



Los fractales y su relación con la computación. Una revisión documental

Fractals and their relationship with computing. A documentary review

Os Fractais e a sua relação com a computação. Uma revisão documental

Bladimir Enrique Urgiles-Rodríguez ^I
bladimir.urgiles@epoch.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-9734-7814>

Byron Ernesto Vaca-Barahona ^{II}
byron.vaca@epoch.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-3622-0668>

Katherine Gissel Tixi-Gallegos ^{III}
katherine.tixi@epoch.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-7545-9671>

Alex Fernando Erazo-Luzuriaga ^{IV}
alexerazo1407@hotmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1089-383X>

Marco Javier Cárdenas-Villamar ^V
mc.designing@hotmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9194-5805>

Correspondencia: bladimir.urgiles@epoch.edu.ec

Ciencias técnicas y aplicadas
Artículo de investigación

***Recibido:** 19 de enero de 2020 ***Aceptado:** 31 de marzo de 2020 * **Publicado:** 26 de abril de 2020

- I. Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación, Ingeniero en Sistemas Informáticos, Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- II. Diplomado en Manejo de Información a Través de Internet, Máster Universitario en Seguridad Informática y Sistemas Inteligentes, Máster Universitario en Tecnología Educativa: E-Learning y Gestión de Conocimiento, Ingeniero en Sistemas, Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- III. Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación, Ingeniera en Sistemas Informáticos, Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- IV. Ingeniero en Sistemas Informáticos, Investigador Independiente, Ecuador.
- V. Licenciado en Diseño Gráfico, Investigador Independiente, Ecuador.

Resumen

El desarrollo de la computación y las matemáticas han permitido suscitar estudios interesantes y aplicar la geometría fractal en varias ciencias como la Anatomía, Medicina, el Arte y la Geología. Los fractales han facilitado la descripción de topografías, perfiles costeros y estructuras biológicas. En la actualidad la informática permite realizar estudios multifractales y análisis de imágenes. En este artículo se presenta una revisión documental acerca de los fractales y su relación con la computación. Desde el punto de vista teórico parte de autores clásicos como Mandelbrot, (1963/1977), Geake y Landini, (1997) y autores contemporáneos como Lesmoir-Gordon, (2012), entre otros. Desde el punto de vista metodológico se realizó una revisión sucinta de artículos científicos publicados en revistas científicas de prestigio que hacen referencia a este tema. En este sentido, se procuró revisar material bibliográfico que refiera los principales avances a este respecto. Entre los resultados del análisis documental de contenido destaca que las estructuras fractales y la computación hoy en día son una unidad dialéctica que ha permitido avances en diferentes ámbitos científicos, como en la Geología, en la Medicina, entre otros. De allí que se concluya que El análisis fractal está presente de manera recurrente en la naturaleza y el desarrollo de los métodos matemáticos e informáticos ha permitido su aplicación en varios campos de la ciencia como la medicina, geología, anatomía humana, etc., para caracterizar distintos fenómenos y profundizar en su estudio.

Palabras claves: Ciencias; matemáticas; formas irregulares; computación; geociencia.

Abstract

The development of computation and mathematics have allowed for interesting studies and the application of fractal geometry in various sciences such as Anatomy, Medicine, Art and Geology. Fractals have facilitated the description of topographies, coastal profiles, and biological structures. Currently, computer science allows multifractal studies and image analysis. This article presents a documentary review about fractals and their relationship with computing. From a theoretical point of view, it starts from classic authors such as Mandelbrot, (1963/1977), Geake and Landini, (1997) and contemporary authors such as Lesmoir-Gordon, (2012), among others. From a methodological point of view, a succinct review of scientific articles published in prestigious scientific journals that refer to this topic was carried out. In this sense, an effort was made to review bibliographic material that refers to the main advances in this regard. Among the

results of the documentary analysis of content, it stands out that fractal structures and computing today are a dialectical unit that has allowed advances in different scientific fields, such as Geology, Medicine, among others. Hence, it is concluded that fractal analysis is present recurrently in nature and the development of mathematical and computer methods has allowed its application in various fields of science such as medicine, geology, human anatomy, etc., to characterize different phenomena and deepen their study.

Keywords: Sciences; mathematics; irregular shapes; computation; geoscience.

Resumo

O desenvolvimento da computação e da matemática permitiu despertar estudos interessantes e aplicar geometria fractal em várias ciências como Anatomia, Medicina, Arte e Geologia. Fractais facilitaram a descrição de topografias, perfis costeiros e estruturas biológicas. Atualmente, a computação permite estudos multi-digitais e análise de imagem. Este artigo apresenta uma revisão documental dos fractais e da sua relação com a computação. Do ponto de vista teórico, parte de autores clássicos como Mandelbrot, (1963/1977), Geake e Landini, (1997) e autores contemporâneos como Lesmoir-Gordon, (2012), entre outros. Do ponto de vista metodológico, foi realizada uma revisão sucinta de artigos científicos publicados em prestigiadas revistas científicas referidas a este tema. A este respeito, foram realizados trabalhos de revisão do material bibliográfico sobre os principais desenvolvimentos a este respeito. Entre os resultados da análise documental do conteúdo destaca-se que as estruturas fractais e a computação hoje em dia são uma unidade dialética que tem permitido avanços em diferentes áreas científicas, como a geologia, a medicina, entre outros. Conclui-se, portanto, que a análise fractal está presente numa base recorrente na natureza e desenvolvimento de métodos matemáticos e informáticos que permitiram a sua aplicação em vários domínios da ciência, como a medicina, a geologia, a anatomia humana, etc., caracterizar diferentes fenómenos e aprofundar o seu estudo.

Palavras-chave: Ciência; matemática; formas irregulares; computação; geociência.

Introducción

Para comprender los fractales y su utilidad es importante considerar que los objetos elaborados por la mano del hombre se caracterizan por la suavidad de sus formas, sin embargo, las formas naturales están determinadas por la irregularidad y rugosidad (Mandelbrot, 1977). Los fractales

son estructuras que mantienen su forma sin importar la distancia o escala desde la que se las analice. El presente trabajo consiste en una revisión sobre los fractales y su aplicación, así como las técnicas computacionales que los sustentan. Si bien este es un tema muy amplio, esta revisión apunta a dar una visión general sobre este tema, abordando las distintas aplicaciones en las Ciencias Médicas, Geológicas y Ciencias Naturales en general, así como los procesos computacionales que están detrás de su análisis.

Materiales y Métodos

Para la conformación del contenido de este trabajo se realizó una revisión sucinta de artículos científicos publicados en revistas científicas de prestigio que hacen referencia a este tema. En este sentido, se procuró revisar material bibliográfico que refiera los principales avances a este respecto.

Fundamentos teóricos básicos de partida

Benoit Mandelbrot en 1960 llamó “fractales” a los objetos cuya geometría compleja no puede ser caracterizada por una dimensión integral. Este fue el primer paso para realizar una descripción de formas irregulares y fragmentadas presentes en la naturaleza (Mandelbrot, 1963). Las formas euclidianas están compuestas de líneas suaves en tanto que en la naturaleza muchas formas presentan similitud al compararlas en distintas escalas espaciales, lo cual se denomina geometría fractal (Mandelbrot, 1977). Una característica esencial de los objetos fractales es que sus propiedades sujetas a medición, tal es el caso de la longitud o las áreas, están en función de la escala de las medidas (Mandelbrot, 1967).

El carácter fractal de las imágenes se cuantifica mediante la dimensión fractal (D), la cual cuantifica la relación entre los modelos observados a distintas escalas de magnificación. Para las formas euclidianas, como líneas suaves, D posee un valor de 1, mientras que, en un área completamente llena, esta variable adopta un valor de 2. Para los modelos repetitivos de una línea fractal los valores de D permanecen entre 1 y 2. Para fractales descritos por un valor D cercano a 1, los modelos observados a distintas escalas se repiten en una forma que genera formas suaves esparcidas. Sin embargo, si D se acerca a un valor de 2 los modelos que se repiten generan formas intrincadas (Geake y Landini, 1997). El número de dimensiones fractales existentes es muy largo y no existe una nomenclatura totalmente común entre los matemáticos (Falconer, 1990).

Análisis y Discusión de los Resultados

Los fractales y el desarrollo de la informática

Los estudios matemáticos fueron trascendentales para describir los objetos de bordes complejos mediante sus propiedades fractales (Maling, 1968 y Hakanson, 1978). Posteriormente, en 1973 Mandelbrot empieza a desarrollar un algoritmo para describir las costas británicas tomando en cuenta los fractales (Lesmoir-Gordon, 2012). A partir de este descubrimiento con el desarrollo de microcomputadoras se empiezan a crear los primeros fractales (Lauwerier, 1991). En 1980 IBM descubre el conjunto de Mandelbrot, uno de los fractales más estudiados hasta el momento por la particularidad de sus propiedades geométricas y estructurales (Lesmoir-Gordon, 2012).

Adicionalmente, las herramientas informáticas permitieron una mayor incursión científica en lo que tiene que ver con los fractales. Dentro de esto hay varios ejemplos, como el del estudio realizado por Weibel (1991), quien propone que la geometría fractal constituye un patrón de diseño en los organismos vivos y sus órganos. Asimismo, Briggs (1992) asevera que la geometría fractal se puede encontrar tanto en el espacio exterior, como en el mundo vegetal (árboles, flores, hojas, etc.) los microorganismos y el cuerpo humano. Por otra parte, Mc Guire (1991) sostiene que las estructuras de la naturaleza poseen una complejidad que puede comprenderse con simpleza si se la traduce con la geometría fractal. Yendo más lejos se ha llegado a establecer que las unidades de construcción que conforman los organismos naturales (células, moléculas y átomos) poseen un límite en el que pierden sus propiedades fractales (Avnir y Farin, 1984). Sin embargo, hasta que ese límite sea alcanzado, el análisis de geometría fractal ofrece la mejor descripción relacionada con sus dimensiones (longitud, área y volumen) (Cross y Cotton, 1992).

El desarrollo de los sistemas informáticos ha permitido avances en el estudio de agregados fractales tal es el caso de partículas que se juntan en líquidos, gases y sólidos con determinados patrones estructurales. A pesar de que la formación de estructuras fractales por modelos computacionales no se encuentra todavía lo suficientemente entendida, estos modelos permiten comprender una gran variedad de experimentos. A partir de 1980 los avances en la tecnología informática y los conceptos de geometría fractal permitieron desarrollar modelos teóricos e informáticos avanzados (Meakin, 1998).

Geociencia

Mark y Aronson (1984) tomaron algunas muestras de patrones topográficos, encontrando que las superficies son similares y la dimensión fractal persistía en varias escalas. Sin embargo, según Goodchild (1982) esto no se vincula directamente con los procesos geomorfológicos. La aplicación de fractales en las geociencias cobra cada vez más aceptación. Una prueba de esto es el programa FRACEK que fue diseñado para caracterizar los movimientos de masa con base en la dimensión fractal, la longitud y su ancho, encontrándose una correlación entre la dimensión fractal y cociente de estas dos variables (Ancho/Longitud) (Sezer, 2010).

Medicina

Muchos de los estudios sobre estructuras celulares se han basado en geometría fractal. Keough et al. (1991) demostraron que la membrana superficial de varios tipos de células posee estructura fractal. Losa et al. (1991) midieron la dimensión fractal de la membrana celular de los linfocitos. Estas imágenes se digitalizaron en sistemas informáticos y quedaron similares a distintas escalas, pudiendo utilizarse este recurso para identificar sus individualidades en sus características. Por otra parte, la interpretación de imágenes médicas comprende un conjunto de pasos para detectar posibles anomalías que pueden causar afectación a las personas, lo cual se logra primeramente mediante la percepción de modelos singulares de imagen. Esto se complementa con el establecimiento de una relación entre los modelos detectados y los posibles diagnósticos que se puedan deducir a partir de ellos. Asimismo, un factor de suma importancia es la textura, pues el análisis de geometría fractal provee pautas determinantes respecto a la profundidad escénica y la orientación de la superficie (Tourassi, 1999). De acuerdo a Pratt et al. (1978), la complejidad espacial puede ser descrita tomando en cuenta aspectos relacionados con la textura. Todos estos avances en el desarrollo de algoritmos establecidos a partir de las dimensiones texturales han permitido extraer información significativa para la realización de diagnósticos con varias modalidades de imagen, como radiografías de pecho, tórax, mamografías, ultrasonido, tomografía computarizada, tomografía computarizada de una única emisión de fotones, entre otras. Asimismo, la medida de la dimensión fractal computarizada puede ayudar a determinar la heterogeneidad y establecer si hay expansión en tejidos difíciles de diferenciar a simple vista como tumores del seno y próstata. Esto permite detectar cualquier anomalía en su dispersión.

Desde este marco referencial se presenta la tabla N° 1, que incluye los hallazgos de estos autores con sus respectivos análisis, que da cuenta de la revisión documental realizada, en el marco de este tópico temático, como se inserta a renglón seguido:

Tabla N° 1. Análisis documental-bibliográfico de contenido según autores, año y publicación

Autores (año)	Texto Revisado	Publicación	Vinculación con la computación	Análisis de contenido
Maling (1968)	How long is a piece of string?	Cartographic J., 5, 147-156	Se relaciona porque se sustentó en fundamentos matemáticos (algoritmos) para descifrar objetos de bordes complejos, mediante propiedades fractales.	Fue uno de los trabajos iniciales que incorpora el estudio de objetos de bordes indefinidos a través de la matemática y de las propiedades fractales.
Hakanson (1978) Mandelbrot (1977)	The length of closed geomorphic lines The fractal geometry of nature	Math. Geol.,10, 141-167. Nueva York: Freeman; 1977	Se relaciona con la informática porque estudia la Geometría fractal de la naturaleza y concuerda con los estudios de Maling (1968). Desarrolló un algoritmo para describir las costas británicas, considerando los fractales.	Estudia las formas irregulares de la naturaleza, las formas irregulares de la tierra. Sustentada en las estructuras fractales se crean algoritmos que se desarrollarían a posteriori en formatos digitales.
Lesmoir-Gordon, (2012)	The Mandelbrot set, fractal geometry and Benoit Mandelbrot – The Life and Work of a Maverick Mathematician	Medicographia. 34. 353	Se patenta y se cristaliza la relación de las estructuras fractales con la informática porque se obtiene el desarrollo de microcomputadoras desde sus fundamentos teórico-prácticos.	A partir de los aportes de Mandelbrot se sientan las bases de microprocesados de formas irregulares.

Lauwerier, 1991	Fractals: Images of Chaos.	Penguin Books, Londres	Se vincula e incursiona en ella la famosa compañía IBM.	Esta marca de equipos mundialmente famosa se incorpora en estos estudios para descubrir en avanzada el lado comercial de programas informáticos para detectar las formas irregulares del planeta mediante la informática.
Briggs (1992)	Fractals: The Patterns of Chaos	Thames and Hudson. Ltd, Londres.	Se relaciona con la computadora porque ésta facilitará el análisis de la geometría fractal que se puede encontrar tanto en el espacio exterior, como en el mundo vegetal (árboles, flores, hojas	Descubre que las estructuras fractales se hallan en todo el mundo exterior e interior del ser humano y se complementa con la informática para realizar análisis en uno y otro contexto.
Mc Guire (1991)	An Eye for Fractals.	Addison-Wesley, Redwood City, USA.	Se establece relación con la informática a través del estudio de fractales porque las estructuras de la naturaleza poseen una complejidad que puede comprenderse con simpleza si se la traduce con la geometría fractal.	Analiza que las formas estructurales de la naturaleza pueden observarse desde las fractales y a su vez la informatización mediante equipos y programas permite su visualización y posteriores interpretaciones.
Meakin, 1998	Fractals, Scaling and Growth Far from	Cambridge University Press, Cambridge.	Se observa en los avances en la tecnología	Estudio y creación de escalas de las

	Equilibrium.		informática y en los conceptos de geometría fractal que permitieron desarrollar modelos teóricos e informáticos avanzados.	formas de la naturaleza, mediante modelos informáticos.
Sezer, 2010	A computer program for fractal dimension (FRACEK) with application on type of mass movement characterization	Computers & Geosciences, Volume 36, Issue 3, Pages 391-396.	Se concreta en la creación del programa FRACEK que fue diseñado para caracterizar los movimientos de masa con base en la dimensión fractal, la longitud y su ancho, encontrándose una correlación entre la dimensión fractal y cociente de estas dos variables (Ancho/Longitud)	Generación de un programa informático para describir el movimiento de masas, determinando longitud y anchura del fenómeno estudiado.
Keough et al. (1991)	Cellsurfaces and fractal dimensions	J. Microsc., 163, 95 99.	La membrana superficial de varios tipos de células posee estructura fractal. Y esto se puede estudiar desde la integración de la estructura fractal en sistemas informatizados.	Estudio de las células desde dimensiones fractales, sentando las bases de equipos y programas de avanzada en cuanto a la estructura celular.
Losa et al. (1991)	The fractal dimension of pericellular membrane from lymphocytes and lymphoblastic leukemic cells	ActaStereol., II, 335 341.	Se logra en la digitalizaron de las imágenes en sistemas informáticos a distintas escalas, pudiendo utilizarse este recurso para identificar sus características la interpretación de imágenes, lo que comprende un	Relevantes hallazgos en cuanto a imagenología con fines de diagnósticos médicos en pos de prevención o detección de enfermedades, como la leucemia, por ejemplo.

			conjunto de pasos para detectar posibles anomalías que pueden causar afectación a las personas, lo cual se logra primeramente mediante la percepción de modelos singulares de imagen	
Tourassi, (1999)	Journey toward computer-aided diagnosis: Role of image texture analysis.	Radiology 213 (2), 317–320.	Establecimiento de una relación entre los modelos detectados y los posibles diagnósticos que se puedan deducir a partir de ellos. Asimismo, un factor de suma importancia es la textura, pues el análisis de geometría fractal provee pautas determinantes respecto a la profundidad escénica y la orientación de la superficie. Y ello es posible gracias a la vinculación de la estructura fractal con la informática.	Diagnosis por imágenes de computadoras, análisis e importancia del análisis de la textura de la imagen.
Pratt et al. (1978)	. Visual discrimination of stochastic texture fields.	IEEE TransactionsonSystems. Man and Cybernetics 8 (11), 796– 804.	A partir de las Dimensiones texturales han permitido extraer información significativa para la realización de diagnósticos con varias modalidades de imagen, como radiografías de pecho, tórax, mamografías,	Se cristaliza la relevancia de la textura y calidad de las imágenes que dan cuenta de irregularidades morfológicas en el ámbito de las Ciencias de la Salud que se sustenta en el uso de la

			ultrasonido, tomografía computarizada, tomografía computarizada de una única emisión de fotones, entre otras. Asimismo, la medida de la dimensión fractal computarizada puede ayudar a determinar la heterogeneidad y establecer si hay expansión en tejidos difíciles de diferenciar a simple vista como tumores del seno y próstata.	informática y aparatos de última generación sustentados en programas informáticos y en la dimensión fractal para el diagnóstico y detección de enfermedades de diversa índole, entre las que se encuentra el cáncer. Lo que permite incluso describir si el mismo ha hecho metástasis.
--	--	--	--	--

Fuente: Revisión documental de trabajos de los autores. **Elaboración:** propia.

Conclusión

El análisis fractal está presente de manera recurrente en la naturaleza y el desarrollo de los métodos matemáticos e informáticos ha permitido su aplicación en varios campos de la ciencia como la medicina, geología, anatomía humana, etc., para caracterizar distintos fenómenos y profundizar en su estudio. Este desarrollo ha llegado a tal punto que, mediante la computación se puede llegar a realizar análisis multifractales, es decir medir varias dimensiones fractales a distintas magnificaciones, como indican Pietgen et al. (1992). Finalmente, la computación ha facilitado realizar cosas que antes eran muy difíciles de imaginar, como el trabajo realizado por FeiPeng et al. (2017), que permitió discriminar mediante un análisis de fractales imágenes naturales y artificiales. Será interesante ver los avances que se presentan en este campo en los años posteriores. Hoy en día el arte también se sustenta en los fractales, pues se han realizado estudios para determinar qué tipo de fractales son más agradables para la percepción humana de la estética mediante fractales reproducidos por computadora en superficies planas (Asks y Sprot, 1996).

Referencias

1. Avnir, D. y Farin, D. 1984. Molecular fractal surfaces. *Nature*, 308, 261-263.
2. Aks D y Sprott J. 1996. Quantifying aesthetic preference for chaotic patterns. *Empirical Studies of the Arts*;14: 1-16.
3. Briggs, J., 1992. *Fractals: The Patterns of Chaos*. Thames and Hudson. Ltd, Londres.
4. Cross, S. y Cotton, D. 1992. The fractal dimension may be a useful morphometric discriminant in histopathology. *J. Path.*, 166,409-411.
5. Falconer, K. 1990. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley, Chichester.
6. Fei Peng, Die-lan Zhou, Min Long, Xing-ming Sun (2017). Discrimination of natural images and computer generated graphics based on multi-fractal and regression analysis, *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, Volume 71, Pages 72-81.
7. Geake, J. y Landini, G. 1997. Individual differences in the perception of fractal curves. *Fractals* 5:129-43.
8. Goodchild, M. 1982. The fractional Brownian process as a terrain simulation model: *Proceedings, Thirteenth Annual Pittsburgh Conference on Modelling and Simulation*, v. 13, p. 1133-1137.
9. Hakanson, L., 1978. The length of closed geomorphic lines. *Math. Geol.*, 10, 141-167.
10. Keough, K., Hyam, P., Pink, D. y Quinn, B. 1991. Cell surfaces and fractal dimensions. *J. Microsc.*, 163, 95-99.
11. Lauwerier, H., 1991. *Fractals: Images of Chaos*. Penguin Books, Londres.
12. Lesmoir-Gordon, Nigel. (2012). The Mandelbrot set, fractal geometry and Benoit Mandelbrot – The Life and Work of a Maverick Mathematician. *Medicographia*. 34. 353.
13. Losa, G. A., Baumann, G. and Nonnenmacher, T. F., 1991. The fractal dimension of pericellular membrane from lymphocytes and lymphoblastic leukemic cells. *Acta Stereol.*, II, 335-341.
14. Maling, M., 1968. How long is a piece of string? *Cartographic J.*, 5, 147-156.
15. Mark, D. y Aronson, P. 1984. Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: An empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 16(7), 671-683.
16. McGuire, M. 1991. *An Eye for Fractals*. Addison-Wesley, Redwood City, USA.

17. Mandelbrot, B., 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* 36, 394–419.
18. Mandelbrot, B., 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 156, 636–638.
19. Mandelbrot, B. 1977. *The fractal geometry of nature*. Nueva York: Freeman; 1977.
20. Meakin, P. 1998. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge.
21. Pratt, W., Faugeras, O., Gagalowicz, A., 1978. Visual discrimination of stochastic texture fields. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 8 (11), 796– 804.
22. Peitgen, H., Jurgens, H. y Saupe, D. 1992. *Fractals in the Classroom: Part One--Introduction to Fractals and Chaos*. Springer, Nueva York.
23. Sezer, E. 2010. A computer program for fractal dimension (FRACEK) with application on type of mass movement characterization, *Computers & Geosciences*, Volume 36, Issue 3, Pages 391-396.
24. Tambasco M y Magliocco A. 2008. Relationship between tumor grade and computed architectural complexity in breast cancer specimens. *Hum Pathol.*; 39(12):1859-1860.
25. Tourassi, G. 1999. Journey toward computer-aided diagnosis: Role of image texture analysis. *Radiology* 213 (2), 317–320.
26. Weibel, E. 1991. Fractal geometry: a design principle for living organisms. *Am. J. Physiol.*, 261, L361-L369.

References

1. Avnir, D. and Farin, D. 1984. Molecular fractal surfaces. *Nature*, 308, 261 263.
2. Aks D and Sprott J. 1996. Quantifying aesthetic preference for chaotic patterns. *Empirical Studies of the Arts*; 14: 1–16.
3. Briggs, J., 1992. *Fractals: The Patterns of Chaos*. Thames and Hudson. Ltd, London.
4. Cross, S. and Cotton, D. 1992. The fractal dimension may be a useful morphometric discriminant in histopathology. *J. Pathol.*, 166,409-411.
5. Falconer, K. 1990. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley, Chichester.

6. Fei Peng, Die-lan Zhou, Min Long, Xing-ming Sun (2017). Discrimination of natural images and computer generated graphics based on multi-fractal and regression analysis, *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, Volume 71, Pages 72-81.
7. Geake, J. and Landini, G. 1997. Individual differences in the perception of fractal curves. *Fractals* 5: 129–43.
8. Goodchild, M. 1982. The fractional Brownian process as a terrain simulation model: *Proceedings, Thirteenth Annual Pittsburg Conference on Modeling and Simulation*, v. 13, p. 1133-1137.
9. Hakanson, L., 1978. The length of closed geomorphic lines. *Math. Geol.*, 10, 141-167.
10. Keough, K., Hyam, P., Pink, D., and Quinn, B. 1991. Cellsurfaces and fractal dimensions. *J. Microsc.*, 163, 95 99.
11. Lauwerier, H., 1991. *Fractals: Images of Chaos*. Penguin Books, London.
12. Lesmoir-Gordon, Nigel. (2012). The Mandelbrot set, fractal geometry and Benoit Mandelbrot - The Life and Work of a Maverick Mathematician. *Medicographia*. 34. 353.
13. Losa, G. A., Baumann, G. and Nonnenmacher, T. F., 1991. The fractal dimension of pericellular membrane from lymphocytes and lymphoblastic leukemic cells. *Acta Stereol.*, II, 335 341.
14. Maling, M., 1968. How long is a piece of string? *Cartographic J.*, 5, 147-156.
15. Mark, D. and Aronson, P. 1984. Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: An empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 16 (7), 671–683.
16. McGuire, M. 1991. *An Eye for Fractals*. Addison-Wesley, Redwood City, USA.
17. 1. Mandelbrot, B., 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* 36, 394–419.
18. 2. Mandelbrot, B., 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 156, 636–638.
19. 3. Mandelbrot, B. 1977. *The fractal geometry of nature*. New York: Freeman; 1977.
20. 4. Meakin, P. 1998. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge.
21. 5. Pratt, W., Faugeras, O., Gagalowicz, A., 1978. Visual discrimination of stochastic texture fields. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 8 (11), 796–804.

22. 6.Peitgen, H., Jurgens, H. and Saupe, D. 1992. Fractals in the Classroom: Part One - Introduction to Fractals and Chaos. Springer, New York.
23. 7.Sezer, E. 2010. A computer program for fractal dimension (FRACEK) with application on type of mass movement characterization, Computers & Geosciences, Volume 36, Issue 3, Pages 391-396.
24. 8.Tambasco M and Magliocco A. 2008. Relationship between tumor grade and computed architectural complexity in breast cancer specimens. Hum Pathol .; 39 (12): 1859-1860.
25. 9.Tourassi, G. 1999. Journey toward computer-aided diagnosis: Role of image texture analysis. Radiology 213 (2), 317–320.
26. 10.Weibel, E. 1991. Fractal geometry: a design principle for living organisms. Am. J. Physiol., 261, L361-L369.

Referências

1. Avnir, D. e Farin, D. 1984. Superfícies moleculares fractal. Nature, 308, 261, 263.
2. Aks D e Sprott J. 1996. Quantificando a preferência estética pelos padrões caóticos. Estudos Empíricos das Artes; 14: 1–16.
3. Briggs, J., 1992. Fractals: The Patterns of Chaos. Tamisa e Hudson. Ltd, Londres.
4. Cross, S. e Cotton, D. 1992. A dimensão fractal pode ser discriminante morfométrica auspiciosa na histopatologia. J. Path., 166, 409-411.
5. Falconer, K. 1990. Geometria Fractal: Fundamentos e Aplicações Matemáticas. John Wiley, Chicester.
6. Fei Peng, Die-lan Zhou, Min Long, Xing-ming Sun (2017). Discriminação de imagens naturais e gráficos gerados por computador com base em análises de fractal e regressão, AEU-International Journal of Electronics and Communications, Volume 71, páginas 72-81.
7. Geake, J. e Landini, G. 1997. Diferenças individuais na percepção das curvas fractais. Fractais 5: 129–43.
8. Goodchild, M. 1982. O processo browniano fracionário como modelo de simulação de terreno: Proceedings, XIII Conferência Anual de Pittsburg sobre Modelagem e Simulação, v. 13, p. 1133-1137.
9. Hakanson, L., 1978. O comprimento das linhas geomórficas fechadas. Math. Geol., 10, 141-167.

10. Keough, K., Hyam, P., Pink, D. e Quinn, B. 1991. Cellsurfaces e dimensões fractal. *J. Microsc.*, 163, 95, 99.
11. Lauwerier, H., 1991. *Fractals: Images of Chaos*. Penguin Books, Londres.
12. Lesmoir-Gordon, Nigel. (2012). O conjunto de Mandelbrot, geometria fractal e Benoit Mandelbrot - a vida e obra de um matemático independente. *Medicographia*. 34. 353
13. Losa, G. A., Baumann, G. e Nonnenmacher, T. F., 1991. A dimensão fractal da membrana pericelular de linfócitos e células leucêmicas linfoblásticas. *Acta Stereol.*, II, 335 341.
14. Maling, M., 1968. Quanto tempo dura um pedaço de barbante? *Cartographic J.*, 5, 147-156.
15. Mark, D. e Aronson, P. 1984. Dimensões fractais dependentes de escala de superfícies topográficas: Uma investigação empírica, com aplicações em geomorfologia e mapeamento por computador. *Jornal da Associação Internacional de Geologia Matemática*, 16 (7), 671-683.
16. McGuire, M. 1991. *An Eye for Fractals*. Addison-Wesley, Redwood City, EUA.
17. 1.Mandelbrot, B., 1963. A variação de certos preços especulativos. *Journal of Business* 36, 394-419.
18. 2.Mandelbrot, B., 1967. Quanto tempo dura a costa da Grã-Bretanha? Auto-similaridade estatística e dimensão fracionária. *Science* 156, 636-388.
19. 3. Mandelbrot, B. 1977. *A geometria fractal da natureza*. Nova York: Freeman; 1977.
20. 4.Meakin, P. 1998. *Fractals, Scaling and Growth Longe do Equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge.
21. 5.Pratt, W., Faugeras, O., Gagalowicz, A., 1978. Discriminação visual dos campos de textura estocástica. *Transações IEEE em Sistemas. Man and Cybernetics* 8 (11), pp. 796-804.
22. 6. Peitgen, H., Jurgens, H. e Saupe, D. 1992. *Fractais na Sala de Aula: Parte Um - Introdução aos Fractais e Caos*. Springer, Nova Iorque.
23. 7.Sezer, E. 2010. Um programa de computador para dimensão fractal (FRACEK) com aplicação no tipo de caracterização de movimentos de massa, *Computers & Geosciences*, Volume 36, Edição 3, Páginas 391-396.
24. 8.Tambasco M e Magliocco A. 2008. Relação entre grau de tumor e complexidade arquitetônica computada em amostras de câncer de mama. *Hum Pathol*. 39 (12): 1859-1860.
25. 9.Tourassi, G. 1999. Viagem em direção ao diagnóstico auxiliado por computador: Papel da análise da textura da imagem. *Radiology* 213 (2), 317-320.

26. 10. Weibel, E. 1991. Geometria fractal: um princípio de design para organismos vivos. J. Physiol., 261, L361-L369.

©2020 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).