

# ALGORITMO PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO 2-D USANDO EL MÉTODO MIMÉTICO EN DIFERENCIAS FINITAS

FRANCO RUBIO LÓPEZ<sup>1</sup>, AND MARDÓ GONZALES HERRERA<sup>2</sup>

**Resumen.** El objetivo principal de este trabajo es la descripción e investigación de un nuevo algoritmo del esquema de diferencias finitas miméticas para resolver la ecuación diferencial parcial elíptica o también conocida como la ecuación estacionaria. El nuevo algoritmo se formula para una rejilla del cuadrado unitario, el cual nos proporciona la solución numérica al problema planteado así también como el error de aproximación entre la solución exacta y la aproximada.

Este nuevo algoritmo se deriva usando el esquema de diferencias finitas miméticas, una idea clave en la obtención de este método, proponer discretizaciones de los operadores diferenciales fundamentales de la física matemática (divergencia y gradiente), satisfaciendo o mimetizando el teorema de la divergencia a nivel discreto, la cual es responsable de cumplir las propiedades conservativas del medio continuo.

**Key words.** Algoritmo Mimético, Gradiente Mimético, Divergencia Mimética.

**1. Introducción.** La idea principal de este trabajo es la descripción e investigación de un nuevo algoritmo usando el método de diferencias finitas miméticas para solucionar la ecuación diferencial parcial elíptica o ecuación de difusión. (Ver [12])

$$-\operatorname{div} K \operatorname{grad} u = F, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

donde  $u$  es una función desconocida, positiva y suficientemente suave;  $\Omega$  es un subconjunto del espacio bidimensional;  $\operatorname{div}$  es la divergencia;  $\operatorname{grad}$  es el gradiente;  $K$  es una matriz simétrica definida positiva;  $F$  es una función fuente o sumidero suficientemente suave.

Las condiciones de frontera son en general de tipo Robin que tiene la siguiente forma:

$$\alpha u + \beta K \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f, \quad (x, y) \in \Omega$$

donde  $\vec{n}$  es el vector de la normal unitario exterior a la frontera  $\partial\Omega$  y  $\alpha, \beta$ , y  $f$  son funciones dadas sobre la  $\partial\Omega$ .

El algoritmo se construye utilizando una generalización no trivial del método mimético de diferencias finitas.

**2. Propiedades del problema continuo.** En los últimos quince años una nueva versión del método en diferencias finitas, denominado mimético, ha venido desarrollándose con la finalidad de obtener mejores resultados para la simulación de diversos fenómenos.

Esta nueva versión, goza de una ventaja al mantener los mismos ordenes de exactitud de los operadores discretos tanto en los nodos internos como en la frontera de la malla y además satisfacen versiones discretas de una ley de conservación global (Teorema de divergencia) convirtiéndolos así en métodos conservativos.[4]

Elegir una discretización de los campos vectoriales y escalares, elegir una discretización para la divergencia, elegir los productos internos discretos para los campos vectoriales y escalares discretos y luego usar una analogía discreta del teorema de la divergencia para

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Trujillo ([rubiolopezfra@gmail.com](mailto:rubiolopezfra@gmail.com))

<sup>2</sup>Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo ([mardo.unprg@gmail.com](mailto:mardo.unprg@gmail.com))

determinar el gradiente discreto.

El teorema de la divergencia dice que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} f dV + \int_{\Omega} \vec{v} \nabla f dV = \int_{\partial\Omega} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

Donde  $\Omega$  es una región,  $\partial\Omega$  es la frontera de la región,  $\vec{n}$  es la normal exterior a la frontera,  $f$  es una función escalar bien definida sobre la cerradura de la región  $\Omega$  y  $v$  es un campo vectorial suave definido sobre la cerradura de la región  $\Omega$ .

Si  $f$  y  $g$  son campos escalares y si  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  son campos vectoriales los productos internos adecuados del continuo para escalares y vectores son:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g dV, \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{w} dV \quad (3)$$

Entonces (2) puede escribirse:

$$\langle \nabla \cdot \vec{v}, f \rangle + \langle \vec{v}, \nabla f \rangle = \int_{\partial\Omega} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (4)$$

Previamente la idea geométrica natural ha sido utilizada para discretizar los productos internos.

El teorema de la divergencia en una dimensión, se convierte en una integración por partes.

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f dx + \int_0^1 v \frac{df}{dx} dx = v(1)f(1) - v(0)f(0) \quad (5)$$

Una forma discreta de la ley de conservación se necesita ser construida para satisfacer la conservación local en cada intervalo de la célula, de tal manera que se cumpla la ley de conservación global para todo el intervalo investigado

**DEFINICIÓN 1.** Si  $v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$  es una función discretizada definida sobre los nodos de la malla unidimensional, entonces  $Dv \in \mathbb{R}^N$  que representa la aproximación en los centros de las celulas.

$D$  es un mapeo lineal, es decir:

$$D : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

la cual expresa una matriz  $D_{(N)(N+1)}$

**DEFINICIÓN 2.** Si  $f = (f_0, f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, \dots, f_{N-\frac{1}{2}}, f_N)^T \in \mathbb{R}^{N+2}$  es una función discretizada definida en los centros de la célula y en la frontera del dominio de la malla unidimensional, entonces  $Gf \in \mathbb{R}^{N+1}$  que representa las aproximaciones en los nodos.

$G$  es mapeo lineal, es decir:

$$G : \mathbb{R}^{N+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

la cual expresa una matriz  $G_{(N+1)(N+2)}$

**OBSERVACIÓN 1.** Ahora que se tiene los operadores en forma de matriz vamos a reformular las condiciones miméticas de los operadores discretos gradiente ( $G$ ) y divergencia ( $D$ ).

**TEOREMA 1.**  $Gf = 0 \Leftrightarrow f = c, Dv = 0 \Leftrightarrow v = c$ , donde  $c$  es una constante. Este resultado es una de las razones importantes para usar mallas escalonadas.

*Demostración.*

(1) Si  $Dv = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} (Dv)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \\ 0 &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \\ V_{i+1} &= V_i, \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

puesto que  $h$  es la longitud del intervalo. Esto quiere decir, que  $v$  es constante. Lo inverso es claro.

1. Si  $Gf = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} (Gf)_i &= \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h} \\ 0 &= f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

puesto que  $h$  es la longitud del intervalo se obtiene

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}$$

es decir,  $f$  es constantes. Lo inverso es claro.

□

## 2.1. Malla escalonada uniforme 1-Dimensional

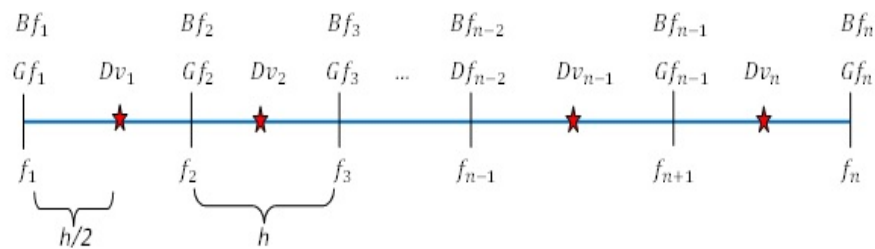


Figura 1: Malla 1 - Dimensional de manera General

Donde  $D$  indica la aproximación de diferencias para el operador divergencia tal como se aplica a la función, en los centros de la célula, y  $G$  denota la aproximación de diferencias para el operador gradiente tal como se aplica a la función en los nodos de la célula y frontera.

En la figura el espaciamento de la célula es uniforme con una magnitud de  $h = 1/n$  sobre el intervalo  $[0, 1]$  en 1 – *dimensional*. El intervalo investigado es dividido igualmente en  $n$  sub intervalos, cada nodo tiene una coordenada  $x_i = (i * h)$  con  $0 \leq i \leq n$ . Cada célula tiene un punto de centrado celular, es decir,  $[x_i, x_{i+1}]$  incluye el centro de coordenada  $x_{i+1/2}$ .

**2.2. Teorema de la divergencia discreta enfoque Castillo-Grone.** En general el enfoque Castillo-Grone dado en (4) expresan la ley de conservación de la ecuación (5) la cual se representa en forma de un producto interno ponderado de funciones escalares y vectoriales discretas obre rejillas escalonadas, la relación dada es:

$$\langle \widehat{D}v, f \rangle_Q + \langle v, Gf \rangle_P = \langle Bv, f \rangle_I \quad (6)$$

donde  $D$ ,  $G$  y  $B$  son las versiones discretas de sus continuos correspondientes: gradiente ( $\nabla$ ), divergencia ( $\nabla \cdot$ ) y operador de frontera ( $\partial/\partial \vec{n}$ ). Los  $\langle \rangle$  representan un producto interior generalizado con pesos  $Q$ ,  $P$  e  $I$ . Usando la identidad (6) se obtiene una relación para el operador de frontera

$$B = Q\widehat{D} + G^t P \quad (7)$$

además  $P$  y  $Q$  son matrices definidas positivas que son usadas para determinar la forma de  $\widehat{D}$  y  $G$ . Los operadores discretos de segundo orden (tanto en frontera como en los nodos internos) introducidos por Castillo-Grone son dados.[4][5]

$Q$  es una matriz identidad en  $\mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}$  y  $P$  esta dentro de  $\mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$

$$G = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}_{(N+1)(N+2)}$$

$$(\widehat{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(N+2)(N+1)}$$

Aparecen dos filas de ceros en  $(\widehat{D})$  (una en la parte superior y otra en la parte inferior) con esto se busca obtener una matriz cuadrada al componer operadores, el operador de frontera  $B$  queda dado explícitamente.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+2)(N+2)}$$

Por lo tanto, los operadores miméticos gradiente ( $G$ ) y divergencia ( $\widehat{D}$ ) son de segundo orden tanto en el interior del dominio como en la frontera sobre retículo uniformes en 1 - *dimensional*.

El esquema mimético para la ecuación de difusión (1) sujeto a las condiciones de contorno tipo Robin (2) queda dado por:

$$(MI = \widehat{A} + BG + \widehat{D}KG)f = b \quad (8)$$

Aquí la matriz  $\widehat{A}$  es una matriz de orden  $(N+2)(N+2)$  que tiene entradas distintas de cero en su diagonal que corresponden a los nodos de la frontera. Los valores asociados a las entradas son no nulas.

Para el caso unidimensional las únicas entradas no nulas son:

$$\widehat{A}(1, 1) = \alpha_0 \quad \text{y} \quad \widehat{A}(n+2, n+2) = \alpha_1$$

El operador  $K$  es un tensor diagonal cuyos valores conocidos son positivos y evaluada en los bordes de la red. A veces el producto  $(KG)f$  se llama flujo. El vector  $\vec{b}$  tiene la forma:

$$\vec{b} = (\gamma_0, F_{\frac{1}{2}}, F_{\frac{3}{2}}, \dots, F_{n-\frac{1}{2}}, \gamma_1)^\top$$

$f$  representa la aproximación mimética.

**3. Definición de mallas uniformes 2-Dimensional.** La región investigada es un cuadrado en el espacio bidimensional donde “ $i$ ” se denota por el sub índice en la dirección del eje  $X$  y  $j$  se denota por el sub índice en la dirección del eje  $Y$ . En el intervalo en la dirección de  $X$  se divide en  $n$  sub intervalos iguales, mientras que en el intervalo en la dirección de  $Y$  se dividen en  $m$  sub intervalos iguales. El dominio puede ser discretizado de la siguiente manera:

- En la dirección del eje  $X$

$$x_i = i\Delta X, \quad 0 \leq i \leq n$$

Por lo tanto en el intervalo investigado es definido  $[x_0, x_n]$

$$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i \quad ; \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

donde hay  $(n + 1)$  nodos y “ $n$ ” sub intervalos.

Todos los sub intervalos son igualmente divididos, es decir:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{x_n - x_0}{n}$$

El centro de cada sub intervalo tiene la siguiente coordenada:

$$x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- Similarmente en el eje  $Y$

$$Y_j = j\Delta Y \quad , \quad 0 \leq j \leq m$$

Y el tamaño de cada sub intervalo es definido por:

$$\Delta Y_{j+1} = Y_{j+1} - Y_j \quad , \quad 0 \leq j \leq m - 1$$

donde hay  $(m + 1)$  nodos y “ $m$ ” sub intervalos.

Todos los sub intervalos son igualmente divididos, es decir:

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \dots = \Delta y_m = \frac{y_m - y_0}{m}$$

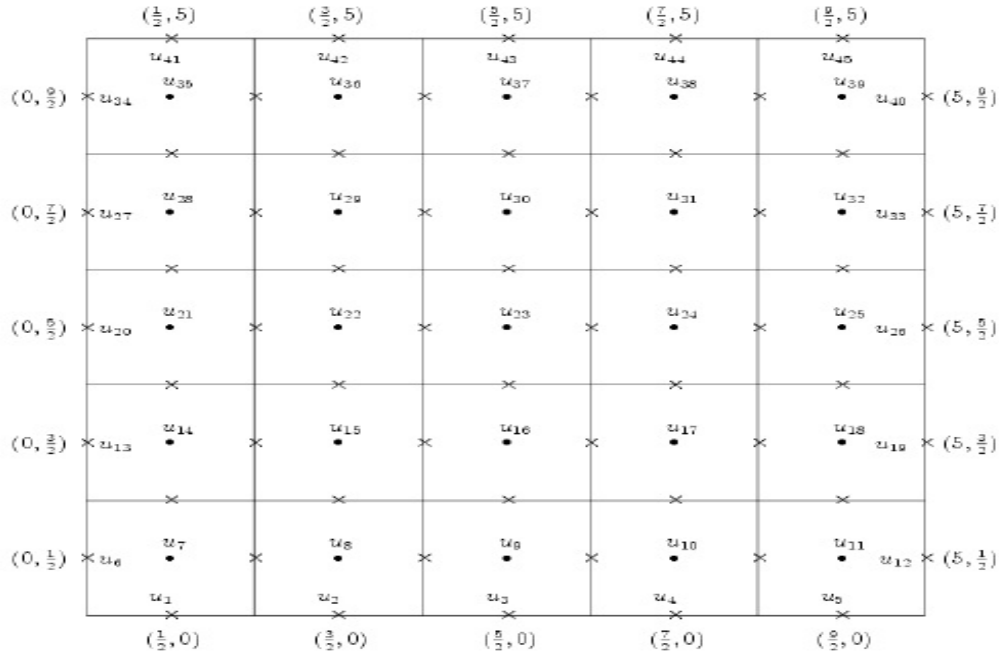


Figura 2: Nodos para  $u$ ,  $B$  y  $D$

**3.1. Función Solución Discreta.** La figura anterior describe la distribución escalonada de la función solución a lo largo de la malla. En el interior, la función solución “ $u$ ” se define en los centros de las celdas de la cuadrícula y se denota como:

$$u(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) = u_{i+1/2, j+1/2} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

En la frontera la función solución “ $u$ ” es definida en los centros de los bordes de frontera incluyendo los bordes a la izquierda, derecha, abajo y arriba. Sobre los bordes verticales, la función solución aproximada se denota como:

- Para la frontera izquierda ( $x = x_0$ )

$$u(x_0, y_{j+1/2}) = u_{0, j+1/2}$$

- Para la frontera derecha ( $x = x_n$ )

$$u(x_n, y_{j+1/2}) = u_{n, j+1/2}$$

Sobre el borde horizontal, la función solución es denotada como:

- Para la frontera inferior ( $y = y_0$ )

$$u(x_{i+1/2}, y_0) = u_{i+1/2, 0}$$

- Para la frontera superior ( $y = y_m$ )

$$u(x_{i+1/2}, y_m) = u_{i+1/2, m}$$

Donde  $0 \leq i \leq n - 1$  ,  $0 \leq j \leq m - 1$

**3.2. Operador de Frontera Discreta.** De la misma forma al caso anterior, el operador de frontera  $B$  se define en el centro de los bordes de frontera de las celdas de la cuadrícula.

En los bordes verticales,  $B$  se denota como:

- Para la frontera izquierda:

$$B(x_0, y_{j+1/2}) = B_{0,j+1/2}$$

- Para la frontera derecha:

$$B(x_n, y_{j+1/2}) = B_{n,j+1/2}$$

Sobre los bordes horizontales,  $B$  se define como:

- Para la frontera inferior:

$$B(x_{i+1/2}, y_0) = B_{i+1/2,0}$$

- Para la frontera superior ( $y = y_m$ )

$$B(x_{i+1/2}, y_m) = B_{i+1/2,m}$$

Donde  $0 \leq i \leq n - 1$  ,  $0 \leq j \leq m - 1$

El operador de frontera se aplica sobre el operador gradiente ( $G$ ) para crear el operador ( $BG$ ) en las ecuaciones de condición de frontera.

**3.3. Operador Discreto del Gradiente (G).** El operador discreto  $G$  se define separadamente en cada componente, es decir,  $G_x$  y  $G_y$

Para  $G_x$  es evaluada en los centros de los bordes verticales y es denotado por:

$$G_x u = Gu(x_i, y_{j+1/2}) = G_{i,j+1/2}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m - 1$$

Para  $G_y$  es evaluada en los centros de los bordes horizontales y es denotado por:

$$G_y u = Gu(x_{i+1/2}, y_j) = G_{i+1/2,j}, \quad 0 \leq i \leq n - 1, \quad 0 \leq j \leq m$$



**3.4. Operador Discreto de la Divergencia (D).** En el interior, el operador de la divergencia discreta se define en la función vectorial  $\vec{v}$  y en los centros de la celda de la cuadrícula como:

$$D_v(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) = Dv_{i+1/2, j+1/2}$$

• Gradiente sobre la componente X

a) En la frontera izquierda

$$(Gu)_{0, j+1/2} = \frac{1}{\Delta X} \left[ \frac{8}{3}u_{0, j+1/2} + 3u_{1/2, j+1/2} - \frac{1}{3}u_{3/2, j+1/2} \right], \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad y$$

$\Delta X$  es el sub intervalo dividido de la componente X

(9)

b) En el interior

$$(Gu)_{i, j+1/2} = \frac{1}{\Delta X} [u_{i+1/2, j+1/2} - u_{i-1/2, j+1/2}], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

c) En la frontera derecha

$$(Gu)_{n, j+1/2} = \frac{1}{\Delta X} \left[ \frac{1}{3}u_{n-3/2, j+1/2} - 3u_{n, j+1/2} + \frac{8}{3}u_{n, j+1/2} \right], \quad 0 \leq j \leq m-1$$
(10)

• Gradiente sobre la componente Y

a) En la frontera inferior

$$(Gu)_{i+1/2, 0} = \frac{1}{\Delta Y} \left[ \frac{-8}{3}u_{i+1/2, 0} + 3u_{i+1/2, 1/2} - \frac{1}{3}u_{i+1/2, 3/2} \right], \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad y$$

$\Delta Y$  es el sub intervalo dividido de la componente Y

(11)

b) En el interior

$$(Gu)_{i+1/2, j} = \frac{1}{\Delta Y} [u_{i+1/2, j+1/2} - u_{i+1/2, j-1/2}], \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

c) En la frontera superior

$$(Gu)_{i+1/2, n} = \frac{1}{\Delta Y} \left[ \frac{1}{3}u_{i+1/2, m-3/2} - 3u_{i+1/2, m-1/2} + \frac{8}{3}u_{i+1/2, m} \right], \quad 0 \leq i \leq n-1$$
(12)

Vemos que la aproximación de la proyección del gradiente  $G$  en el vector normal ala frontera de  $\Omega$  son las ecuaciones dadas en (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) donde el signo de los coeficientes en la aproximación de los componentes del gradiente vendrá dado por el signo del vector normal a la frontera de  $\Omega$ .

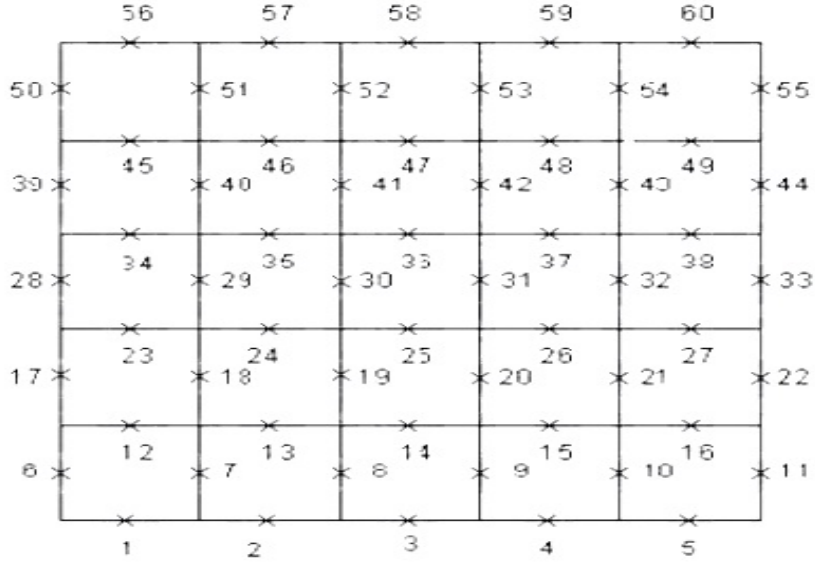


Figura 3: Nodos para  $G$

Esta aproximación es la misma obtenida para el gradiente mimético unidimensional en la frontera, y tiene la ventaja de ser obtenido por aplicaciones sistemáticas de las series de Taylor.

En los puntos internos de la malla el gradiente y la divergencia coinciden con las discretizaciones estándar en diferencias finitas centradas.

**3.5. Evaluación Mimética de Laplaciano  $D(Gu)$ .** Debido a que la divergencia se define en los centros de la celda de la cuadrícula, el esquema de discretización puede ser determinada de la siguiente manera:

$$D(Gu)_{(i+1/2,j+1/2)} = \frac{(Gu)_{(i+1,j+1/2)} - (Gu)_{(i,j+1/2)}}{\Delta X} + \frac{(Gu)_{(i+1/2,j+1)} - (Gu)_{(i+1/2,j)}}{\Delta Y}$$

$$0 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

**3.6. Implementación Mimética de la Condición de Frontera.** Si se utilizan las condiciones de frontera del tipo Robin, entonces el operador de frontera  $B$  es aplicado en la discretización 2-dimensional con las ecuaciones del tipo Robin para el caso unidimensional, tanto para la componente  $X$  como en  $Y$ .

Para la componente  $X$  con las condiciones de frontera en la izquierda y derecha:

$$\alpha u \mp \beta(Gu)_{p,j+1/2} = b_{p,j+1/2}$$

y para la componente en  $Y$  las condiciones de frontera superior e inferior:

$$\alpha u \mp \beta(Gu)_{i+1/2,q} = b_{i+1/2,q}, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad 0 \leq p \leq n, \quad 0 \leq q \leq m$$

“ $b$ ” es la función del lado derecho de la frontera; “ $\alpha$ ” es el valor escalar para conducir el término de Dirichlet y “ $\beta$ ” es el valor escalar para conducir el término de Neumann.

**3.7. Sistema de Ecuaciones Discretas Miméticas 2-Dimensional.** Al conducir todas las expresiones de los operadores Miméticos dieron como resultado un sistema de ecuaciones lineales de una matriz dada de la forma siguiente:

$$(A + BG + \widehat{D}KF) \vec{f} = \vec{b} \quad (13)$$

Donde  $A$  es una matriz de  $N \times N$  y  $B$  es una matriz de  $(M, N)$ , el operador  $\widehat{D}$  es una matriz de orden  $(N \times M)$  y el gradiente ( $G$ ) es un operador de orden  $(M \times N)$ . Aquí solo se necesitará que  $K = I$  (identidad).

Además:

$$\begin{aligned} N &= n \times m + 2 \times (n + m) \\ M &= n \times (m + 1) + m \times (n + 1) \end{aligned}$$

$n$  es el número de sub intervalos divididos en la componente  $X$  y  $m$  es el número de sub intervalos en la componente  $Y$

**4. Algoritmo de la Solución Mimética de la Ecuación de Difusión en Estado Estacionario Bidimensional usando Métodos Miméticos.** La idea principal de este trabajo es dar a conocer el algoritmo para la solución numérica de la ecuación de difusión bidimensional en estado estacionario, así como el error de aproximación entre la solución exacta y la aproximada (problema elíptico), donde el tipo de frontera habitual para esta ecuación son los de Dirchilet o Neumann. Pero el tipo de contorno de frontera es cerrado.

La ecuación en derivadas parciales y las condiciones de borde que modelan la ecuación de difusión no homogénea lineal en estado estacionario en un medio no homogéneo, vienen dadas por las relaciones:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (k \nabla u(x, y)) = F(x, y) \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \alpha(x, y) + \beta(x, y) k(x, y) \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \end{cases} \quad (14)$$

Es decir nuestro problema se modela como:

$$\nabla \cdot (k \nabla u(x, y)) = \frac{128}{(e^{16} - 1)} e^{8(x+y)} \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (15)$$

con las condiciones de borde tipo Robin:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \quad y = 0 \\ &\quad \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) \left( \frac{1}{e^{16} - 1} \right) (e^{8(x+y)} - 1) - \left( \frac{8}{e^{16} - 1} (e^{8(x+y)} - 1) \right) \\ &\bullet \quad y = 1 \\ &\quad \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) \left( \frac{1}{e^{16} - 1} \right) (e^{8(x+y)} - 1) + \left( \frac{8}{e^{16} - 1} (e^{8(x+y)} - 1) \right) \\ &\bullet \quad x = 0 \\ &\quad \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) \left( \frac{1}{e^{16} - 1} \right) (e^{8(x+y)} - 1) - \left( \frac{8}{e^{16} - 1} (e^{8(x+y)} - 1) \right) \\ &\bullet \quad x = 1 \\ &\quad \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = \left( \frac{-16e^{16}}{e^{16} - 1} \right) \left( \frac{1}{e^{16} - 1} \right) (e^{8(x+y)} - 1) + \left( \frac{8}{e^{16} - 1} (e^{8(x+y)} - 1) \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

donde:  
 $(\nabla \cdot)$  = Divergencia  
 $(\nabla)$  = Gradiente  
 $K(x, y)$  = Tensor simétrico, para nuestro caso es la identidad  
 $u(x, y)$  = Función escalar desconocida  
 $F(x, y)$  = Representa el término fuente  
 $\alpha(x, y)$  y  $\beta(x, y)$  son constantes diferentes de cero sobre la frontera.

La solución dada al problema (15) y (16) es:

$$u(x, y) = \frac{1}{e^{16} - 1} (e^{8(x+y)} - 1)$$

Cabe señalar que las condiciones proporcionadas en la ecuación de difusión estática y sus condiciones de contorno tipo Robin son suficientes para la existencia y unicidad de una solución  $u(x, y)$  ([7]).

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

Además,  $x_0 = y_0 = 0$  y  $x_{n+1} = y_{n+1} = 1$ , donde esta malla tiene  $(n + 1) \times (m + 1)$  bloques de tamaño  $h \times h$  y cada uno tiene un nodo central denotado por  $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ ;  $\forall i, j = 0 \dots n$ .

$$\nabla \cdot (k \nabla u) \cong [D]([kG])U$$

Para nuestro caso  $k$  es la identidad

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \cong \alpha[a]U + \beta[BG]U$$

Luego el modelo continuo descrito previamente por la ecuación (15) y (16) puede ser aproximada en forma matricial por un sistema de ecuaciones lineales:

$$(\alpha[a] + \beta[BG] + DG) \cong MI$$

$$[MI]U = \vec{F} + f$$

El espacio  $h$  entre los nodos  $x_i$  o  $y_j$  es obtenido de  $h = \frac{(1 - 0)}{5}$ ;  $h = 1/5$  es el espaciado tanto para el eje  $X$  como el eje  $Y$ .

El número de nodos tomados para el eje  $X$  como para el eje  $Y$  es  $n = m = 5$

#### 4.1 Código mimético de la ecuación de Difusión 2-D

```

1 % Discretización del dominio.
2 m=5;
3 n=5;
4 % Ubicación de los puntos en la malla 2- dimensional.
5 psis=zeros(n+2,1);
6 psiv=zeros(n+1,1);
7 etas=zeros(m+2,1);
8 etav=zeros(m+1,1);
9 psi0=0 ; psin=1 ;
10 hx=(psin-psi0)/n;
11 psixs(1)=psi0 ;
12 psis(n+2)=psin ;
13 psixv(1)=psi0 ;
14 psiv(n+1)=psin ;
15 eta0=0 ; etam=1;
```

```

16 hy=(etam-eta0)/m
17 etas(1)=eta0;
18 etas(m+2)=etam;
19 etav(1)=eta0;
20 etav(m+1)=etam;
21 for i = 2 : n ;
22 psiv(i)=hx * (i-1);
23 end
24 for i = 2 : n+1 ;
25 psis (i)= hx *((i-1)-1/2) ;
26 end
27 for j= 2 :m ;
28 etav(j)=hy * (j-1) ;
29 end
30 for i = 1 : n+2 ;
31 xs(i)=psis(i) ;
32 end
33 for i = 1 : m+2 ;
34 ys(i)=etas(i);
35 end
36 for i = 1: n+1 ;
37 xv(i)=psiv(i) ;
38 end
39 for i= 1 : m+1 ;
40 yv(i)=etav(i) ;
41 end
42 N = n*m+2 * (n+m);
43 M = n * (m+1) + m * (n+1) ;
44 U = zeros (n+2 ,n+2);
45 psim = zeros (N,1) ;
46 etam = zeros (N,1) ;
47 xm = zeros (N,1) ;
48 ym = zeros (N,1) ;
49 % Creación de Matrices miméticas Gradiente , Divergencia , de Pesos P,Q:
50 Gx = gradiente (n)/hx;
51 Gy = gradiente (m)/hy ;
52 Dx = divergencia (n)/hx;
53 Dy = divergencia (m) /hy
54 DD = divergencia2D (Dx,Dy,n,m);
55 GG = gradiente2D (Gx,Gy,n,m);
56 PP = pesoP2D (hx,hy,n,m);
57 DDQ = zeros (N,M);
58 dpq=zeros(n,3*n+1);
59 for i =1:n ;
60 dpq(i,i)=-1;
61 dpq(i,i+n)=-1 ;
62 dpq(i,i+n+1)=1;
63 dpq(i,i+2 * n+1)=1;
64 end
65 for k=1:m ;
66 DDQ = (k*(n+2):(k+1)* n+2* k-1 , (2*(k-1)*n+k : (2*k+1)* n+k)=dpq;
67 end
68 % Hallando la matriz B bidimensional llamada BB:
69 BB=(DDQ+GG'\times PP);
70 % Construcción de la matriz de coeficientes usando la condición de
71 frontera.
72 % Matriz Alfa
73 AAlfa=zeros(N;N);
74 alfa1=(-16 * exp (16))/exp(16)-1);
75 alfa2=(-16 * exp (16))/{exp(16)-1);
76 alfa3=(-16 * exp (16))/exp(16)-1);
77 alfa4=(-16 * exp (16))/exp(16)-1)};
78 a1=alfa1 * ones (n,1);
79 a2=zeros(n+2,1);
80 a2(1)=alfa4;

```

```

80 a2(n+2)=alfa2;
81 a3=alfa3 * ones(n,1);
82 VectorA=[a1];
83 for k=1:m
84 VectorA=[VectorA;a2];
85 end
86 VectorA=[VectorA;a3];
87 AAlfa=diag(VectorA);
88 % Matriz Beta
89 BBeta=Zeros(N,N);
90 beta1=1;
91 beta2=1;
92 beta3=1;
93 beta4=1;
94 b1=beta1 * ones(n,1);
95 b2=ones(n+2,1);
96 b2(1)=beta4;
97 b2(n+2)=beta2;
98 b3=beta3 * ones(n,1);
99 VectorB=[b1];
100 for k=1:m
101 VectorB=[VectorB;b2];
102 end
103 VectorB=[VectorB;b3];
104 BBeta=diag(VectorB);
105 % Evaluación de la solución exacta en los puntos de la malla.
106 for i=1:N;
107 [psim(i)=etam(i)]=indices(i,n,m);
108 xm(i)=psim(i) * hx;
109 ym(i)=etam(i) * hy;
110 ureal(i)=Sol_Robin(xm(i), ym(i));
111 end
112 % Valor de la función fuente en el interior.
113 vF_INT=zeros(N,1);
114 for i=1:N;
115 [psim(i), etam(i)]=indices(i,n,m);
116 if etam(i)==double(m) || psim(i)==double(n) || psim(i)==0. || etam(i)==0
117 end
118 vF_INT(i)=0
119 else
120 xm(i)=psim(i)\times hx;
121 ym(i)=etam(i)\times hy;
122 vF_INT(i)=Fuente\_Robin(xm(i),ym(i));
123 end
124 end
125 % Función en la Frontera
126 vF_EXT=zeros(N,1);
127 for i = 1:N
128 [psim(i), etam(i)]=indices(i,n,m);
129 xm(i)=psim(i)*hx;
130 ym(i)=etam(i)*hy;
131 [psim(i) etam(i) hx, xm(i) ym(i)];
132 if xm(i)== 0.
133 vF_EXT(i) = CF4(xm(i),ym(i));
134 end
135 if ym(i)== 0.
136 vF_EXT(i) = CF1(xm(i),ym(i));
137 end
138 if xm(i)== 1.
139 vF_EXT(i) = CF2(xm(i),ym(i));
140 end
141 if ym(i)== 1
142 vF_EXT(i) = CF3(xm(i),ym(i));
143 end
144 end

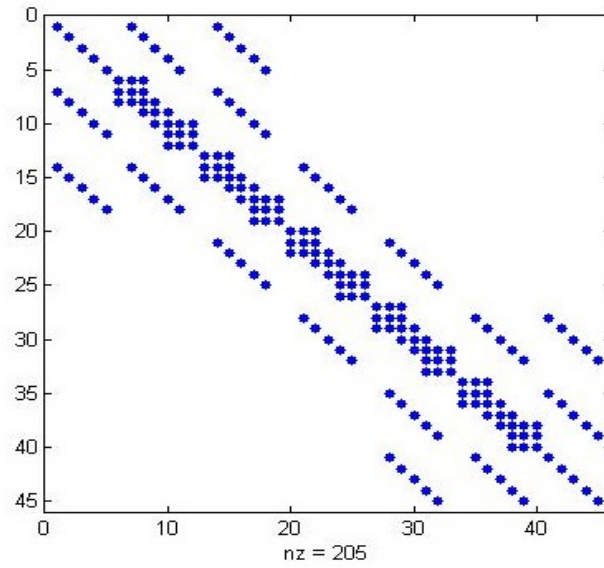
```

```

145 % Solución mimética (BB)
146 S1 = (AAlfa + BBeta*(BB*GG) - DD*GG);
147 u=inv(S1)*(vF_INT + vF_EXT);
148 % [vF_INT vF_EXT]
149 % ERROR
150 Error=norm(u-ureal', 'inf');
151 Error
152 time=toc
153 for k = 1:N
154 for i = 1:n+2
155 if xm(k) == xs(i)
156 ii = i ;
157 end
158 end
159 for j = 1:m+2
160 if ym(k)== ys(j)
161 jj = j;
162 end
163 end
164 U(ii , jj) = u(k);
165 end
166 U(1,1) = (U(1,2) + U(2,1))/2;
167 U(1,m+2) = (U(1,m+1) + U(2,m+2))/2;
168 U(n+2,1) = (U(n+1,1) + U(n+2,2))/2;
169 U(n+2,m+2) = (U(n+1,m+2) + U(n+2,m+1))/2;
170
171 % figure
172 [X,Y]=meshgrid(xs,ys);
173 surf(X,Y,U')
174 title(solucion aproximada)
175 w = ureal';
176 for k = 1:N
177 for i = 1:n+2
178 if xm(k) == xs(i)
179 ii = i ;
180 end
181 end
182 for j = 1:m+2
183 if ym(k)== ys(j)
184 jj = j;
185 end
186 end
187 W(ii , jj) = w(k);
188 end
189 W(1,1) = (W(1,2) + W(2,1))/2;
190 W(1,m+2) = (W(1,m+1) + W(2,m+2))/2;
191 W(n+2,1) = (W(n+1,1) + W(n+2,2))/2;
192 W(n+2,m+2) = (W(n+1,m+2) + W(n+2,m+1))/2;
193 % figure
194 [X,Y]=meshgrid(xs,ys);
195 surf(X,Y,W)
196 title(solucion exacta)

```

## 5. Estructura matricial del sistema Lineal de Ecuaciones

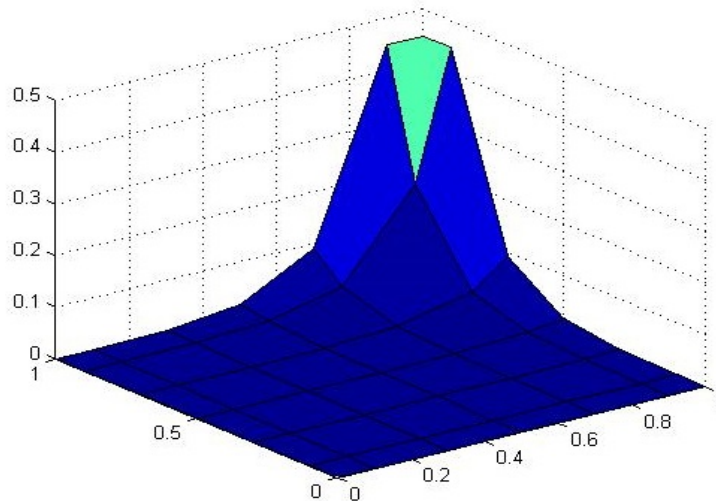


## 6. Error Numérico Computacional Usando la Norma del Máximo.

El error de aproximación generada por la solución exacta y la solución aproximada, usando el método mimético se muestra a continuación.

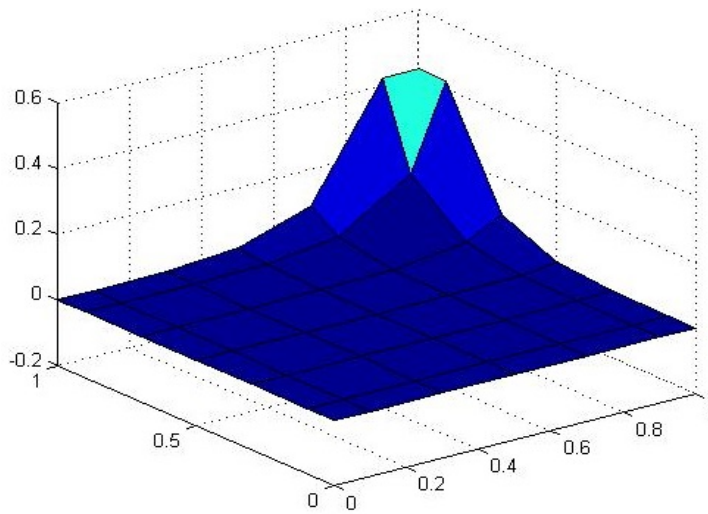
	Tamaño	Error Mimético	Tiempo
Malla Uniforme	$5 \times 5$	0,0340	0,0311 <i>seg</i>
	$8 \times 8$	0,0193	0,0385 <i>seg</i>
	$10 \times 10$	0,0135	0,4908 <i>seg</i>

### 6.1. Gráfica de la solución exacta y aproximada



*Solución Exacta*





*Solución Aproximada*

## 6.2. Conclusiones.

1. El tratamiento de las condiciones de contorno no implica el uso de mallas extendidas ni puntos fantasmas en la formulación, como ocurre a veces con el método estándar de diferencias finitas, la cuál hace su implementación más simple que un esquema de diferencias finitas tradicional.
2. Los operadores discretos provenientes del método mimético de Castillo - Grone se caracterizan por mantener los mismos órdenes de exactitud de los operadores diferenciales gradiente(G) y divergencia(D) tanto en el interior como en la frontera del dominio.

**Agradecimiento.** El autor agradece a todos los colegas y estudiantes que contribuyen a preparar este manuscrito

## Referencias

- [1] **K. W. Morton and D. F. Mayers.** “*Numeral Solution of Partial Differential Equations*”, CRCI Press, Cambridge, UK, 1994.
- [2] **M. Shashkov.** “*Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*, Symbolic and Numeric Computation Series”, CRC Press, Boca Raton, Fla, USA, 2001.
- [3] **J. E. Castillo, J. M. Hyman, M. Shashkov, and S. Steinberg** “*Fourth-and sixth-order conservative finite difference approximations of the divergence and gradient*, Applied Numeral Mathematics”, vol.37, no.1-2,pp. 171-187, 2001
- [4] **J. E. Castillo and R. D. Grone.** “*A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfyng a global conservation law*. SIAM Journal on Matrix Analysis and applications”, vol. 25, no. 1, pp. 128-142, 2003
- [5] **J. E. Castillo and M. Yasuda.** “*Linear systems arising for second-order mimetic divergence and gradients discretizations*. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms”, vol. 4, no. 1, pp. 67-82, 2005 2011.

- [6] **M. Freites-Villegas, J. M. Guevara-Jordan, O. R. Rojas, J. E. Castillo, and S. Rojas.** “*A mimetic finite difference scheme for solving the steady state diffusion equation with singular sources.*” in *Simulación Numérica y Modelado Computacional. Proceedings of the 7th International Congress of Numerical Methods in Engineering and Applied Science*, **J. Rojo, M. J. Torres, and M. Cerrolaza**, Eds., pp. 25-32, San Cristóbal, Venezuela, 2004
- [7] **D. L. Powers.** “*Boundary Value Problems*”. **Jhon Wiley & Sons**, New York, NY, USA, 3rd edition, 1987
- [8] **J. M. Guevara-Jordan, S. Rojas, M. Freites-Villegas, and J. E. Castillo.** “*A new second order finite difference conservative scheme,* *Divulgaciones Matemáticas*”, vol.13, no. 2, pp. 107-122, 2005
- [9] **J. W. Thomas.** “*Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*”, vol. 22 of *Texts in applied Mathematics*, Springer, New York, NY, USA, 3rd edition, 1995
- [10] **J. E. Castillo and M. Yasuda.** “*A comparison of two matrix operator formulations for mimetic divergente and gradient discretizations*”, in *Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications*, H. R. Arabnia and Y. Mun, eds., vol. 3, CSREA Press. Las Vegas, 2003, pp. 1281-1285
- [11] **J. Arteaga - Arispe and J.M. Guevara Jordan.** “*A conservative finite difference scheme for static diffusion equation*”, Department of Mathematics, University Center of Venezuela.
- [12] **V. Huy and J. Castillo.** “*Mimetic discretization of elliptic Pde wiht full tensor Coefficients*”, Departament of Computer science, San Diego state University, San Diego, CA 92182, USA.