

PLANEACION DE LA PRODUCCION MEDIANTE PROGRAMACION LINEAL

Marcos Moya Navarro*

RESUMEN

El siguiente artículo es el primero de una serie sobre las aplicaciones de la programación lineal al campo de la producción industrial. Este contiene un plan de producción para cuatro productos, y toma un horizonte de planeación de tres períodos. También presenta el programa de producción para los cuatro productos en el primer período.

INTRODUCCION

Hasta hace poco tiempo, la programación lineal no había tenido mucho auge debido a la gran cantidad de cálculos que hay que realizar, lo que la hace aparentemente muy ineficiente. Pero, con el desarrollo que las computadoras están teniendo actualmente, esta limitación se ve minimizada.

Una de las grandes aplicaciones que tiene esta técnica es la de planear la producción para varios productos y con multiperíodos.

El modelo matemático que conviene aplicar es el siguiente:

$$\text{MIN } X_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^t A_{ijk} Y_{ijk}$$

Sujeto A:

$$\sum_{k=j}^t Y_{ijk} \leq P_{ij}; \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,T)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k Y_{ijk} = D_k; \quad (k=1,2,\dots,T)$$

Donde: $Y_{ijk} \geq 0$; para todo i, j, k .

Y_{ijk} : Producción de la fuente i en el período j para satisfacer los requerimientos de consumo del período k .

A_{ijk} : Es el costo variable por hora de una unidad de producto producida en la fuente de producción i , fabricada en el período de tiempo j , y almacenada hasta el período de tiempo k cuando es consumida.

El coeficiente de costo A_{ijk} se calcula como sigue:

$$A_{ijk} = C_{ij} + H_j + H_{j+1} + \dots + H_{k+1}; \quad (k \geq j)$$

Si no existe la política de pedidos pendientes, $Y_{ijk} = 0$ para todo $k < j$. Esto quiere decir que nunca se puede gastar una unidad de producto i antes de ser producida. Para efectos computacionales esto se logra asignando en la función objetivo, un valor muy grande a A_{ijk} .

A continuación se ilustrará, mediante un problema, el proceso de planeación y programación de la producción para el caso en que se tienen cuatro productos y un horizonte de planeación de tres períodos. Cada período tiene una duración de un mes.

Se tiene la información que se presenta como Cuadros No. 1 y No. 2.

CALCULO DE LA DISPONIBILIDAD DE HORAS DE PRODUCCION MENSUAL

Las operaciones 2 y 5 son las operaciones limitantes del proceso debido a que son las que menos máquinas tienen, y por consiguiente las horas

* Profesor del Departamento de Producción Industrial del ITCR

CUADRO No. 1. Información para un problema sobre el proceso de planeación y programación de la producción

Pro-ducto	Máquina número para					Tiempos de Procesamiento					Tiempos de Ciclo
	Oper. 1	Oper. 2	Oper. 3	Oper. 4	Oper. 5	Oper. 1	Oper. 2	Oper. 3	Oper. 4	Oper. 5	
1	2	1	3	4	5	0,04	0,05	0,05	0,03	0,03	0,20
2	1	2	3	5	4	0,15	0,10	0,10	0,20	0,08	0,63
3	1	3	2	-	5	0,05	0,05	0,03	-	0,02	0,15
4	2	3	1	4	5	0,10	0,10	0,12	0,12	0,05	0,49
Número de máquinas disponibles						10	8	9	9	8	

CUADRO Nº 2

Período	Nº días laborables
1	22
2	19
3	21

máquina mensuales disponibles son menores en estas operaciones. Debe aclararse que esto no quiere decir que sean estas máquinas las que limitan la capacidad de producción, pues ello depende de los tiempos estándares.

Para el período 1 se tiene:

$$8 \text{ máq.} \cdot \frac{8 \text{ horas}}{\text{máq.-día}} \cdot \frac{22 \text{ días}}{\text{mes}} = 1408 \text{ h/mes}$$

Período 2:

$$8 \text{ máq.} \cdot \frac{8 \text{ horas}}{\text{máq.-día}} \cdot \frac{19 \text{ días}}{\text{mes}} = 1216 \text{ h/mes}$$

Período 3:

$$8 \text{ máq.} \cdot \frac{8 \text{ horas}}{\text{máq.-día}} \cdot \frac{21 \text{ días}}{\text{mes}} = 1344 \text{ h/mes}$$

La política de la empresa es trabajar como máximo 2 horas extra al día. Además se invierten 40 colones en mano de obra directa por cada hora-hombre trabajada, y el costo de llevar inventario se estima en 1,50 colones por mes por cada hora de producto almacenado, para consumirse posteriormente.

El siguiente paso para resolver este problema consiste en calcular los requerimientos de producción, usando la siguiente relación:

$$\text{Requer. Produc.} = \text{Demanda Pronosticada} + \text{Inventario Seguridad} - \text{Inventario Inicial}$$

El Cuadro No. 3 resume esta información

Del Cuadro No. 3 y del cálculo anterior de los requerimientos de producción en horas, se resume el Cuadro No. 4.

Se procede ahora a formular el modelo de programación lineal que permitirá construir el plan de producción para cuatro productos y para tres períodos de planeación. Para resolver esta formulación se usó el paquete de programación lineal EZLP desarrollado en el Instituto Tecnológico de Georgia, EE.UU.

CUADRO No. 3

	Producto 1			Producto 2			Producto 3			Producto 4		
	per. 1	per. 2	per. 3	per. 1	per. 2	per. 3	per. 1	per. 2	per. 3	per. 1	per. 2	per. 3
Inv. Inic.	600	320	536	10	20	55	50	55	185	0	33	66
Pronóstic.	1600	2680	6010	100	275	480	550	1850	2770	220	440	960
Inv. Seg.	320	536	1202	20	55	96	55	185	277	33	66	144
Req. Prod. (Unidades)	1320	2896	6676	110	310	521	555	1980	2862	253	473	1038
Req. Prod. (Horas)	264	580	1335	69	196	329	83	297	430	124	232	508

CUADRO N° 4

Período	Horas totales requeridas	Horas totales disponibles
1	540	1408
2	1305	1216
3	2602	1344

EZLP - Version 11/15/77

Type help if you have questions otherwise proceed

XO

MIN XO: 60PRDORD11 + 61.5PRDORD12 + 63PRDORD13 + 60DISPORD1 + &
 80PRDEX11 + 81.5PRDEX12 + 83PRDEX13 + &
 999PRDORD21 + 60PRDORD22 + 61.5PRDORD23 + 60DISPORD2 + &
 999PRDEX21 + 80PRDEX22 + 81.5PRDEX23 + &
 999PRDORD31 + 999PRDORD32 + 60PRDORD33 + 60DISPORD3 + &
 999PRDEX31 + 999PRDEX32 + 80PRDEX33

R1

ST R1: PRDORD11 + PRDORD12 + PRDORD13 + DISPORD1 = 1408

R2

AND R2: PRDEX11 + PRDEX12 + PRDEX13 + DISPEX1 = 352

R3

AND R3: PRDORD22 + PRDORD23 + DISPORD2 = 1216

R4

AND R4: PRDEX22 + PRDEX23 + DISPEX2 = 304

R5

AND R5: PRDORD33 + DISPORD3 = 1344

18

R6

AND R6: $PRDEX33 + DISPEX3 = 336$

R7

AND R7: $PRDORD11 + PRDEX11 = 540$

R8

AND R8: $PRDORD12 + PRDEX12 + PRDORD22 + PRDEX22 = 1305$

R9

AND R9: $PRDORD13 + PRDEX13 + PRDORD23 + \&$
 $PRDEX23 + PRDORD33 + PRDEX33 = 2602$

R10

AND R10: ALL VARS ≥ 0

****VARIABLE LIST****

PRDORD11	PRDORD12	PRDORD13	DISPORD1	PRDEX11	PRDEX12	PRDEX13	PRDORD21
PRDORD22	PRDORD23	DISPORD2	PRDEX21	PRDEX22	PRDEX23	PRDORD31	PRDORD32
PRDORD33	DISPORD3	PRDEX31	PRDEX32	PRDEX33	DISPEX1	DISPEX2	DISPEX3

****NO UNRESTRICTED VARIABLE IN THE MODEL****

SOLUTION

OBJECT	MINIMIZE XO
Z	0.2791D 06
ITERATIONS	3

VARIABLE SECTION

Name	Activity level	Lower bound	Upper bound	Reduced cost
PRDORD11	0.5400D 03	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDORD13	0.8680D 03	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDORD22	0.1162D 04	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDORD23	0.5400D 02	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDEX22	0.1430D 03	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDORD33	0.1344D 04	0.0	0.1000D 21	0.0
PRDEX33	0.3360D 03	0.0	0.1000D 21	0.0
DISPEX1	0.3520D 03	0.0	0.1000D 21	0.0
DISPEX2	0.1610D 03	0.0	0.1000D 21	0.0

CONSTRAINT SECTION

Name	Slack Activity	Dual price	RHS value
R1	0.0	-0.1850D 02	0.1430D 03
R2	0.0	0.0	0.3520D 03
R3	0.0	-0.2000D 02	0.8680D 03
R4	0.0	0.0	0.5400D 02
R5	0.0	-0.2150D 02	0.1610D 03
R6	0.0	0.1500D 01	0.3360D 03
R7	0.0	0.7850D 02	0.5400D 03
R8	0.0	0.8000D 02	0.1162D 04
R9	0.0	0.8150D 02	0.1344D 04

Los resultados anteriores se resumen en el Cuadro No. 5. De los resultados del Cuadro No. 5 se determina que deben programarse por cada producto, las horas ordinarias y extraordinarias que se muestran en el Cuadro No. 6. Hasta este momento, ya se tiene el plan de producción. Ahora sólo queda por hacer la programación comenzando con el primer

período. Para ello, se diseñó un programa de computadora escrito en lenguaje BASIC, al cual se le alimenta como información el requerimiento de producción para cada producto en horas, así como el inventario inicial, también en horas.

Los resultados que se producen para cada uno de los productos, se resumen en el Cuadro No. 7.

CUADRO No. 5

	Período 1	Período 2	Período 3	Capacidad no usada	Capacidad disponible
Período 1					
PRDORD	540		868		1408
PRDEX				352	352
Período 2					
PRDORD		1162	54		1216
PRDEX		143		161	304
Período 3					
PRDORD			1344		1344
PRDEX			336		336
Requerimiento	540	1305	2602		

CUADRO No. 6

Período	Horas Ords.	Horas Extra	Total
1	1408	0	1408
2	1216	143	1359
3	1344	336	1680

El orden de fabricación de los productos es: 4 3 2 1.

La secuencia de fabricación de los productos está basada en un indicador llamado Razón Existencia-uso que consiste en fabricar primero aquellos productos que tengan menos existencias disponibles por cada unidad demandada (Ver referencia 2).

CUADRO No. 7
Horas-unidades que se deben programar

Producto	Demanda en horas	Necesidades totales	Existencias disponibles	Horas programadas	Unidades programadas	Existencias planeadas
1	264	753,7686	120,0	633,7686	3168,843	489,7686
2	69	197,0077	6,3	190,7077	302,7104	128,0077
3	83	236,9803	7,5	229,4803	1529,869	153,9803
4	124	354,0427	0	354,0427	722,5361	230,0427

La columna 5 del Cuadro No. 7 muestra las horas que se deben programar para cumplir con los requerimientos de producción. El departamento encargado de la programación debe distribuir esta carga entre la capacidad instalada que se tenga para cada una de las operaciones, controlando esta asignación por medio de una gráfica de Gantt.

Como se observa en el Cuadro No. 1, este es un problema de secuenciación conocido en inglés como "*Job Shop Scheduling*", para el cual no se tiene solución óptima, debido a la gran cantidad de soluciones posibles que se generan $(n!)^m$, donde n es el número de trabajos a procesar y m es el número de máquinas disponibles) (Ver referencias 1 y 4).

Sin embargo, se han obtenido algunos modelos heurísticos que han dado muy buenos resultados, y se pueden estudiar en la bibliografía que aparece al final de este artículo.

NOMENCLATURA

C_{ij} : Costo variable por unidad en la fuente de producción i y consumido en el período j .

H_j : Costo de llevar inventario en el período j .

PRDORD: Producción ordinaria.

PRDEX: Producción extraordinaria.

BIBLIOGRAFIA

- 1- Abarca, F.A. **An efficient heuristic that determines a schedule. Minimizing Sum of Completion Times in a Flow Shop.** Disertación para optar al grado de Doctor de Filosofía en Ingeniería Industrial; Universidad de Lehigh; 1984.
- 2- Biegel, J. **Control de Producción.** México; Editorial Herrero Hermanos, Sucesores, 1978.
- 3- Bazaraa, M.; Jarvis, J. **Linear Programming and Network Flows.** New York: John Wiley, 1979.
- 4- Johnson, L.; Montgomery, D. **Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control.** New York: John Wiley, 1979.