

**ESTUDIO DE ELEMENTO ESTRUCTURAL CON APOYO  
DESLIZANTE**

---

**Ing. Santiago A. Suárez P. MS. \***

**RESUMEN**

Con el advenimiento de las computadoras digitales y la masificación de su uso fué posible viabilizar el análisis matricial de las estructuras. Se han desarrollado matrices de rigidez para elementos con diferentes tipos de restricciones. En este trabajo se desarrollará la matriz de rigidez de un elemento con apoyo deslizante en uno de sus nodos y se utilizarán estos resultados para analizar una estructura que tiene una barra apoyada de esta manera. Se realizará una comprobación de los resultados, analizando la estructura usando un metodo clásico no matricial y se compararán los resultados. Al final se llega a conclusiones que conducirán a una definición más exacta del termino "rigidez".

**PALABRAS CLAVE**

Estructura; apoyos: restricciones; rigidez.

**ABSTRACT**

With the upcoming of the digital computers and its massive use it was possible to determine the matrix analysis of the structures. They have developed matrix of rigidity for elements with different types from restrictions. In this work the matrix of rigidity of an element with sliding support in one of its nodes will be developed and these results will be used to analyze a structure that has a supported bar this way. A verification of the results will be made, analyzing the structure using a classic nonmatrix method and the results will be compared. In the end conclusions are taken that will lead to a more exact definition of the term "rigidity".

**KEYWORDS:**

*Structure; supports: restrictions; rigidity.*

---

\* Ingeniería, INTEC  
mail: ssuarez@intec.edu.do

El advenimiento de las computadoras digitales significó para la ingeniería estructural un gran paso de avance, pues permitió la implementación de una poderosa herramienta de cálculo conocida como Análisis Matricial de Estructuras. A partir de esa realidad ha habido un gran desarrollo en el estudio de todo lo relativo con esta forma de cálculo, y es nuestro objetivo en este trabajo, desarrollar la matriz de rigidez de un elemento en el cual uno de sus nodos tenga la posibilidad de moverse en una dirección cualquiera a través de un apoyo de tipo deslizante.

Como es sabido, un punto ubicado en un plano tiene la posibilidad de moverse, a lo sumo, según tres direcciones independientes, a saber, dos traslaciones y una rotación; En un elemento estructural que esta conectado a dos puntos extremos habrá entonces 6 patrones de movimiento diferentes; si este elemento se restringe contra toda posibilidad de movimiento, se tornará cinemáticamente determinado. El estudio de la rigidez del elemento, resultante de uno cualquiera de los movimientos que se han restringido, se hace liberando al elemento de la restricción impuesta en la dirección de ese movimiento y calculando las acciones estructurales que se derivan de esto. Cuando se ha hecho este cálculo para las 6 restricciones, las acciones calculadas, escritas organizadamente, constituyen la matriz de rigidez del elemento.

En el caso que nos ocupa, las restricciones impuestas serán 5, en vista de que, como se ha planteado, este elemento tendrá un apoyo de tipo deslizante y por lo tanto las acciones derivadas de ese movimiento son nulas, por tratarse de un movimiento de cuerpo rígido.

Existen varias técnicas para calcular las acciones producidas en una barra por un desplazamiento; entre las más usadas para estos fines están: el **método de la viga conjugada**, el uso de **funciones de forma**, métodos basados en el **principio de conservación de la energía**, entre otras. Para el estudio que llevaremos a cabo utilizaremos el **método de las fuerzas ó de compatibilidad de deformaciones**, por considerarlo el más apropiado en este caso.

En la Fig 1. se muestra el modelo estructural del elemento y se identifican las direcciones de los posibles movimientos del mismo. Como se dijo

anteriormente, el movimiento en la dirección de deslizamiento del apoyo no se puede incluir por tratarse en ese caso de un movimiento como cuerpo rígido que no produce acciones estructurales.

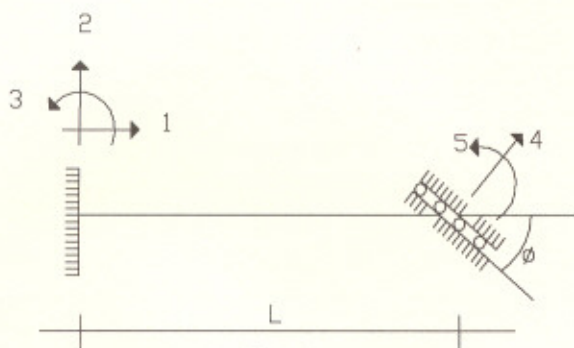


Fig. 1

Puesto que un empotramiento puede transmitir 2 componentes independientes de fuerzas y un momento, es ventajoso analizar el elemento en unas direcciones tales que uno de los ejes coordenados ( El eje X-X en este caso) coincida con la dirección de deslizamiento del apoyo deslizante. Llamaremos a estos ejes:  $X_g, Y_g$ . En la figura 2 se muestran los ejes  $X_g, Y_g$  así como los ejes denominados  $X_p, Y_p$ . Note que el ángulo entre estos ejes se mide del eje  $X_g$ , al eje  $X_p$  en dirección antihoraria.

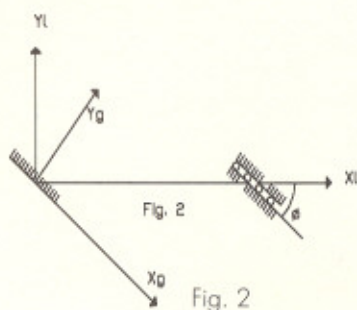


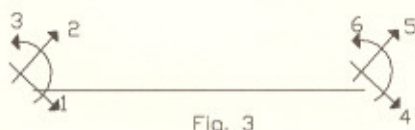
Fig. 2

Fig. 2

Luego de realizar los cálculos descritos anteriormente se procederá a expresar la matriz de rigidez calculada en dirección de los ejes  $X_p, Y_p$ . Esto se lleva a cabo mediante la transformación matricial  $[K_p] = [T][K_g][T^T]$  (Ec- 1). Aquí  $[T]$  es la matriz de transformación de coordenadas y  $[T^T]$  es la transpuesta de dicha matriz.

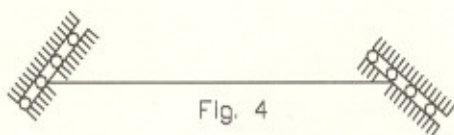


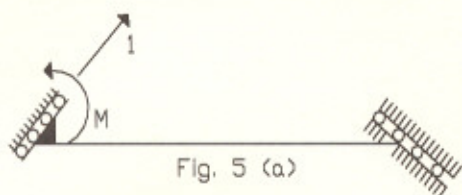
En la figura 3 se han reenumerado los posibles movimientos, o grados de libertad, según las direcciones Xg, Yg. Se hace evidente que los movimientos del elemento en las direcciones 1 y 4 son movimientos de cuerpo rígido y por lo tanto no producen acciones estructurales, quedando solamente por estudiar los movimientos en las direcciones 2, 3, 5 y 6.



### Movimiento en la dirección 2

Para estudiar este movimiento y las acciones producidas por el mismo, liberamos el elemento de la restricción en esa dirección resultando una estructura hiperestática de primer grado, Fig.4, la cual se calculará por el método de las fuerzas. Se elige como incógnita hiperestática el momento denominado M, en la Fig 5; y le aplicamos una fuerza unitaria en la dirección 2. Esto se hace así pues para calcular el desplazamiento en la dirección 2 según el método del trabajo virtual, se aplicará nuevamente una fuerza unitaria en la dirección 2; La deformación así calculada se conoce como la flexibilidad del elemento en la dirección 2, es decir, la deformación del elemento en la dirección considerada causada por una fuerza unitaria actuando en esa misma dirección. Se nota que esta fuerza introduce tanto flexión como fuerza axial en el elemento y por lo tanto ambos efectos deben ser considerados en el cálculo de las deformaciones.





$$\delta_{10} = -\frac{L^2 \cos \phi}{2EI}$$

Ec-2

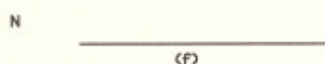
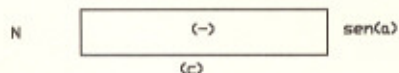
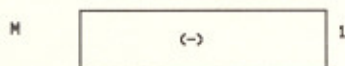
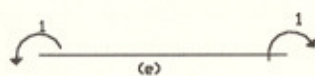
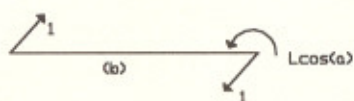
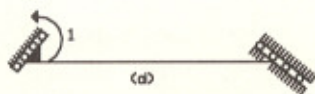
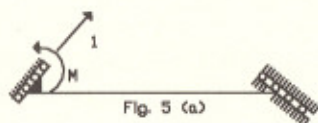
$$\delta_{11} = \frac{L}{EI}$$

Ec-3

$$M = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{L \cos \phi}{2}$$

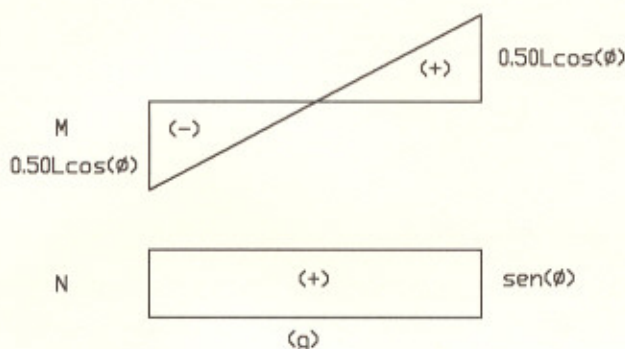
Ec-4

### Análisis estructural del sistema base.



Con estos resultados, los diagramas definitivos de momento flexionante y fuerza axial serán los mostrados en la Fig 5g.

## DIAGRAMAS DEFINITIVOS



Y la deformación en la dirección 2 causada por una fuerza unitaria aplicada en la dirección 2, es decir, la flexibilidad en esa dirección se calcula según el método del trabajo virtual como:

$$\delta = \int \frac{Mm dx}{EI} + \sum \frac{NnL}{AE} \quad \text{Ec-5}$$

$$\delta = \frac{2}{3} \left[ \frac{L \cos \alpha}{2} \right]^2 \left[ \frac{L}{2EI} \right] + \frac{L \text{sen}^2 \alpha}{AE} \quad \text{Ec-6}$$

y puesto que la rigidez es el inverso de la flexibilidad:

$$K = \frac{1}{\frac{L^3 \cos^2 \alpha}{12EI} + \frac{L \text{sen}^2 \alpha}{AE}} \quad \text{Ec-7}$$

para fines de organización llamaremos a este término  $k_{22}$  en la matriz de rigidez, y los otros términos correspondientes a este movimiento, se calculan por proporcionalidad de la ley elástica y resultan ser:

$$k_{32} = \left[ \frac{1}{2} L \cos \alpha \right] k_{22} \quad \text{Ec-8}$$

$$k_{52} = -k_{22} \quad \text{Ec-9}$$

$$k_{62} = k_{32} \quad \text{Ec-10}$$

### Movimiento en la dirección 3

Para estudiar el movimiento en la dirección 3 y las acciones resultantes liberamos la estructura de la restricción en la dirección 3, resultando una estructura hiperestática de primer grado, la cual se estudia con ayuda de los métodos antes expuestos y se obtienen los elementos de la columna 3 de la matriz de rigidez, que se resumen a continuación:

$$k_{33} = \frac{(L \cos \alpha)^3}{\frac{L^3 \cos^2 \alpha (-m + m^2)}{3EI} + \frac{L [(1+m) \operatorname{sen} \alpha]}{AE}} \quad \text{Ec-11}$$

$$\text{siendo } m = \frac{\frac{L^3 \cos^2 \alpha}{3EI} - \frac{L \operatorname{sen}^2 \alpha}{AE}}{\frac{L^3 \cos^2 \alpha}{3EI} + \frac{L \operatorname{sen}^2 \alpha}{AE}} \quad \text{Ec-12}$$

$$k_{23} = \frac{k_{33} (1+m)}{L \cos \alpha} = k_{32} \quad \text{Ec-13}$$

$$k_{53} = -k_{23} \quad \text{Ec-14}$$

$$k_{63} = m k_{33} \quad \text{Ec-15}$$

Finalmente, el estudio de los movimientos en las direcciones 5 y 6 dará los mismos resultados (con los signos adecuados), que los movimientos en las direcciones 2 y 3, resultando la matriz del elemento de la siguiente forma:

$$k_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{32} & 0 & -k_{22} & k_{32} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & -k_{32} & m k_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{22} & -k_{32} & 0 & k_{22} & -k_{32} \\ 0 & k_{32} & m k_{33} & 0 & -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Ec-16}$$

Como fue dicho anteriormente la matriz de rigidez expresada en coordenadas  $X_p, Y_p$ , se calcula por medio de la transformación matricial:

$$[k_l] = [T][k_g][T^T] \quad \text{Ec-17}$$

siendo  $[T]$  la matriz de transformación de coordenadas dada por:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec-18}$$

El resultado de esta transformación es la matriz de rigidez en coordenadas locales, del elemento con apoyo deslizante, la cual se muestra a continuación



$k_{22} \text{sen}^2 \alpha$	$k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$k_{32} \text{sen} \alpha$	$-k_{22} \text{sen}^2 \alpha$	$-k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$k_{32} \text{sen} \alpha$
$k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$k_{22} \cos^2 \alpha$	$k_{32} \cos \alpha$	$-k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$-k_{22} \cos^2 \alpha$	$k_{32} \cos \alpha$
$k_{32} \text{sen} \alpha$	$k_{32} \cos \alpha$	$k_{33}$	$-k_{32} \text{sen} \alpha$	$-k_{32} \cos \alpha$	$m k_{33}$
$-k_{22} \text{sen}^2 \alpha$	$-k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$-k_{32} \text{sen} \alpha$	$k_{22} \text{sen}^2 \alpha$	$k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$-k_{32} \text{sen} \alpha$
$-k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$-k_{22} \cos^2 \alpha$	$-k_{32} \cos \alpha$	$k_{22} \text{sen} \alpha \cos \alpha$	$k_{22} \cos^2 \alpha$	$-k_{32} \cos \alpha$
$k_{32} \text{sen} \alpha$	$k_{32} \cos \alpha$	$m k_{33}$	$-k_{32} \text{sen} \alpha$	$-k_{32} \cos \alpha$	$k_{33}$

A continuación presentaremos un ejemplo teórico del uso del concepto que hemos desarrollado. El ejemplo consiste en el análisis estructural del pórtico mostrado en la Fig 6.

Supongamos que la barra 4 este unida en el nudo 5 mediante un apoyo del tipo deslizante que hemos estudiado con un ángulo de deslizamiento de 0 grados, es decir, que puede deslizarse horizontalmente dentro del nudo 5. El sentido común nos indica que para la sollicitación mostrada, la columna 1 debe absorber toda la carga de 10 toneladas aplicada al nudo 4 y que la viga 1, al poder deslizarse libremente en dirección horizontal, no tomara carga axial alguna. Los cálculos se presentan a continuación en formato matricial y fueron elaborados en una pagina Excel. En la Fig 7 se describen los grados de libertad considerados. La estructura fue resuelta también por el método de las fuerzas, [ver anexo 1] dando resultados coincidentes.

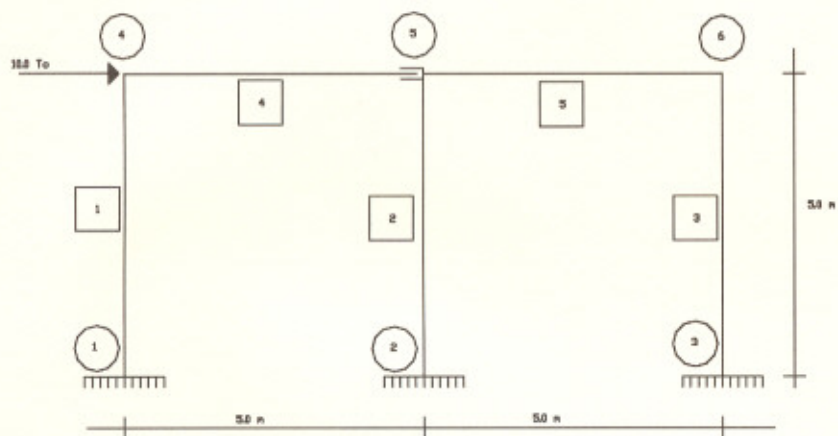


Fig. 6

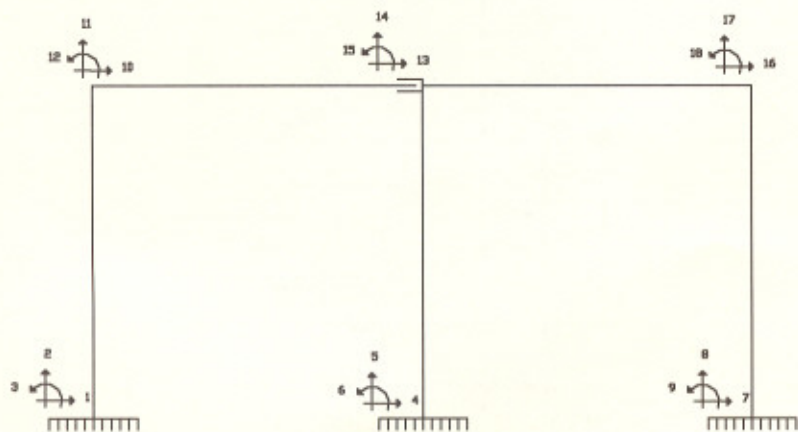
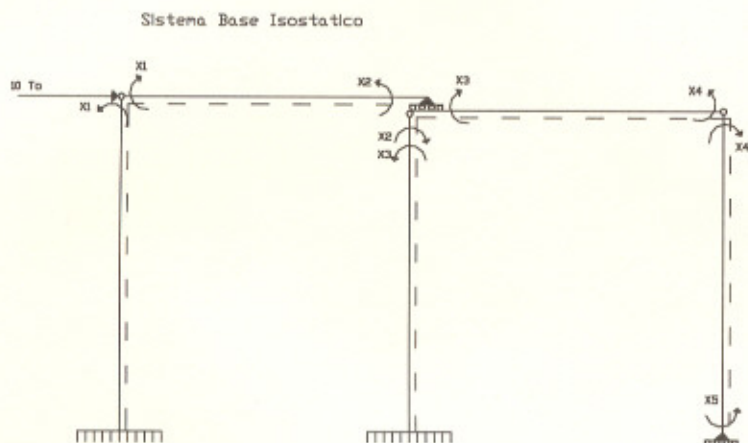


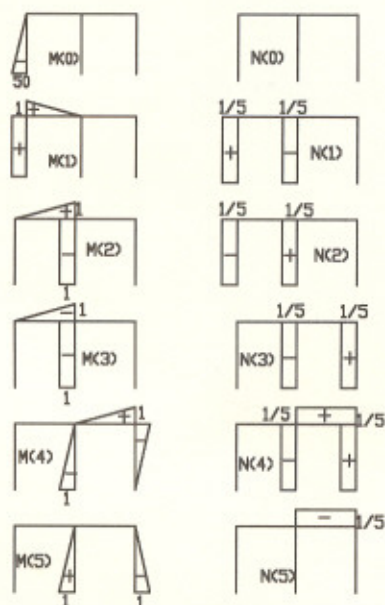
Fig. 7

## ANEXO 1

### Solucion por el método de las fuerzas



Diagramas de Momentos y Axiales en el Sistema Base Isostático.



## Conclusiones

Al finalizar este estudio debemos reconocer que su valor es mayormente teórico hasta ahora; y quizá el mayor aporte que puede obtenerse del mismo es la conclusión de que la rigidez debe definirse como *el valor de la acción que debe ser aplicada en un punto, en una dirección específica para producir un desplazamiento unitario relativo de dicho punto CON RELACION A SU POSICIÓN NO DEFORMADA en la dirección de la acción aplicada*, en vez de la definición tradicional, que considera el desplazamiento relativo del punto con relación al nodo opuesto de la barra. Nuestra definición se ajusta perfectamente a la condición de que los demás desplazamientos en el elemento considerado deben ser nulos cuando se provoque el desplazamiento unitario en la dirección específica para la cual se calcula la rigidez. Nótese por ejemplo que de acuerdo a una definición que implique un desplazamiento relativo entre los extremos del elemento, si el ángulo de deslizamiento del apoyo es cero la barra debería tener una rigidez infinita para producir ese desplazamiento relativo, en virtud de que en ese caso se movería como cuerpo rígido, y como se ha hecho notar, un movimiento de ese tipo no produce acciones estructurales en el elemento; en cambio, si el desplazamiento se considera como relativo del punto en cuestión con relación a su posición no deformada, la rigidez en este caso es cero como debe ser.

Otro resultado digno de notar es que en un elemento de este tipo el coeficiente de transmisión de momento cuando se estudia la rigidez en la dirección 3 ó 6 no es el familiar  $+(1/2)$ , sino que es un valor que varía en función del ángulo de deslizamiento y va desde  $+(1/2)$  para un ángulo de 0 grados hasta  $-(1.00)$  para un ángulo de 90 grados.

Aunque este estudio está en el campo de lo puramente teórico, esperamos que sea una contribución que enriquezca el conocimiento, ayude en la precisión de los conceptos envueltos y sirva en el futuro, cuando pueda encontrarse una aplicación práctica del mismo.



## **Bibliografía**

- Davies, G. *Virtual Work in Structural Analysis.*: John Wiley. Chichester
- Hirschfeld, K. 1975. *Estática en la Construcción.* Editorial Reverte.
- Hibbeler, R. 1979. *Análisis Estructural.* Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Kanchi, M. B. 1981. *Matrix Methods of Structural Analysis.*: John Wiley, New York.
- Kardestuncer, H. 1975. *Introducción al Análisis Estructural con Matrices.* McGraw-Hill.
- Laursen, H. 1978. *Structural Analysis.* McGraw-Hill, New York
- Livesley, R. K. 1975. *MATRIX METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS.* Pergamon Press, Oxford.
- McGuire, W. 1979. *Matrix Structural Analysis.* John Wiley, New York
- McMinn, S. J 1964. *Matrices for Structural Analysis.* E. & F. N Spon Limited, London
- Przemieniecki, J. S. 1968. *Theory of Matrix Structural Analysis.* McGraw Hill.
- Wang, C. 1979. *Introducción al Análisis Estructural con Métodos Matriciales.* Compañía Editorial Continental.

Recibido: 25/08/05

Aprobado: 12/01/06