CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XXVII, Número 4
Octubre - Diciembre 2002

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS EQUIVALENTES AL CAMPO NULO

Nikolay Sukhomlin*
Melvin Arias**

RESUMEN

Este articulo es una continuación del publicado por nosotros [1], por esta razón continuaremos con el orden propuesto en las secciones escribiendo un "I" antes del numero de la formula para el articulo y luego las secciones. Ahora profundizaremos mas en nuestro estudio de los campos equivalentes al campo nulo.

PALABRAS CLAVES:

Campo Equivalentes, Ecuación de Schröedinger, Grupo de Shapoválov

GENERALIDADES

En [1] mencionamos la relación para las densidades del campo equivalente ρ' y ρ (formula I.5-6). Ahora presentaremos la relación entre densidades de corriente equivalentes

$$\vec{J}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \frac{1}{s^3} a \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \qquad (1)$$

(*) **INTEC, UASD**
(**) **UASD**

Obtenemos esta formula usando la definición:

$$\mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y con la igualdad:

$$\vec{\nabla}' \times \vec{B}' = \frac{1}{s^3} a\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right).$$

Para una presentación más compacta introduciremos la matriz antisimétrica $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$.

Ahora la ecuación (I.5-3) se presenta como:

$$s^2\Omega' = a\Omega a^T + \dot{a}\, a^T \qquad (2)$$

Aquí $\vec{\omega}'$ se define con $\vec{\omega}' = \frac{e}{2m}\vec{B}'$ (frecuencia de Larmor); si $\vec{B}'(t)$ y $\vec{B}\,(t)$ son dadas entonces la matriz *a(t)* se halla de la ecuación siguiente:

$$\dot{a} = s^2\Omega' a - a\Omega \qquad (3)$$

Las soluciones particulares de esta ecuación son:

si $\Omega' = \Omega = 0$ tenemos $a_0 = const$;

si $\Omega' = 0$ y $\Omega = const \quad \Rightarrow a(t) = a_0 \exp\{-\Omega t\}$

si $s = 1$ $\Omega' = \Omega = const$, entonces la solución de la ecuación (3) es:

$$a(t) = \exp\{\Omega' t\}\, a_0 \exp\{-\Omega t\};$$

notamos que en estos tres casos la matriz constante a_0 es ortogonal:

$$a_0^T a_0 = I$$

y además, por la elección del sistema de coordenadas, a_0 puede ser la matriz unidad.

Podemos mencionar ciertas formulas y propiedades útiles:

$$\Omega^T = -\Omega,$$

$$\det\Omega = 0,$$

para cualquier vector $\vec{\eta}$ se verifica:

$$\Omega\vec{\eta} = -\vec{\omega}\times\vec{\eta};$$

$$2\vec{\omega}^T a\vec{\omega} = Tr(a^T\Omega a).$$

Si $\Omega' = 0 \Rightarrow \ddot{a} = a(\Omega^2 - \dot{\Omega})$.

La ecuación (I.5-4) ahora se puede presentar en la forma:

$$s^2\vec{\mathrm{E}}' = \frac{1}{s}a\vec{\mathrm{E}} - \frac{2m}{e}\Omega'\dot{\vec{r}}' + \frac{m}{e}(\dot{\vec{r}}'/s^2)^{\bullet}. \qquad (4)$$

Casos particulares de los campos equivalentes al campo nulo

El grupo de Shapavalov [2] para la ecuación no estacionaria de Schrödinger es (I.4-11):

$$t' = t'(t);\ \frac{dt'}{dt} \equiv s^2 \neq 0 \qquad (5a)$$

$$\vec{r}'(t) = s(t)a(t)\vec{r} + \vec{c}(t);\ aa^T = I;\ \Psi' = \Psi s^{-3/2}. \qquad (5b)$$

con las relaciones (3) y (4) ahora el campo equivalente al campo nulo ($\vec{E}' = \vec{B}' = 0$):

$$\dot{a} = -a\Omega, \qquad (6a)$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{m}{e} s\, a^T \left(b\vec{r} + \vec{d}\right) \qquad (6b)$$

denotamos la matriz

$$b \equiv \left[\frac{(sa)^{\bullet}}{s^2}\right]^{\bullet} \equiv -a\left[\alpha\, I + \beta\left(\dot{\Omega} - \Omega^2\right)\right]$$

$$\text{con } \alpha \equiv \left(\frac{1}{s}\right)^{\bullet\bullet}, \quad \beta \equiv \frac{1}{s}.$$

Observamos que el campo mas amplio, equivalente al campo nulo, puede contener el campo magnético dependiendo únicamente del tiempo: $\vec{B} = \vec{B}(t)$; mientras que el campo eléctrico es lineal relacionado a $\vec{r}$, con los coeficientes matriciales que dependen del tiempo. De otra manera la formula (5b) se puede presentar como:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{m}{e}\left[\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\vec{r} - s a \vec{d}\right] \quad (7)$$

donde el segundo termino representa la fuerza centrífuga. También en el caso general podemos calcular el producto escalar entre $\vec{E}$ *y* $\vec{B}$:

$$\vec{E} \bullet \vec{B} = -\left(\vec{\omega}^T a^T b\right)\vec{r} - \vec{\omega}^T a^T \vec{d} \qquad (8)$$

Claro que tales campos no son ortogonales en el caso general; el ángulo entre ellos se define por

$$\cos\left(\vec{\mathrm{E}},\vec{\mathrm{B}}\right) = -\frac{\vec{\omega}^T a^T \left(b\vec{r}+\vec{d}\right)}{\sqrt{\left(b\vec{r}+\vec{d}\right)^2}\sqrt{\vec{\omega}^2}} \qquad (9)$$

Teorema. A la clase de los campos equivalentes al campo nulo pertenece el campo $\vec{\mathrm{E}} \perp \vec{\mathrm{B}}$.

Demostración: Si imponemos $\vec{\mathrm{E}} \bullet \vec{\mathrm{B}} = 0$ entonces de la formula (8) tenemos :

$$b^T a \vec{\mathrm{B}} = 0 \qquad (10a)$$

$$\vec{d}^T a \vec{\mathrm{B}} = 0 \qquad (10b)$$

Existe la solución general de la ecuación (10b):

$\vec{d} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{c}(t) = t'(t)\vec{c}_0$ con ($\vec{c}_0 = const$ que puede ser cero). La ecuación (10 a) tiene la solución sí y solo sí $\det b = 0$.

Visto (6c):

$$\det b = \det\left[\alpha I + \beta\left(\dot{\Omega} - \Omega^2\right)\right] = 0$$

y usando que $\left(\Omega^2\right)_{ij} = -\vec{\omega}^2\delta_{ij} + \omega_i\omega_j$, encontramos :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 + 2\omega^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\dot{\omega}^2 + \omega^4\right)\frac{\alpha}{\beta} + \omega^2\dot{\omega}^2 - \left(\vec{\omega} \bullet \dot{\vec{\omega}}\right)^2 = 0 \cdot$$

Esta ecuación algebraica de tercer orden relacionada a $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, con $\omega^2 \equiv \vec{\omega}^2$ dada, siempre tiene al menos una solución real (tratada ya en varios libros de referencias). Entonces la condición

$\vec{E} \bullet \vec{B} = 0$ se verifica para cualquier campo

$$\vec{B} = \vec{B}(t) \ .$$

Conclusión:

1) Todos los campos equivalentes al campo nulo que no son ortogonales son equivalentes al campo ortogonal .Es importante observar que la "transformación" de las coordenadas incluye necesariamente la transformación del tiempo:

$$s \neq const \cdot$$

2) Sin embargo si imponemos $s = 1$ tenemos, como condición de ortogonalidad $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0$ (notamos que este caso es tratado en [1] y no es general como está presentada en el artículo).

Ahora presentaremos la densidad de carga y la corriente de probabilidad de un campo equivalente al campo nulo. Usando la formula (I.5-6) y la (1) hallamos:

$$\rho = \frac{2m\varepsilon_0}{e}\vec{\omega}^2 + \frac{3m}{e}s\left(\frac{1}{s}\right)^{\bullet\bullet} ; \text{(11a)}$$

$$\vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 m}{e}\left\{\left[\alpha I + \beta\left(\dot{\Omega} - \Omega^2\right)\right]^{\bullet}\vec{r} - \left(a^T\vec{d}\right)^{\bullet}\right\} \text{(11b)}$$

Oscilador isotrópico

Usando la formula (7) vemos que si $\vec{\omega} = 0, \vec{c} = 0$ tenemos el campo del oscilador isotrópico:

$$\vec{E} = \frac{m}{e} s \left(\frac{1}{s}\right)^{\bullet\bullet} \vec{r}$$

lo que corresponde a la energía potencial

$$U = \frac{m\omega_0^2 r^2}{2}$$

con $\omega_0 = const$. (note que ω_0 no tiene ninguna relación $\vec{\omega}$)

Esta forma impone la relación conocida como ecuación de un oscilador armónico: visto el grupo de Shapovalov (5a) tenemos:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\bullet\bullet} + \omega_0^2 \frac{1}{s} = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{dt'}{dt} \equiv s^2 = \sec^2(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad t' = tg(\omega_0 t), \quad \vec{r}' = s\vec{r} \ (13)$$

Dicha transformación pone en relación la ecuación de Schrödinger libre

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t'} = H'\Psi' = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \Psi' \ (14)$$

con la del oscilador isotrópico :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega_0^2 r^2}{2}\right]\Psi \qquad (15)$$

Las soluciones de la última ecuación (15) son bien conocidas en la literatura (véase por ejemplo [3]). Observamos que estos estados se encuentran por la medida del conjunto de integrales de movimiento siguientes:

$\vec{L}^2$ L_z y la energía E.

Notamos que además de la transformación (13) se necesita usar la *invariancia de aforo* (gauge invariance):

$$\Psi'(t',\vec{r}') = \frac{\Psi(t,\vec{r})}{s^{3/2}} \exp\left\{ i\frac{m}{2\hbar}\frac{\dot{s}}{s} r^2 \right\} \quad (16)$$

con la función de onda:

$$\Psi_{nlm}(t,\vec{r}) = \varphi_{nlm}(\vec{r}) \exp\left\{ -i\frac{E_{nl}}{\hbar}t \right\};$$

$$E_{nl} = \hbar\omega_0\left(2n + l + \frac{3}{2}\right); \quad n,l = 0,1,2,...; \quad m = 0,\pm1,\pm2,...,\pm l;$$

$$\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\xi} R_{nl}(\xi)\,\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) \text{ con } \xi \equiv r\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}.$$

Aquí $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ son las armónicas esféricas y $R_{nl}(\xi)$ son las funciones radiales que se presentan en la función de los polinomios: funciones hipergeométricas degeneradas [3]. Las soluciones no estacionarias (16) de la ecuación de Schrödinger libre son conocidas en la literatura como *estados coherentes*. Por ejemplo, la función del estado fundamental que verifica la ecuación (14) se puede escribir así:

$$\Psi'_{000}(t',\vec{r}') = \frac{const}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{s^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{m\omega_0}{2\hbar}\frac{1-i\omega_0 t'}{s^2} r'^2 - i\frac{3}{2} artg(\omega_0 t) \right\}$$

aquí vista formula (13) $s^2 = 1 + (t')^2$.

Núcleo del grupo de Shapavalov.

Es interesante hallar el conjunto de transformaciones que ponen en equivalencia el campo nulo a él mismo ,llamado el núcleo del grupo de Shapavalo. Al imponer $\vec{E}' = \vec{B}' = \vec{E} = \vec{B} = 0$, encontramos de (6a) y (6b): $a = const$; luego constatamos que tal núcleo se presenta como el producto cartesiano de dos subgrupos:

a) *grupo galileano:*

$t' = \alpha^2 t + \beta$;

$\vec{r}' = \alpha a \vec{r} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$; $\Psi' = \alpha^{-3}\Psi$ con $\alpha, \beta, a, \vec{v}_0, \vec{r}_0$ constantes;

b) ***grupo "de inversión":***

$$t' = -\frac{1}{t} \; ; \; \vec{r}' = \frac{1}{t}\vec{r} \; ; \; \Psi'(t', \vec{r}') = \Psi(t, \vec{r})\frac{t^{3/2}}{i^3}\exp\left\{-i\frac{m}{2\hbar}\frac{\vec{r}^2}{t}\right\}.$$

En este subgrupo entran: la inversión de coordenadas y la transformación idéntica. Observamos que ambos subgrupos del núcleo son conocidas en la literatura [4].

Densidad de corriente.

Sea la solución (I.6-4) que es la función propia del operador $\tilde{\vec{X}} = a\,\vec{p}$; entonces la densidad de flujo:

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\, grad\, \overline{\Psi} - \overline{\Psi} grad\, \Psi\right) = \frac{a^T \vec{\lambda}}{m}|\Psi|^2 \equiv \frac{\vec{p}}{m}|\Psi|^2 .$$

Recordamos que el *cuasi-impetu* se presente asi: $a^T \vec{\lambda}$. Las funciones (I.6-4) se pueden normalizar de manera que describe un flujo de partículas cuya densidad sea igual a uno (es decir un flujo en el cual por unidad de superficie de su sección transversal pasa, por término medio, una partícula en la unidad de tiempo) esta función será: $\Psi = \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(\frac{i\vec{p}}{\hbar}\vec{r} - iEt\right)$.

donde $v \equiv |\vec{v}|$ es la norma de la velocidad de la partícula. En efecto, sustituyéndola en $\vec{J}$, obtenemos: $\vec{J} = \frac{\vec{p}}{mv}$, es decir,un vector unidad en la dirección del movimiento [5].

BIBLIOGRAFÍA

1. N. Sukhomlin, M. Arias, J. López, J. Liriano," Grupo de Shapavalov para la ecuación de Schrödinger", *Ciencias Hoy*,Universidad Autónoma de Santo Domingo, 2001, mayo, n.7, pp. 3-5.
2. V. Shapovalov, N. Sukhomlin," Separación de variables en la ecuación de Schrödinger no estacionaria", *Izvestia Vissihij Uchebnij Zavedenii, Fisica*, 1974, n.12, pp. 100-105.
3. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics, vol.* I, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1971, problem 65.
4. C. Boyer," The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potencial"; *Helv. Phys. Acta*, 1979, v. 47, 589-605.
5. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Curso abreviado de física teórica libro 2.* Mecánica cuántica. Editorial Mir, Moscú., 1979, p. 75.