CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XXVIII, Número 4
Octubre-Diciembre 2003

TALLER: USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA TI-92 EN LA CLASE DE ÁLGEBRA SUPERIOR

Antonia Medrano Disla *

Introducción

Cada día es más común que los profesores integremos la tecnología a las clases de matemática.

La calculadora gráfica TI-92, HP, así como otras similares ponen al estudiante al nivel de la tecnología. Recordemos que es la época de la telemática.

La Calculadora como instrumento de trabajo

- Optimiza el tiempo en los cálculos.
- Minimiza los errores.
- Evita la fatiga frente a cálculos complicados.
- Evita bloqueos por la fobia a la simbólica matemática.

Están presentes los soportes; verbales, simbólico-matemático y gráficos.

* Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Santo Domingo.

El aprendizaje de la matemática con calculadora permite al estudiante en cierta medida, experimentar, visualizar, generalizar y plantear conjeturas, así como mantener el interés.

¿Qué haremos?

1. ¿Cómo usar la calculadora? Teclas-funciones.
2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Algoritmo de solución.
3. Solución de ecuaciones con determinantes.
4. Operaciones con matrices.
5. Resultados dudosos de la calculadora que lleva al usuario a desarrollar una actitud crítica hacia los resultados. Importancia de los contenidos conceptuales.
6. Resolver ecuaciones de raíces racionales e irracionales.

¿En cuáles temas de Álgebra podemos trabajar con la calculadora TI-92?

I- Operaciones con matrices.

1.1) Suma de matrices.

1.2) Multiplicaciones de matrices.

1.3) Inversa de una matriz.

1.4) Solución de ecuaciones matriciales.

II- Sistemas de ecuaciones lineales.

III- Determinantes.

3.1) Cálculo de determinantes,

3.2) Solución de ecuaciones con determinantes.

IV-Teoría general de ecuaciones.

4.1) Evaluar polinomios.

4.2) Factorizar expresiones algebraicas.

4.3) Resolver ecuaciones de raíces racionales e irracionales.

1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por el método de **eliminación Gaussiana.**

1° La Matriz ampliada: A'= [A:b], ya que todo sistema puede ser escrito como un producto matricial de la forma: Ax = b; es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes   Matriz de las incógnitas   Matriz de términos independientes

$$A' = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

2° Hacer reducciones en A' para convertirla en una Matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -11 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_1+2f_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

3° Sistema reducido:

$E_1 : x + y + 2z = 9$

$E_2 : 2y - 7z = -17$

$E_3 : -z = -3$

4° Sustitución hacia atrás:

En E3 multiplicamos por (-1); Z=3

$2y-7\{3)=-17$

Sustituimos z en E2: $2y = -17+ 21$

$y=2$

$x+2+2(3) = 9$

Sustituimos z, y en E1: $x=9-8$

$x=1$

Solución: $\{(1,2,3)\}$

Algoritmo para la Ti-92:

$\boxed{\text{on}}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{1}$

$\boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{(-)}\ \boxed{3}$

$\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{6}\ \boxed{,}\ \boxed{(-)}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\div}$

$\boxed{,}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{,}\ \boxed{9}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{0}$

$\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\div}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{enter}}$

Se visualiza como: ([A], [B])

Solución: $\begin{Bmatrix} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{Bmatrix}$

sistema propuesto $\begin{cases} 2x+4y+6z=18 \\ 4x+5y+6z=24 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$ Solución:{(4,-2,3)}

2. Resolver ecuaciones con determinantes:

$\begin{vmatrix} X-2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$ solución:

$3(x-2)-10=5$

$3x-6-10-=5$

$3x=5+16$

$3x=21$

$x=7$

Con la TI-92 Introducir como *solve* $\left(\det\left(\begin{bmatrix} x-2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)=5,x\right)$

on	F2	enter	2nd	5	4	2	2nd	,	x
--	2	,	5	2nd	m	2	,	3	
2nd	÷	)	=	5	,	x	)	enter	

Solución: X = 7

$$\begin{vmatrix} x-2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \; ; \quad \text{solución}$$

$3(x-2)-10=-3+14+144+21-48$

$3x-6-10=122$

$3x=138$

$x=46$

Con la TI-92:

$\boxed{\text{on}}\ \boxed{\text{F2}}\ \boxed{\text{enter}}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{,}\ \boxed{\text{x}}$

$\boxed{--}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{2nd}}$

$\boxed{\div}\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{,}\ \boxed{1}$

$\boxed{,}\ \boxed{8}\ \boxed{,}\ \boxed{7}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{(-)}\ \boxed{1}\ \boxed{,}$

$\boxed{6}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{m}}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\div}$

$\boxed{)}\ \boxed{,}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{enter}}$

Se visualiza como:

$$solve\left(\det\left(\begin{bmatrix} x\text{-}2 & 5 \\ & 2 \; 3 \end{bmatrix}\right) = \text{sol}\left(\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right), x\right)\right)$$

Propuestos: Determina a x en cada caso

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3x & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 25$

Propósitos

- Realizar operaciones matriciales: suma, resta, multiplicación e inversa de una matriz.
- Resolver ecuaciones de raíces racionales e irracionales.

Inversa de una Matriz:

En álgebra de matrices no se define la división de forma directa, sino a partir de la multiplicación.

Si A es una matriz cuadrada, su inversa será del mismo orden y se designa por A^{-1} y el producto de A x A^{-1} = I.

Aplicación de matriz inversa:

La utilizamos para escribir Álgebraes de la forma AX = B.

Álgebra de los números	**Álgebra de matrices**
$2x = 5$	$AX = B$
$(^1/_2)\, 2X = (^1/_2) 5$	$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$X = {}^5/_2$	$IX = A^{-1}B$
	$X = A^{-1}B$

Existen diferentes métodos para resolver inversa de una matriz. Veremos algunos.

Ej. Si $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcule $M^{-1} = ?$

Solución:

Sea B la matriz inversa; $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces M x B =I.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a - 3c & 2b - 3d \\ a - c & b - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrito como sistema:

$E_1 : 2a - 3c = 1$

$E_2 : 2b - 3d = 0$

$E_3 : a - c = 0 \longrightarrow a = c$

$E_4 : b - d = 1$

Sustituyo a en E_1 : $2c-3c = 1 \Rightarrow c = -1$ y $a = -1$

$-3E_4 + E_2 = -3b+3d = -3$

$2b-3d = 0$

$-b) = -3 \Rightarrow b = 3$ Sust: b en E_4:

$-d = 1-b$

$d = b-1 \Rightarrow d = 2$

Por lo tanto la inversa es: $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ej2: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$

Solución: por los adjuntos o Cofactores de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [Aij]^T$$

1. Det. $A = 12+6+6-9-6-8 = 1 \neq 0$ es no singular y tiene inversa.

$$2.\ A = [Aij]^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$3.\ A^{-1} = [A]^T \quad = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otro método para encontrar A^{-1}

1. Hacemos la matriz ampliada [A : I]
2. Hacemos reducciones hasta convertir la matriz A en una unidad y la de la izquierda será la inversa.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} * \\ -f_1+f_2 \\ -f_1+f_3 \end{array} \cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]^{-2f_2+f_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]^{-3f_3+f_1} \cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En estos procedimientos tediosos es que la calculadora ayuda a optimizar el tiempo.

Actividades Propuestas:

1. Encuentre las inversas de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ? \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Calcular y escribir algoritmo para Operaciones con matrices:

2.1) Suma de matrices.

2.2) Multiplicaciones de matrices.

2.3) Inversa de una matriz.

2.4) Soluci6n de ecuaciones matriciales.

Resolver ecuaciones de raíces racionales

3.1) $f(x)=4x^4-4x^3-25x^2+x+6=O$ sol = $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = {}^1/_2 \\ x_3 = -{}^1/_2 \\ x_4 = 3 \end{array} \right\}$

$$3.2)\quad f(x)= x^5 - x^4/_2 + 3x^3 - {}^3/_2x^2 - 4x + 2 = O \quad sol = \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = {}^1/_2 \\ x_4 = 2i \\ x_5 = -2i \end{array}\right\}$$

=

De raíces irracionales:

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+6=O \Rightarrow sol= \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1.678... \\ x_2 = 4.17759... \\ x_3 = -0.85559 \end{array}\right\}$$

4. $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6 = O$

Después de encender el calculador debo situarme en álgebra:

$$\boxed{\text{F2}} \longrightarrow \boxed{\text{Enter}} \longrightarrow \boxed{\text{Ecuación}} \longrightarrow \boxed{\,,\,} \longrightarrow \boxed{x} \longrightarrow$$

Primer Momento: Elaboración de algoritmos en equipos de trabajo.

Segundo Momento: Verificar e intercambiar con otro equipo de trabajo.

Tercer Momento: socialización con todo el curso, de los diferentes algoritmos.

Algunas reflexiones:

El estudiante antes que todo debe tener el dominio conceptual. Las calculadoras, los software son herramientas que agilizan los cálculos, los procedimientos.

Veamos algunos casos.

1. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, entonces es posible A*B=?

2. Encuentre el determinante: $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

3. Resolver los sistemas:

$$3.1)\begin{cases} x_1+x_2\,2x_3+4x_4=10\\ 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=-3\\ 3x_1+3x_2+x_3+x_4=7\\ 4x_1+4x_2-x_3+7x_4=17\end{cases}\qquad 3.2)\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+x_4=4\\ 2x_1+5x_2-2x_3+4x_4=6\end{cases}$$

Si nos detenemos en lo conceptual:

Caso 1: Se ve que es imposible A *B porque no son conformes. Aunque el calculador le recuerda la información.

Caso 2: Este en especifico se ve por simple inspección que la f_2 es combinación de la $f_1 : f_2 = 2f_1$.

Caso 3: El sistema 3.1 tiene dos columnas con los mismos coeficientes; es decir, tiene dos líneas dependientes, por lo que ya no será de 4x4 ni tendrá solución única.

Es evidente que en el 3.2 hay mas incógnitas que ecuaciones.

Estos sistemas se resuelven aplicando el teorema de Rouché Frobenius.

"Es condición necesaria y suficiente que el sistema de ecuaciones admita una solución (al menos que la característica o rango de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada A^1 sean iguales" Consecuencias del teorema de Rouché-Frobenius.

1. Si $r(A) = r(A')$ y r = n, el sistema es compatible con solución única.
2. Si. $r(A) = r(A')$ y r < n, el sistema es indeterminado con infinitas soluciones.

   Tenemos que darles valores arbitrarios a algunas variables; para obtener soluciones particulares. Se calcula: n-r y el resultado serán las incógnitas no principales que asumen valores arbitrarios.