo peligroso consiste en la ocurrencia de cargas superiores a las consideradas en el proyecto.

El caso b) determina x_k como el valor que un análisis estadístico, presenta la posibilidad Ω_2 de no ser alcanzado. Esta consideración corresponde al caso de las propiedades mecánicas de los materiales, donde lo peligroso consiste en la existencia de resultados inferiores a los establecidos en el proyecto.

4.2. Formulación general del valor característico

Partiendo de la definición del punto anterior se puede formular:

$$x_K = \bar{x} \pm ZS \qquad (15)$$

despejando S de (10) y sustituyéndola en (15):

$$x_K = \bar{x} \pm Z \cdot v \cdot \bar{x} \qquad (16)$$

$$x_K = \bar{x}(1 \pm Zv) \qquad (17)$$

constituyendo esta última expresión la formulación general del valor característico x_k.

4.3. Establecimiento de la resistencia característica de un hormigón

A partir de (17) y con la notación usual para la resistencia de los materiales se puede escribir:

$$R'_{bk} = R'_{bm}\,(1 - Zv) \qquad (18)$$

Por facilidad tipográfica, se tomará la expresión siguiente, atendiendo a su similitud en otros documentos y/o Normas.

$$R'_{bk} = R'_{bm}\,(1\ \ \lambda\delta\ ) \qquad (19)$$

o

$$f'_k = f'_m(1 - \lambda\delta\ )$$

También establecemos en un 16% la probabilidad admitida de valores inferiores al característico. Esto implica que el área Ω_2 citada en 4.1 (figura 4-b) tendrá un valor de 0,16 (ver Figura 5).

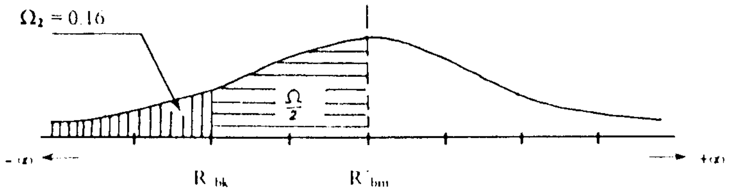


Figura 5

La semiárea total es 0,50 por lo tanto $\Omega/2 = 0{,}50 - 0{,}16 = 0{,}34$, que en la Tabla I se observa en correspondencia con $Z = 1$ Esto es, se establece el valor característico para la resistencia de hormigón como aquel que se aleja de la media en una desviación típica.

4.4 Tamaño de la muestra

Algunos han definido la estadística como la ciencia de los grandes números, esto es, que opera con grandes volúmenes de información. Así, para aplicar los procedimientos estadístico y obtener de ello el resultado confiable en el grado necesario, hay que entender que se dispongan del número suficiente de elementos de información del objeto de estudio. Vale decir que la muestra será representativa de la población en la cual pertenece entre otras cosas, si está compuesta por un número suficientemente grande de elementos.

El número mínimo de elementos de la muestra es 30; en el caso de ser inferior, pero nunca menor de 10, hay que introducir un factor de corrección en la determinación de la resistencia característica que se denomina coeficiente de Student. A continuación se incluye la corrección de este coeficiente, al definirlo en su punto 3.3 como dependiente de la probabilidad deseada y del número de elementos que componen la muestra. Como la probabilidad establecida es del 16% y hemos visto que le corresponde por este motivo el valor de uno al coeficiente λ, este resulta numéricamente determinado por el número de elementos que constituyen la muestra, o sea, resulta numéricamente igual al coeficiente de Student. En la Tabla II se dan los valores de λ.

Tabla II

Tamaño de la muestra	10	15	20	25	30 o más
λ	1.08	1.07	1.06	1.05	1.00

A modo de ejemplo ilustrativo se puede plantear un caso en que la muestra está constituida por 20 elementos, y que el valor característico se quiere obtener admitiendo solo el 5% de probabilidades de resultados inferiores. Atendiendo, respectivamente, a la Tabla I y II, se tiene:

$$\lambda = (1{,}64)\,(1{,}06) = 1{,}74$$

de donde , según la expresión (19), se tiene:

$$R'_{bk} = R'_{bm}\,(1 - 1{,}74)$$

Para muestra con 30 o más elemento y probabilidades admitidas del 16%, se tiene:

$$\lambda = (1.00)\,(1.00) = 1.00$$

reduciendo la expresión (19) a:

$$R'_{bk} = R'_{bm}(1 - \delta) \tag{20}$$

Resulta necesario aclarar que cada elemento de la muestra no tiene que corresponde necesariamente con el resultado del ensayo a compresión de una probeta. Aún más, no es recomendable que así sea. Cada elemento de la muestra debe obtenerse como el promedio de los resultados de tres probetas correspondiente al mismo hormigón, a la misma amasada (liga); así las diferencias que puedan resultar del ensayo no pueden interpretarse como variación del hormigón muestreado, pues este es el mismo, y corresponden a diferencias de las probetas, o más generalmente aún, del ensayo de su conjunto. Al reducir los valores individuales de esa probeta a un valor único dado por su media, se reduce la influencia de valores alternados por el ensayo que no representa al hormigón propiamente. Ese valor medio es el que se toma como el elemento de la muestra general.

4.5 Consideraciones para la determinación práctica de la resistencia característica del hormigón producido

La condición expuesta en el punto anterior impone ciertos requisitos para la determinación práctica de la resistencia característica del hormigón producido para la construcción. La necesidad de conocer el valor que caracteriza la resistencia a la compresión de un hormigón, y su comparación con el que ha sido establecido en el proyecto, constituyen para las obras, plantas de prefabricados y de hormigón premezclado su problema práctico en este aspecto, y está vinculado al hecho de satisfacer casuísticamente esta necesidad. Así no se trata de conocer la resistencia característica del hormigón producido en una de estas plantas durante un período de tiempo dado; por ejemplo, un mes o un año. De mucho interés práctico para este fin resulta conocer este parámetro a nivel de una empresa, en uno de estos períodos.

La seguridad de una construcción depende de la seguridad individual de cada una de sus partes componentes. La necesidad práctica de conocer la capacidad resistente del hormigón está, por lo tanto, asociada a cada una de estas partes. Esta situación resulta especialmente significativa cuando se trata de columnas aisladas de una construcción cuya importancia de fallo es de la categoría *muy grave* al construir los elementos soportantes básicos, y por ello la necesidad de conocer individualmente la calidad del hormigón que los constituye.

No se puede pretender justificar que se ha cumplido la calidad del hormigón requerido en el proyecto para cada uno de los elementos prefabricados componentes de la construcción o para sus distintas partes, si se trata de vaciados *in situ*, por el hecho de que el valor característico de la resistencia a compresión del hormigón obtenida para un período de tiempo dado, por ejemplo, un mes dentro del cual se produjeron esos elementos o partes de la construcción, cumpla lo especificado. En ese período puede ocurrir que en un determinado lote de hormigón producido, por ejemplo, la producción de un día, se produjera una caída (reducción) de la calidad del hormigón; pero al ser procesado estadísticamente sus correspondientes elementos de la muestra, dentro del conjunto de esta, no resultan suficientemente influyentes como para hacer que el conjunto incumpla el valor especificado en el proyecto. Sin embargo, lo real es que existe un grupo de elementos y que el hormigón que los constituye no cumple con lo especificado en el proyecto, y cuyo uso en la ejecución de la obra puede resultar peligroso para su seguridad.

Por lo tanto, de lo que se trata es de individualizar al máximo las propiedades del hormigón que constituye cada pieza prefabricada o cada parte de la construcción *in situ*, y sobre la base de ellos emitir la correspondiente garantía de la calidad.

Al tratar este aspecto hay que recordar, además, que la aplicación de los procedimientos estadísticos resulta lícita solo cuando se hace sobre una muestra que representa a la población o universo, y que éste se constituye como tal sólo cuando sus elementos mantienen una base de identidad común.

En nuestro caso se podrá dar la resistencia característica *de un hormigón dado*, que constituye la población o universo, si este es producido en iguales condiciones (de agregados, cementos, agua, tecnología, etc.). Por eso hay que evitar tomar elementos para hacer la muestra procedentes de distintos hormigones, y pretender después obtener, del procesamiento por los métodos estadísticos de esa muestra, parámetros que caractericen a un hormigón que de hecho no existe como tal.

Se ha de recordar también que cuando una mezcla de hormigón está ya incorporada al proceso de producción es porque ha cumplido un proceso de diseño y comprobación que consta de distintas fases con su correspondiente ensayos. En la etapa de producción se trata de cumplir rigurosamente con todos los parámetros establecidos para una sola mezcla, y los ensayos sistemáticos en esta etapa son *ensayos de control* para comprobar que efectivamente se logra lo planeado. A esto se refiere el presente trabajo.

Tomando en cuenta estas situaciones así como la imposibilidad práctica de tomar el número necesario de elementos para construir la muestra de cada amasada (liga) de hormigón producido, se propone el procedimiento siguiente:

1. La resistencia característica a la compresión se ofrecerá para el hormigón producido en un volumen o cantidad que se define como *lote*, y caracterizará esta propiedad en los elementos prefabricados u hormigón *in situ* producido. Será así la base para emitir una garantía de la calidad. Los metros cúbicos que componen el *lote* son previamente establecidos.

2. Cada *lote* de hormigón producido estará representado en la *muestra* por un *elemento* de ésta, constituido por el valor *medio* de un mínimo de tres resultados de ensayar a compresión las correspondientes probetas. Este valor se tomará como el R'_{bm}, según fórmula (19) para obtener la R'_{bk}, correspondiente a este lote de hormigón.

3. La desviación típica relativa o coeficiente de variación (δ en la fórmula 19) se obtiene de una muestra móvil constituida por los últimos 30 elementos que representan a los correspondientes lotes de hormigón producido en iguales condiciones.

Así el coeficiente δ (desviación típica relativa) adquiere carácter histórico y puede constituir un índice del grado de estabilidad de la calidad (referida a su resistencia a la compresión) del hormigón producido. Se puede llevar a un gráfico que muestre el comportamiento de este coeficiente, por ejemplo, según la Figura 6.

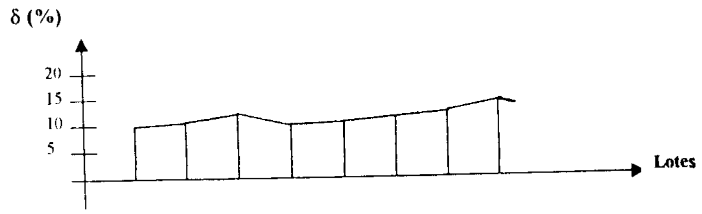


Figura 6.

En la abscisa se ha colocado el *lote* con el cual se relacionará la obtención de cada nuevo elemento de la muestra móvil de 30 elementos, cantidad esta que se mantendrá constante, pues cada incorporación de un nuevo elemento implica la eliminación del último o más antiguo, o sea, la muestra se actualiza constantemente.

La correspondencia del R_{bk} con un lote específico de hormigón producido y éste con los elementos prefabricados, o parte de la construcción *in situ* constituidos con ese hormigón, permite un alto grado de individualización de la calidad del hormigón y satisfacer la necesidad práctica que de ello se ha señalado, adecuándose de este modo el uso de los procedimientos estadísticos a esa necesidad en sus condiciones reales.

Se debe recordar por último que la representatividad de la *muestra* es un factor de importancia principal para el fin práctico perseguido. Por ello se tiene que cumplir rigurosamente todas las normas en vigencia que establece en detalle el proceso de toma, confección, conservación y ensayo de probeta, que han de ofrecer los elementos componentes de la *muestra*.

5. EJEMPLOS

5.1 Ejemplo N° 1

Se plantea como objetivo ilustrar, mediante un caso concreto, cada una de las definiciones, conceptos y procedimientos expuestos en este trabajo.

Se dispone de cincuenta elementos, correspondiente a la resistencia a la compresión de un hormigón, que dado en kg/cm^2 son los siguientes:

220	212	215	242	260	218	220	219	201	208
224	226	221	225	221	224	223	230	215	215
217	218	209	210	218	229	230	228	245	250
230	248	236	231	235	235	237	227	225	229
226	239	224	240	203	240	205	218	240	260

A partir se esta información se tiene:

a) *Población o Universo.* Está constituida por la totalidad del hormigón producido, bajo condiciones estables y del cual proceden los 50 elementos.

b) *Muestra.* Representa a la población y está compuesta por los 50 elementos dados.

c) *Intervalos de frecuencia.* Hay que fijarlos: en este caso se les asignará una amplitud de 10 kg/cm^2. Para contener toda la muestra los intervalos serán de:

201 a 210 kg/cm^2	231 a 240 kg/cm^2
211 a 220 kg/cm^2	241 a 250 kg/cm^2
221 a 230 kg/cm^2	251 a 260 kg/cm^2

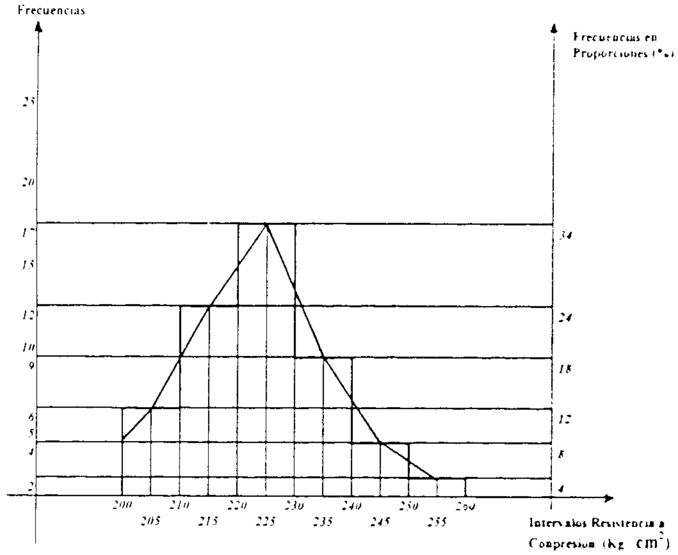


Figura 7.

d) *Distribución de frecuencias*, Se determina por el número de elementos que se ubican dentro de cada intervalo.

Intervalos	Elemento	Frecuencia
202 – 210 kg/cm²	201, 208, 209, 210, 203, 205	6 – 12%
211 – 220 kg/cm²	220, 212, 215, 218, 220, 219	
	215, 215, 217, 218, 218, 218	12 – 24%
221 – 230 kg/cm²	224, 226, 221, 225, 221, 224,	
	223, 230, 229, 230, 228, 230	
	227, 225, 229, 226, 224	17 – 34%
231 – 240 kg/cm²	236, 231, 235, 237, 239, 240	
	240, 240	9 – 18%
241 – 250 kg/cm²	242, 245, 250, 248	4 – 8%
251 – 260 kg/cm²	260, 260	2 – 4%
	Suma	50 – 100%

e) Histograma y Polígonos de frecuencias y de proporciones

f) Frecuencia acumulada y percentil

Porcentaje acumulado
"igual o menor de"

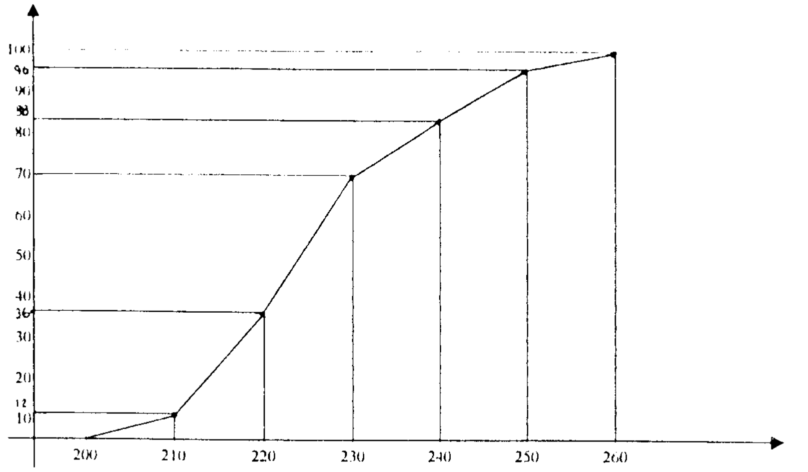


Figura 8

Resulta necesario hacer un ordenamiento general de los elementos de la muestra (ver página siguiente).

Se definió un percentil por el valor por debajo del cual se encuentra un porcentaje dado de los datos (menores de) o el valor que, incluido el cual , limita un porcentaje dado de valor inferior (igual o menor de).

Así en el primer caso, el 20 Percentil (P_{20}) corresponde en nuestro ejemplo a 217 kg/cm^2 (el 20 % de los valores son inferiores a 217 kg/cm^2 mientras que en el segundo caso el P_{20} corresponde a 215 kg/cm^2 (el 20 % de los valores son iguales a inferiores 215 kg/cm^2.

Habrá que precisar en cada caso si el percentil dado se refiere a menores de o a igual o menores de.

Observando la distribución de frecuencias acumuladas se pueden dar otros ejemplos:

Elementos	*Frecuencia*	*Frecuencia acumulada*	*Porcentaje acumulado*
Resistencia a la Compresión kg/cm^2			
201	1	1	2
203	1	2	4
205	1	3	6
208	1	4	8
209	1	5	10
210	1	6	11
212	1	7	12
215	3	10	20
217	1	11	22
218	4	15	30
219	1	16	32
220	2	18	36
221	2	20	40
223	1	21	42
224	3	24	48
225	2	26	52
226	2	28	56
227	1	29	58
228	1	30	60
229	2	32	64
230	3	35	70
231	1	36	72
235	2	38	76
236	1	39	78
237	1	40	80
239	1	41	82
240	3	44	88
242	1	45	90
245	1	46	92
248	1	47	94
250	1	48	96
260	2	50	100

Percentil	Menor de	Igual o menor de
P 10	210 Kg /cm^2	209Kg /cm^2
P 30	219 Kg /cm^2	218 Kg /cm^2
P 60	229 Kg /cm^2	228 Kg /cm^2
P 100	---	260 Kg /cm^2

Moda. Le corresponde el valor de 218 Kg /cm^2 , que representa una frecuencia de 4.

Media aritmética o simplemente, media.

Aplicando (1)

$$\bar{x} = \frac{11321}{50} = 226{,}4 Kg / cm^2$$

Procediendo con la información agrupada en frecuencias y aplicando (2)

$$\bar{x} = \frac{205 * 6 + 215 * 12 + 225 * 17 + 235 * 9 + 245 * 4 + 255 * 2}{6 + 12 + 17 + 9 + 4 + 2}$$

$$\bar{x} = 224{,}8 Kg / cm^2$$

Al adoptar la *marca de clase* como el valor central del intervalo se está suponiendo una distribución uniforme en lo que puede implicar cierto grado de aproximación respecto a la distribución real. En este caso la diferencia entre las medias obtenidas por ambas vías ha sido del 0,7%.

Mediana. Corresponde aquí a los 255 Kg/cm2 como valor central de la distribución. Se ubica en P 50

Amplitud o rango.

Observando los valores extremos de la muestra se tiene que:

260 – 201 = 59 Kg/cm^2

k) Desviación típica.

Para la información considerando cada elemento se aplica (6).

También pudo haberse aplicado (7).

Para la información agrupada en frecuencias se aplica (8).

$$S = \sqrt{\frac{(205-226)^2.6+(215-226)^2.12+(225-226)^2.17+ \\ +(235-226)^2.9+(225-226)^2.4+(225-226)^2.2}{50-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{7970}{49}} = \sqrt{162{,}25} = 12{,}8 Kg/cm^2$$

También pudo haberse aplicado (9).

La diferencia entre la aplicación de (6) y de (8) responde a la misma causa que se comentó en el punto h.

l) Coeficiente de variación o Desviación típica relativa.

Recordar que para este parámetro se han usado las notaciones V y δ

Aplicando (11)

$$V = \delta = \frac{12.8}{226}.100 = 5.7\%$$

m) Resistencia característica

Aplicando (20) se tiene

$R'_{bk} = 226\ (1 - 0.057) = 213$

$R'_{bk} = 213\ Kg/cm^2$

5.2 Ejemplo N° 2

Se plantea como objetivo ilustrar los criterios expuestos para la aplicación práctica del método estadístico a la determinación de la resistencia característica del hormigón.

Se quiere obtener la resistencia característica del hormigón con el que se produjo una serie de elementos prefabricados para los cuales el proyecto especifica una R'_{bk}=200 Kg/cm^2.

La correspondencia entre los elementos producidos y el hormigón se establece sobre la base del lote que responde a un conjunto de amasadas (ligas) producidas en condiciones idénticas y es representado por las probetas obtenidas en una de ellas. El ensayo a compresión de esas probetas en número de 3 y a la edad de 28 días resultó ser: 165, 172, 186 Kg/cm^2, y le corresponde una media de (165 + 172 + 186) / 3 =174 Kg/cm^2.

En el proceso de producción de la planta los 29 valores correspondientes a los lotes producidos inmediatamente antes y bajo iguales condiciones son:

236	194	210	229	234	227
188	236	237	243	198	232
200	195	192	205	215	188
239	229	245	237	189	232
222	221	236	228	239	

que al incluirle el de 174 obtenido en este último lote producido, constituyen los 30 elementos de la muestra móvil que nos permita obtener la desviación típica relativa a usar en el caso planteado.

Aplicando (7)

$$n = 30$$

$$\sum_{i=1}^{30}(x_i)^2 = 1442430$$

$$n(n\ 1) = 870$$

$$\left(\sum_{i=1}^{30} x_i \right)^2 = (6550)^2 = 42902500$$

$$S = \sqrt{\frac{2430 - 42902500}{870}} = 20{,}63 Kg / cm^2$$

según (1)

$$\bar{x} = \frac{6550}{30} = 218{,}13 Kg / cm^2$$

de aplicar (11) se obtiene:

$$V = \delta = \frac{20{,}63}{218{,}3} .100 = 9{,}45\%$$

La resistencia característica que representa la del hormigón con el que se han producido los elementos prefabricados citados en este ejemplo será:

Aplicando (20) con el criterio expuesto en 4.5

$$R'_{bk} = 174\ (1 - 0.0945) = 158\ kg/cm^2$$

Por lo cual, y aplicando el criterio de aceptación o rechazo establecido, los elementos prefabricados producidos con ese lote de hormigón no son aptos; tienen que ser rechazados.

Obsérvese cómo el hormigón especifico de ese lote explícitamente representado por su media, permite individualizar y acentuar su particularidad en el proceso para obtener la resistencia característica.

A modo ilustrativo se presenta a continuación la resistencia característica que se obtendrá de proceder, de forma clásica, con la muestra de 30 elementos:

$$R'_{bk} = 218.3\ (1 - 0.0945\ ) = 198\ kg/cm^2$$

Así la situación específica de estos elementos prefabricados queda enmarcada, encubierta por el conjunto de los otros lotes que componen la muestra; se obtiene una resistencia característica muy poco representativa de ellos, y puede incluso conducir al proyectista estructural a dictaminar su aceptación.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Annual Book of ASTM. STANDARDS.* Section 4. Concrete and Aggregates.
2. *Cálculo y ejecución de obras de hormigón.* Norma Cubana NC-053-039-78.
3. Freund, J.E. *Estadística Elemental Moderna.*
4. Murray, R. *Teoría y problemas de la estadística.*
5. Medina, F. y L. Ruiz. *Hormigón Armado. Diseño por estados límites.*
6. Navarro Campos. Postgrado. *Resistencia del hormigón.* Habana Cuba, 1986
7. Rodríguez Alcántara. *Fundamentos estadísticos*