CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XXIX, Número 1
Enero-Marzo 2004

ESTUDIO DE SIMETRÍA Y DE POSIBILIDADES DE LA RESOLUCIÓN EXACTA DE LAS ECUACIONES DE SCHRÖDINGER Y HAMILTON - JACOBI PARA UN SISTEMA AISLADO

Primera Parte: Clasificación de los operadores de simetría hacia tercer orden

Nikolay Sukhomlin*
Melvin Arias**

RESUMEN

Este articulo representa la primera parte de los resultados de nuestras últimas investigaciones. Actualmente el estudio de simetría de las ecuaciones diferenciales se considera como la etapa principal para abordar la construcción de las soluciones exactas y también como el método de búsqueda de los sistemas de coordenadas privilegiadas (los que permiten la separación de variables). En la seguna parte del artículo vamos a concentramos sobre estos temas; aquí sólo estudiamos los operadores de simetría y los clasificamos. Encontramos ocho agrupaciones de clases de equivalencia de los operadores de simetría del tercer orden (estos resultados son nuevos) y seis clases de equivalencia de los operadores del orden 1 y 2

* Universidad INTEC: Ciencias Básicas y Ambientales
** Universidad Autónoma de Santo Domingo: Departamento de Física

(estos resultados son presentados en la forma más sencilla que los que se conocen).

PALABRAS CLAVE

Simetría, ecuaciones de Schrödinger y Hamilton-Jacobi

Introducción

Sea la ecuación de Schrodinger para una partícula libre en una dimensión:

$$\hat{A}\psi \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)\psi(t, x) = 0 \tag{1}$$

El problema de resolución exacta de esta ecuación y el estudio de su simetría fue planteado y estudiado durante varios decenios: véase [1, 2] y su bibliografía, nuestros artículos [3, 4], etc. Por ejemplo, fueron construidos los operadores de simetría hacia segundo orden y encontradas las soluciones interesantes [5]. El problema de clasificación de los operadores de simetría (las primeras integrales de movimiento) para una partícula cuántica fue planteado en nuestro articulo [6] y desarrollado en [4].

En este articulo presentamos el estudio sistemático de la clasificación de los operadores de simetría hacia tercer orden, encontramos los resultados nuevos y ordenamos, precisamos y corregimos los resultados conocidos.

1. Las transformaciones de equivalencia

Planteamos el problema de las transformaciones que no varían la estructura de la ecuación (1). Aplicándole a la ecuación (1) la transformación siguiente:

$$t' = t'(t),$$
$$x' = x'(t, x)$$
$$\psi(t, x) = a(t, x)\,\psi'(t', x') \qquad (2)$$

e imponiendo la conservación de la estructura de la ecuación (1) encontramos dos subgrupos de transformación:

1) Grupo de Galileo G:

$$t' = \alpha^2 (t - t_0), \qquad (3\text{ a})$$

$$x' = \alpha (x - pt - x_0), \qquad (3\text{ b})$$

$$\psi'(t', x') = \psi(t, x)\exp\left\{ i\frac{p^2}{2}t - ipx \right\}, \qquad (3\text{ c})$$

$$a(t, x) = \exp\left\{ -i\frac{p^2}{2}t + ipx \right\}. \qquad (3\text{ d})$$

aquí α $(\alpha \neq 0)$, t_0, p, x_0 son las constantes cualesquiera. Observamos que la constante α puede tener cualquier signo y la transformación (3) incluye la reflexión de la coordenada x.

2) **Grupo discreto** N: $\{\nu, \nu^2, \nu^3, \nu^4\}$ cuya transformación "puntual" ν se define así:

$$t' = -1/t, \tag{4 a}$$

$$x' = x / t, \tag{4 b}$$

$$\psi'(t', x') = \psi(t, x) \sqrt{t} \exp\left\{-i \frac{x^2}{2t}\right\}, \tag{4 c}$$

$$a(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{ i \frac{x^2}{2t} \right\}. \tag{4 d}$$

Notamos que ν^4 representa la transformación idéntica y ν^2 describe la reflexión de la coordenada x y a la multiplicación simultanea de la función de onda por $-i$. Es fácil verificar que la ecuación (1) se transforma en cada caso de la manera siguiente:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)\psi(t, x) = a(t, x)\, s^2(t) \left(i\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right)\psi'(t', x') = 0,$$

donde $s^2(t) \equiv dt'/dt \neq 0$ y la función $a(t, x)$ está definida por las relaciones (3 d) y (4 d).

Las mencionadas transformaciones se conocen en la literatura [1-3], pero tal representación sistemática es nueva.

Usando el grupo total de transformaciones de equivalencia $G \otimes N$ podemos realizar la clasificación de los operadores de simetría.

2. Clasificación de los operadores de simetría del primer orden

Usando la condición de conmutación con el operador de la ecuación (1): $\left[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}\right] = 0$ buscamos los operadores lineales con respecto al momento:

$$\hat{\mathrm{B}} = -\alpha(t, x)\, i \frac{\partial}{\partial x} + \beta(t, x).$$

Se conoce que el resultado se presente como la combinación lineal de tres operadores de base:

$$\hat{\mathrm{B}} = m\hat{\mathrm{B}}_1 + n\hat{\mathrm{B}}_2 + r\hat{\mathrm{B}}_3 \quad (m, n, r - const) \qquad (5\text{ a})$$

$$\hat{\mathrm{B}}_1 \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{\mathrm{B}}_2 \equiv it\frac{\partial}{\partial x} + x, \quad \hat{\mathrm{B}}_1 \equiv 1. \qquad (5\text{ b})$$

Aquí el operador de simetría $\hat{\mathrm{B}}_1$ corresponde a la ley de conservación del momento lineal y el operador $\hat{\mathrm{B}}_2$ a la conservación de la coordenada inicial. El operador $\hat{\mathrm{B}}_3$ es operador trivial: es evidente que cualquier constante está en conmutación con un operador lineal. Estudiamos ahora la transformación de estos operadores generada por cada subgrupo de equivalencia:

1) Sea el subgrupo G:

$$a^{-1}\hat{B}_1 a(t,x) = \alpha\, \hat{B}_1' + p \equiv \alpha(-i\partial/\partial x') + p \qquad (6\text{ a})$$

$$a^{-1}\hat{B}_2 a(t,x) = \alpha^{-1}\hat{B}_2' - \alpha\, t_0\, \hat{B}_1' + x_0 \qquad (6\text{ b})$$

Concluimos que si en (5 a) $n \neq 0$, entonces por la elección $t_0 = m/n\alpha$ y $nx_0 = -r$ siempre es posible eliminar los términos con $\hat{B}_1$, $\hat{B}_3$. Si $n = 0$ entonces se queda sólo el operador $\hat{B}_1$: el término con $\hat{B}_3$ se elimino por la elección de la constante p. Entonces el subgrupo G permite reducir todo conjunto de los operadores de tipo (5 a) a sólo dos clases, cuyos representantes más sencillos son $\hat{B}_2$ y $\hat{B}_1$ (aquí despreciamos los primas en los operadores). Vamos a ver que estas clases son equivalentes relacionadas con las transformaciones del subgrupo N.

2) Sea el subgrupo N:

$$a^{-1}\hat{B}_1\, a(t,x) = \hat{B}_2' \equiv it'\partial/\partial x' + x' \qquad (7\text{ a})$$

$$a^{-1}\hat{B}_2\, a(t,.x) = -\hat{B}_1' \qquad (7\text{ b})$$

El hecho de que el subgrupo de equivalencia (4 a) y (4 b) transforma mutuamente $\hat{B}_1$ en $\hat{B}_2$ y viceversa, está demostrado en nuestro articulo [4]. Así concluimos que todos los operadores de tipo (5 a) entran en una sola clase de equivalencia relacionada con el grupo total $G \otimes N$ cuyo representante más sencillo es $\hat{B}_1$ (o $\hat{B}_2$, a nuestra elección).

3. Clasificación de los operadores de simetría hacia tercer orden

Buscamos un operador de tercer orden:

$$\hat{B} = i a(t,x)\frac{\partial^3}{\partial x^3} - b(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - ic(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + d(t,x) + if(t,x)\frac{\partial}{\partial t}$$

de la condición de conmutación $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$. Después de cálculos sencillos obtenemos las funciones: a, b, c, d, f, lo que nos permite presentar dicho operador como una combinación cubica de tres operadores de base (5 b):

$$\hat{B} = \rho \hat{B}_2^3 + \beta\left(\hat{B}_2^2 \hat{B}_1 + \hat{B}_1 \hat{B}_2^2\right) + \gamma\left(\hat{B}_1^2 \hat{B}_2 + \hat{B}_2 \hat{B}_1^2\right) + \delta \hat{B}_1^3 +$$
$$+ \varepsilon \hat{B}_2^2 + \xi\left(\hat{B}_1 \hat{B}_2 + \hat{B}_2 \hat{B}_1\right) + \mu \hat{B}_1^2 + \nu \hat{B}_2 + \eta \hat{B}_1 + \theta \cdot \hat{B}_3 \qquad (8)$$

donde las constantes $\rho, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \mu, \nu, \eta, \theta$ son cualesquiera. Ahora con la transformación (3) del subgrupo G y las formulas (7) empezamos la clasificación de los operadores de simetría de tercer orden (8):

$$
\begin{aligned}
&1.\ \hat{B}_2^3+\left(\hat{B}_2\hat{B}_1^2+\hat{B}_1^2\hat{B}_2\right)+\omega\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&2.\ \hat{B}_2^3-\left(\hat{B}_2\hat{B}_1^2+\hat{B}_1^2\hat{B}_2\right)+\omega\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&3.\ \hat{B}_2^3+\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&4.\ \hat{B}_2^3-\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&5.\ \hat{B}_2^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&6.\ \hat{B}_2^2\hat{B}_1+\hat{B}_1\hat{B}_2^2+\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1, \quad (9)\\
&7.\ \hat{B}_2^2\hat{B}_1+\hat{B}_1\hat{B}_2^2-\hat{B}_1^3+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&8.\ \hat{B}_2^2\hat{B}_1+\hat{B}_1\hat{B}_2^2+\mu\hat{B}_1^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&9.\ \hat{B}_2\hat{B}_1^2+\hat{B}_1^2\hat{B}_2+\hat{B}_2^2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&10.\ \hat{B}_2\hat{B}_1^2+\hat{B}_1^2\hat{B}_2+\nu\hat{B}_2+\eta\hat{B}_1,\\
&11.\ \hat{B}_1^3+\hat{B}_2^2+\eta\hat{B}_1,\\
&12.\ \hat{B}_1^3+\eta\hat{B}_1.
\end{aligned}
$$

Aquí ω, μ, ν, η son las constantes (los parámetros) cualesquiera. Si en la formula (8) todos los coeficientes delante de los operadores de tercer orden se anulan, pasamos a la clasificación de los operadores de segundo orden:

1. $\hat{B}_2^2 + \hat{B}_1^2,$ (10 a)

2. $\hat{B}_2^2 - \hat{B}_1^2,$ (10 b)

3. $\hat{B}_2\hat{B}_1 + \hat{B}_1\hat{B}_2$ (10 c)

4. $\hat{B}_1^2 + \hat{B}_2,$ (10 d)

5. $\hat{B}_1^2.$ (10 e)

También conocemos del párrafo 2 que todos los operadores del primer orden se agrupan en una sola clase de equivalencia:

1. $\hat{B}_1.$ (11)

Ahora podemos establecer equivalencia de algunas clases de los operadores de simetría usando las transformaciones del subgrupo N (4) y las formulas (6). Así encontramos que las clases 9 y 10 de los operadores del tercer orden de las formulas (9) son equivalentes a la clase 8 para los valores específicos del parámetro μ. De la misma manera, las clases 11 y 12 de las formulas (9) entran como casos particulares en la clase 5. Estos resultados permiten formular el teorema siguiente.

Teorema 1. *Sea el operador* $\hat{A}$ *de la ecuación* (1). *Todos los operadores lineales diferenciales hacia tercer orden que conmutan con* $\hat{A}$ *entran en una de* 14 *clases de equivalencia siguientes:*

los operadores del tercer orden: clases de 1 a 8 de la formula (9),
los operadores del segundo orden: clases de 1 a 5 de la formula (10).
los operadores del primer orden: una sola clase de la formula (11).

Notamos que todas las clases de los operadores del tercer orden son parametrizadas por tres o cuatro parámetros cualesquiera, lo que significa que en realidad tenemos no ocho clases, sino ocho agrupaciones de clases de equivalencia de los operadores de simetria. Contrariamente a este hecho, los representantes más sencillos de seis clases de equivalencia de los operadores del primer y del segundo orden no tienen ningún parámetro.

En nuestro articulo [3] encontramos todas las 5 clases de los operadores del segundo orden, pero los representantes mencionados contienen algunos parámetros. Aquí comprobamos que estos resultados se pueden simplificar: véase la formula (10). La solución particular de la ecuación de Schrödinger (1) en la forma de una onda sin dispersión del articulo [5] también entra en nuestra clasificación mientras que sea parametrizada: la integral de movimiento correspondiente entra en la clase de equivalencia 4 de la formula (10).

Además en nuestro trabajo antecedente [3] hacemos la distinción entre las clases $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ de los operadores del primer orden. El estudio actual muestra que éste es inútil visto que estos operadores son equivalentes con respecto al subgrupo N. La clasificación de los operadores de simetría hacia el segundo orden mencionada en el libro [2] no corresponde a la nuestra porque está hecha en función de la posibilidad de separar las variables en la ecuación (1). Observamos que el autor menciona también seis clases de los operadores del segundo y del primer orden.

Concluimos que la clasificación definida por el Teorema 1 contiene todos los casos conocidos en la literatura de los operadores de simetría y es más compacta que ciertas clasificaciones antecedentes. Todos los resultados relacionados con los operadores del tercer orden son nuevos. También podría ser interesante estudiar los operadores de simetría que no están en conmutación con el operador $\hat{A}$ de la ecuación (1), sino solo en el caso cuando el conmutador sea proporcional a $\hat{A}$.

Bibliografía

1. C. Boyer (1974), "The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential", *Helv. Phys. Acta*, v. 47, 589 – 605.

2. W. Miller, Jr., *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1977.

3. N. Sukhomlin, T. Shovgurova (1982), *Simmetry and exact solutions of the Schrodinger ecuación* I, Preprint, VINITI, Elista Stat University.

4. N. Sukhomlin, M. Arias (2003), Electromagnetic fields classification in the no relativist mechanics (in publication).

5. Americashki

6. V. Shapovalov, N. Sukhomlin (1974), "Separation of variables in the Schrodinger equation", Sov. Phys. Rev., 1975, v.