

Probabilidad y estadística en la formación de profesores de matemática. Un análisis curricular e implicaciones didácticas

Federico De Olivera¹, Luciana Olesker², Daniela Pagés³

RESUMEN

Presentamos un avance de un estudio curricular y didáctico sobre la probabilidad y estadística en la formación de profesores de matemática. Reportamos los resultados del análisis de currículos de siete países, realizado con base en categorías teóricas establecidas para ese fin. Además, describimos algunos resultados de la investigación en Matemática Educativa, en el área de la probabilidad y la estadística, referidos a la formación de profesores de matemática.

PALABRAS CLAVES: currículo, formación de profesores de matemática, probabilidad y estadística, modelización.

ABSTRACT

We present an advance of a curricular and didactic study on probability and statistics in mathematics teacher training. We report the results of the analysis of curricula in seven countries, based on theoretical categories established for that purpose. In addition, we describe some research results in Mathematics Education, in the area of probability and statistics, referring to the mathematics teacher education.

KEYWORDS: curriculum, mathematics teacher training, probability and statistics, modeling.

INTRODUCCIÓN

Reportamos avances y resultados parciales de una investigación en curso, que se realiza en el marco del programa CFE investiga (ANII – CFE). Este trabajo consta de varias etapas. La primera de ellas consiste en realizar una puesta a punto del estado de situación internacional en cuanto a la enseñanza de la probabilidad y la estadística en la formación de profesores, por medio del estudio de documentos curriculares de algunos países seleccionados. Nos interesaba determinar, a grandes rasgos, qué conocimientos sobre probabilidad y estadística se espera, desde el currículo proyectado, que posean los profesores al finalizar la carrera que los habilita a trabajar en la enseñanza media. Por otro lado, este análisis nos permite ubicar a Uruguay y a nuestra formación en relación a lo que sucede en otros países del mundo. La segunda parte del trabajo consiste en el estudio de resultados de investigación en Matemática Educativa, en relación con la formación de profesores en probabilidad y estadística. Finalmente, y a partir de lo obtenido en estos dos estudios, emprendemos la elaboración de recursos educativos abiertos (REA) para la formación de profesores de matemática.

¹ Doctor en Matemática (PEDECIBA–UDELAR). Consejo de Formación en Educación.

² Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática (UNCOMA). Consejo de Formación en Educación.

³ Magíster en Matemática Educativa (CICATA–IPN). Consejo de Formación en Educación.

En este artículo presentamos los primeros resultados de los estudios curricular y didáctico, así como algunas líneas que se desprenden de estos, referidas

a la enseñanza de la probabilidad y la estadística para la formación de profesores en Uruguay.

ESTUDIO DE DOCUMENTOS CURRICULARES

Realizamos el estudio curricular considerando los siguientes países: Argentina, Brasil, Chile, Cuba, El Salvador, España, Portugal y Francia. En cada uno de ellos analizamos los currículos de probabilidad y estadística en las carreras de profesorado, a partir de unas categorías de análisis que diseñamos previamente y que explicaremos más adelante.

La formación de profesores en los distintos países es diversa. En algunos, como Uruguay, se da en forma concurrente, basada en tres pilares formativos: el de la formación disciplinar en matemática, el de las Ciencias de la Educación y en Didáctica de la Matemática/Práctica Docente. Este es el caso de Argentina, Chile, Cuba y El Salvador. En otros países, se accede a la carrera docente a través de la realización de la licenciatura en matemática y luego se cursa un master centrado en el desarrollo de aspectos de la enseñanza en general, y de la enseñanza de la matemática en particular (formación consecutiva). Este es el caso de Francia, Portugal y España.

Para el análisis de los documentos curriculares recurrimos al marco presentado en Godino (2011). Este fue complementado con el estudio reportado en Rivas (2014) y Lázaro (2015), específicos de la enseñanza de la probabilidad y estadística.

Godino desarrolla la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2011), que aplica al diseño de planes de formación de profesores de matemática. La idoneidad didáctica se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes componentes: idoneidad epistémica (grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia); idoneidad cognitiva (grado en que esos significados están en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes); idoneidad interaccional (la medida en que las configuraciones y trayectorias didácticas permitan identificar conflictos semióticos potenciales y resolverlos durante la instrucción); idoneidad mediacional (grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales); idoneidad afectiva (grado de implicación de los estudiantes en los procesos de estudio), e idoneidad ecológica (grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo en sus distintas dimensiones).

Rivas (2014) aborda la tarea de construir instrumentos de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción estadística mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares y resultados de investigación. Si bien su trabajo se centra en la formación de maestros, resulta relevante para nuestro estudio, por su similitud. Rivas (2014) construye un instrumento para evaluar la idoneidad didáctica de un proceso de formación de maestros, extrayendo normas de idoneidad de documentos curriculares, de las que toma indicadores para las distintas facetas de idoneidad. Lázaro

(2015) analiza los programas de estadística de una universidad colombiana de formación de profesores, tomando como marco la Teoría de la Idoneidad Didáctica. Determina ciertas categorías (indicadores) de análisis para el estudio de los documentos curriculares, y elabora indicadores específicos sobre la enseñanza de la estadística en la formación de profesores.

A partir de la consideración de los indicadores propuestos por Rivas (2014) y Lázaro (2015) hemos elaborado categorías de análisis para nuestro estudio, tomando algunas de las que allí se presentan. Un primer grupo de categorías refieren a aspectos conceptuales, y un segundo grupo a aspectos metodológicos. Para elaborar todas las categorías, nos basamos también en el informe *Statistical Education of Teachers* (SET, Franklin, 2014), producido por la *American Statistical Association*, que recoge recomendaciones de los informes: *The Mathematical Education of Teachers* (CBMS, 2001, citado por Franklin, 2014) y *The Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report* (Franklin *et al.*, 2007, referido en Franklin, 2014). Por otro lado, los contenidos que hemos tomado para las categorías conceptuales han sido influenciados también por la tradición de la enseñanza de la probabilidad y la estadística en nuestra formación docente, dado que dos de los integrantes de este equipo tienen a su cargo estos cursos.

ANÁLISIS DE CURRÍCULOS

Se han analizado los programas de veintiuna universidades o instituciones que ofrecen la carrera de profesorado. La muestra es basada mayormente en aquellas universidades a las que tuvimos acceso, ya sea por colegas o porque sus currículos se encuentran disponibles en línea.

A continuación consignamos cuáles son estas universidades e instituciones. En Brasil: UNICAMP, Bahía, Santa Cruz, Amapá, Santa María. En Francia: Universidad de Lille. En Argentina: Santa Fé, UBA, UNR Rosario, Instituto de profesorado de Concordia, Provincia BBAA. En Chile: Universidad Católica de Chile, Universidad Católica del Norte. En España: Universidad de Granada, Universidad de Madrid, Universidad de Barcelona. En Portugal: Universidad de Minho, Universidad de Coimbra, Universidad de Nova. Currículo nacional de Cuba y currículo nacional de El Salvador.

Las categorías de análisis para los currículos son agrupadas en ejes temáticos para organizar el análisis. El eje *Estadística Descriptiva* está formada por las categorías C1: aborda temáticas sobre tópicos de historia de los objetos estadísticos trabajados y/o su relación con otras ciencias; C2: estudia las representaciones de datos: gráficas y tablas; C3: análisis de datos: medidas de resumen, tablas de contingencia y medidas de forma; C4: variables bi-dimensionales: tablas de doble entrada, concepto de independencia, covarianza, coeficiente de correlación.

El eje temático *Definiciones de Probabilidad y Propiedades* está formado por las categorías C0: teoría combinatoria y problemas de conteo; C5: noción de aleatoriedad y experimentos aleatorios; C6: interpretación clásica de la probabilidad; C7: probabilidad frecuencial, frecuencia relativa, experimentación y simulación; C8: interpretación subjetiva de la probabilidad; C9: sigma

álgebra y sus propiedades; C10: definición axiomática y propiedades de la probabilidad; C11: independencia, probabilidad condicional y teorema de Bayes.

El eje *Variables y Vectores Aleatorios* está formado por las categorías C12: define variables aleatorias, su clasificación y sus características; C13: modelos de probabilidad discretos y absolutamente continuos; C14: vectores aleatorios y sus características.

El eje temático *Convergencias, LGN y TCL* está formado por una única categoría (C15) que estudia los diferentes tipos de Convergencia, la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite.

El eje de *Inferencia Estadística* consta de las categorías: C16: estimación puntual e intervalos de confianza; C17: pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas; C18: modelos de regresión; C19: muestreo.

Por último, tenemos el eje temático *Aspectos Metodológicos* que está formada por las categorías M1: plantea explícitamente el trabajo con software estadísticos; M2: aborda temáticas de la didáctica de la probabilidad y la estadística; M3: propone trabajar con bases de datos reales, obtenidos de encuestas propias u obtenidos de páginas oficiales, estudios académicos, etc.

La información referente a los porcentajes de las categorías y los ejes temáticos que aparecen mencionados en los distintos currículos son expuestos gráficamente a continuación. En el gráfico 1 se puede apreciar los porcentajes en que aparece cada categoría, dentro de cada eje temático, así como un resumen (en anaranjado) del total del eje temático.

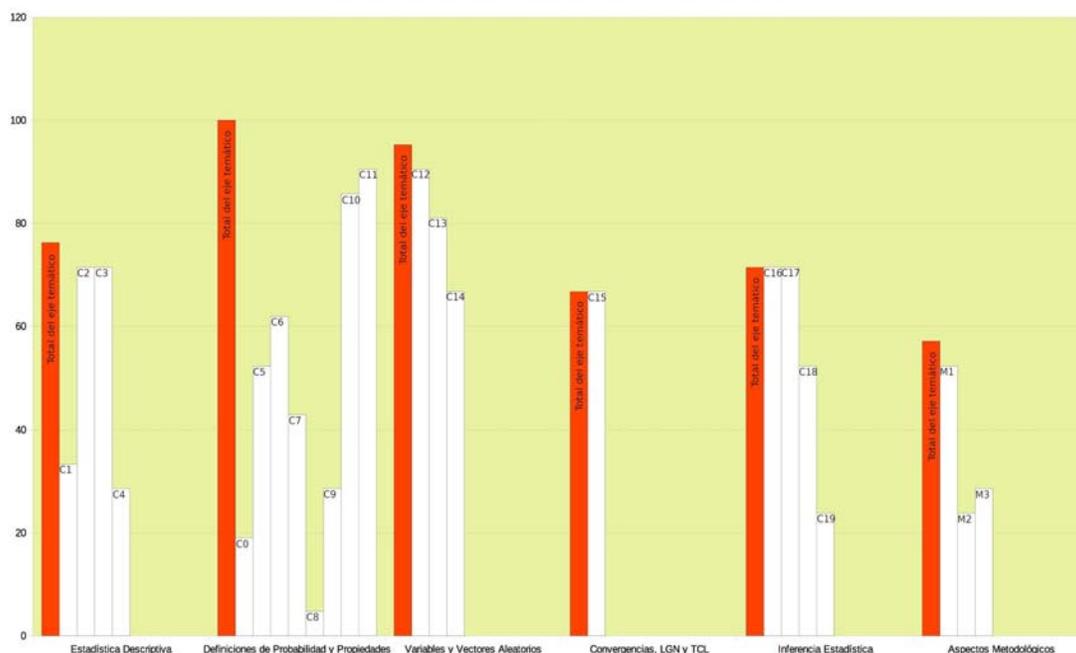


Gráfico 1. Porcentajes de las distintas categorías en los currículos.

Fuente: elaboración propia

A modo de resumen, Estadística Descriptiva es mencionada en un 76,2% de los currículos estudiados, mientras que el eje de Probabilidad y Propiedades en un 100%. En un 95,2% de ellos aparece el eje de Variables y Vectores aleatorios y en un 66,7% aparece el eje Convergencias, Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite. El eje de Inferencia Estadística aparece en un 71,4% de los currículos estudiados. Por último, solo en un 57,1% de los currículos analizados hay menciones a aspectos metodológicos.

Es de destacar que los distintos ejes temáticos de las categorías conceptuales tienen una amplia representatividad entre los distintos currículos. Sin embargo, observamos que solo 4 de los 21 currículos estudiados mencionan la categoría de combinatoria y problemas de conteo (C0), esto se condice con lo estudiado por Batanero *et al.* (2011) donde se plantea la necesidad de fomentar la enseñanza de una probabilidad y estadística moderna, usando modelación, simulaciones, y análisis de datos reales, priorizando lo conceptual sobre lo meramente instrumental.

En lo referente a las definiciones de probabilidad, observamos que el 61,9% menciona la definición clásica, mientras que el 42,9% menciona la definición frecuentista y el trabajo con simulaciones. Es de observar que solo el 4,8% menciona la definición subjetiva, es decir, solo en uno de los veintiún currículos analizados se menciona la definición subjetiva de probabilidad. Esto permite notar una estructura un tanto tradicional en cuanto a las definiciones de probabilidad, que puede llevar a errores conceptuales en lo referente a problemas cotidianos vinculados a la probabilidad, tal como fue observado en De Olivera, Olesker y Pagés (2017). La definición más mencionada es la axiomática, en un 85,7% de los currículos estudiados.

Otro aspecto a observar es el referente al eje de Inferencia Estadística. Aquí notamos que las categorías que incluyen aspectos como estimación puntual e intervalos de confianza (C16), como la que trabaja sobre Pruebas de Hipótesis (C17), son mencionadas en 15 de los 21 currículos. Es de destacar nuevamente la importancia, desde lo curricular, que se le da a estos temas de estadística, siendo mencionados en mayor o igual medida que las categorías en Estadística Descriptiva y la mayoría de las categorías del eje de Definiciones de Probabilidad. No obstante, en un reciente sondeo entre los profesores de Probabilidad y Estadística del Consejo de Formación en Educación, encontramos que es un área que la mayoría de los docentes no trabaja en sus cursos.

En lo que refiere a aspectos referentes a la metodología de la enseñanza, no muchos currículos mencionan este tipo de aspectos, entre los estudiados encontramos que once mencionan el trabajo explícito con algún software estadístico (M1), solo cinco contienen comentarios referentes al abordaje de la didáctica de la asignatura (M2) y solo seis proponen el trabajo con bases de datos reales.

Como conclusión de esta sección podemos decir que los temas más relevantes, referidos a la cantidad de menciones en estos currículos, son:

- Definición axiomática de la Probabilidad.
- Independencia de sucesos y probabilidad condicional.
- Variables aleatorias y su modelación.

- Gráficos y medidas descriptivas.
- Estimación y Prueba de Hipótesis.

A grandes rasgos, estos son los temas centrales de un curso de Probabilidad y Estadística, pero es importante mencionar que aparecen con considerada menor relevancia, temas como la definición clásica o frecuentista de probabilidad (la subjetiva casi no figura).

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

En el ámbito de la formación de profesores, las investigaciones didácticas y las implicancias que surgen de estas tienen un rol fundamental. Permiten ampliar el conocimiento del futuro docente, puesto que al conocimiento matemático en sí, le sumarán aspectos pedagógicos sobre la disciplina. Reflexionar sobre los obstáculos en la enseñanza de la probabilidad y estadística, conocer resultados de investigaciones y sugerencias metodológicas y didácticas, mejorará la formación del docente y enriquecerá su futura labor profesional.

Son muchas y variadas las investigaciones que reportan dificultades en la comprensión de los conceptos vinculados al azar y la probabilidad. En este apartado reportamos algunas de ellas, específicamente las relacionadas con la modelación, la simulación y el trabajo con datos reales.

SIMULACIÓN DE EXPERIENCIAS ALEATORIAS: DESAFÍOS Y POTENCIALIDADES

Gran parte de la actividad matemática, y en particular de la estadística, puede ser descrita como proceso de modelización. Esto es, a grandes rasgos, al enfrentarse a ciertos objetos de la realidad, tomar sus principales aspectos, simplificarlos y transformarlos en algo abstracto, tanto a ese objeto como a las relaciones y variables relacionadas. La construcción de modelos, su comparación con la realidad, su perfeccionamiento progresivo, son de gran importancia en el desarrollo de la probabilidad y la estadística, tanto en problemas prácticos como en su enfoque teórico. Cuando trabajamos en el aula con simulaciones como forma de resolver problemas tanto prácticos como teóricos, estamos contribuyendo, por un lado, a que nuestros estudiantes mejoren su capacidad de modelizar situaciones matemáticamente. Por otro lado, la simulación les permite resolver problemas que de otra manera serían muy engorrosos, y los entrena en la toma de decisiones. A través de la simulación los estudiantes podrán acceder a resultados teóricos de una manera experimental, los que serán una base sólida en la que luego se anclarán los conceptos y demostraciones teóricas. También, a partir de las simulaciones, los estudiantes podrían superar algunas de las paradojas que surgen en problemas sencillos, enfrentarse a ideas intuitivas erróneas y a obstáculos epistemológicos usuales.

Ahora bien, más allá de la importancia que pueden tener las simulaciones en el aula debemos remarcar, y es destacado por varios autores, que es preciso tener precauciones a la hora de trabajar con simulaciones. Countinho (2001, referido en Batanero, 2001) ha observado diferentes dificultades en los estudiantes al proponerles situaciones en que debían construir un modelo de urnas para simular

ciertas experiencias concretas o juegos probabilísticos. Algunas de ellas son: dificultades de manejo del *software*, resistencia a usar la simulación y la aproximación experimental para resolver un problema de probabilidad en los casos en que es posible resolver el problema mediante cálculo directo; dificultad en aceptar datos de simulaciones que no han llevado a cabo personalmente para obtener estimaciones de la probabilidad; dificultad en diferenciar la estimación de la probabilidad que proporciona la simulación del verdadero valor teórico de la probabilidad. Es fundamental tener en cuenta estas dificultades cuando trabajamos con simulaciones y experimentaciones en el aula. Además de estas dificultades, Batanero (2001) señala que la simulación y el enfoque frecuencial, aunque proporciona una solución al problema, no nos proporciona la razón por la que la solución es válida y por tanto carece de valor explicativo que solo puede obtenerse en el enfoque clásico y el cálculo formal de probabilidades. Por ello, un enfoque frecuencial puro, no es suficiente, pero es imprescindible para luego ir construyendo los demás enfoques. El estudio de probabilidad formal, para ser exitoso, deberá apoyarse en las experiencias estocásticas que tengan los estudiantes, experiencia que se deben construir desde mucho antes que el estudiante tenga la abstracción que requiere un enfoque formal.

Son varias las investigaciones que concluyen que el uso de simulaciones repercute de manera favorable en la superación de las ideas erróneas que los futuros profesores tienen sobre probabilidad. Como se describe en Batanero, Godino y Roa (2001) y Batanero, Godino y Cañizares (2005) la mayoría de los maestros tienen poca experiencia con la probabilidad y comparten con sus estudiantes una variedad de conceptos erróneos probabilísticos. Dado que una educación que solo se enfoca en habilidades técnicas es poco probable que ayude a estos maestros a superar sus creencias erróneas, deberíamos encontrar nuevas formas de enseñarles la probabilidad, al mismo tiempo que ayudamos a unir la conceptualización y la pedagogía (Ball, 2000, referido en Batanero, Godino y Cañizares, 2005). Además, se debería presentar a los profesores en formación algunas actividades basadas en un enfoque constructivista y social de la enseñanza (Jaworski, 2001, como se menciona en Batanero, Godino y Cañizares, 2005). En este aspecto las actividades de simulación de experiencias aleatorias son fundamentales.

SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

Como primera sugerencia a destacar es la necesidad de fomentar en nuestros estudiantes el pensamiento estadístico, además de la enseñanza de los métodos estadísticos. Siguiendo a Parsian y Rejali (2011) afirmamos que para que un profesor esté preparado para enseñar estadística deberá estar familiarizado con los conceptos estadísticos y métodos, tener experiencia con la resolución de problemas estadísticos; conocer la diferencia entre pensamiento estadístico y método estadístico; y la diferencia entre el razonamiento matemático y el estadístico. Pratt, Daives y Connor (2011) plantean que el uso de *software* estadístico debería introducirse tempranamente en la formación de profesores. Para los autores el contacto con la tecnología debe darse en un ciclo completo de investigación

estadístico. Es muy importante reflexionar sobre cómo, qué y en qué momento se va a introducir la tecnología. Gea, Batanero, Arteaga y Ortiz (2018) sugieren la importancia de trabajar en proyectos y bases de datos reales. Trabajar en base a un problema, o una pregunta guía y, a partir de ellos, ir analizando datos reales y aprendiendo todos los componentes del pensamiento estadístico. Esta sugerencia la plantean tanto para estadística descriptiva como para inferencial. Si bien reconocen que es fundamental el uso de los *software* para un mejor aprendizaje estadístico, plantean tratar de evitar el uso acrítico de las tecnologías (por ejemplo, en el estudio algunos estudiantes querían sí o sí tratar de ajustar a un modelo cuando todo implicaba que había independencia).

A MODO DE CIERRE

A partir del estudio de currículos de algunos países hemos logrado relevar qué ejes temáticos son los más frecuentes y la prioridad que se les da en el currículo. Hemos analizado categorías conceptuales y metodológicas. Los ejes temáticos que son mencionados en prácticamente todos los currículos son la definición axiomática, probabilidad condicional e independencia, variables aleatorias y su modelación, gráficos y medidas descriptivas, estimación y Prueba de Hipótesis. Observamos que las diferentes interpretaciones de probabilidad, como ser la clásica o frecuencial, aparece en notoria menor medida. Es de destacar que solo en uno de los veintiún programas analizados se plantea el abordaje de la definición subjetiva de la probabilidad. Con respecto a lo metodológico, no muchos currículos mencionan este tipo de aspectos, entre los estudiados encontramos que solamente la mitad de ellos mencionan el trabajo explícito con algún *software* estadístico, y una parte mucho más pequeña contiene comentarios referentes al abordaje de la didáctica de la asignatura y propone el trabajo con bases de datos reales.

Del estudio de varias investigaciones didácticas se desprende la necesidad de renovar la metodología de la enseñanza de la probabilidad y la estadística. La enseñanza en formación docente debiera basarse en actividades de modelación, simulaciones, y análisis de datos reales. En cuanto a la probabilidad, sugerimos el trabajo con simulaciones en el aula. A través de las simulaciones, los estudiantes podrán acceder a resultados teóricos de manera experimental, podrán ampliar sus experiencias estocásticas, y enfrentarse a ideas e intuiciones incorrectas sobre el azar. En referencia a la estadística, las principales sugerencias didácticas indican que es fundamental que el estudiante pueda vivenciar un ciclo investigativo completo. Sugerimos el uso de datos reales y *software* estadísticos, tanto en estadística descriptiva como inferencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, Modelización, Simulación. X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1–10). Zaragoza, España. Recuperado de: <<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Jaem2001.pdf>>.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference* (pp. 1–8). Johannesburg: ICMI.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study*. New York: Springer.
- De Olivera, F., Olesker, L. y Pagés, D. (2017). Concepciones de los futuros docentes sobre la aleatoriedad. Un estudio en el profesorado de matemática. *Reloj de agua*, 16, 5–14.
- Franklin, C. (2014). The Statistical Education of Teachers (SET): An American Statistical Association Policy Document. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)* (pp. 1–4). The Netherlands: International Statistical Institute.
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Ortiz, J. J. (2018) Conocimiento tecnológico sobre la correlación y regresión: un estudio exploratorio con futuros profesores. *Bolema*, 32(60), 134–155.
- Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2001). Training teachers to teach probability. *IASE Satellite Conference on Statistical Literacy. Seul*. Recuperado de: <<https://iase-web.org/documents/papers/sat2001/Godino.pdf?1402524992>>.
- Godino, J., Cañizares, M. J. y Díaz, C. (2003). Teaching probability to pre-service primary school teachers through simulation. *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI*. Berlin: ISI.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM–IACME)* (pp. 1–20). Recife, Brasil. Recuperado de: <https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>.
- Lázaro, W. (2015). *Panorama de la formación de futuros licenciados en matemáticas en relación con estadística y su didáctica* (Tesis de grado no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Bogotá, Colombia.
- Parraguez, R., Gea, M. M., Batanero, C. y Díaz–Levicoy, D. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(2), 1–15. Recuperado de: <<https://pdfs.semanticscholar.org/2b16/8d36279ede59fcb56cf44ede7d902995e451.pdf>>.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.