Universidad Santo Tomás
Primer Claustro Universitario de Colombia

Comunicaciones en Estadística
Junio 2014, Vol. 7, No. 1, pp. 19–30

Relación entre los procesos de reservas que se generan con dos reclamaciones relacionadas en el tiempo

Relationship between booking processes generated two related claims in time

Luis Alejandro Másmela Caita[a]
lmasmela@udistrital.edu.co

Edwin Javier Castillo Carreño[b]
edjcastilloca@unal.edu.co

Resumen

El proceso de reservas es para las compañías aseguradoras una base fundamental para el control de las carteras que se tienen contratadas; a fin de facilitar la manipulación del modelo matemático y probabilístico en ocasiones se discretiza el modelo, de manera que los resultados aproximen a la solución real en el continuo, en este caso se utiliza el modelo binomial compuesto para dicho propósito. En la mayoría de contextos se parte del supuesto de independencia, el caso que aquí se considera se supone de dependencia entre dos tipos de reclamaciones denominadas: la reclamación principal y la sobre-reclamación o reclamación subsecuente, esta última estará asociada siempre que exista una reclamación principal. El tipo de modelo con reclamaciones relacionadas en el tiempo genera dos procesos de reservas, uno para cuando la reclamación subsecuente no es retrasada a un siguiente periodo de tiempo y otro donde se cubre el total reclamado, tanto por la reclamación principal como por la subsecuente. Ya que manipular dichos procesos por separado es innecesario y poco práctico, se genera a partir de las probabilidades de supervivencia de ambos procesos y la manipulación de funciones generadoras de probabilidad, una ecuación que recopila la información de los dos procesos de reservas.

***Palabras clave*:** procesos de reservas, funciones generadoras de probabilidad, probabilidad de ruina, reclamaciones relacionadas en el tiempo, binomial compuesto.

Abstract

For insurance companies the reservation process is the fundamental basis for controlling portfolios contracted to facilitate the manipulation of mathematical and

[a]Profesor asistente. Facultad de Ciencias y Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.

[b]Estudiante. Maestria en Ciencias Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

probabilistic model. Sometimes the model is discretized so that the results approximate the real solution in the continuum, in this case the compound binomial model is used for this purpose. In most contexts the assumption of independence is assumed, in this article we consider dependence between two types of complaints referred to the principal claim and over-claim or subsequent claim, the latter will be involved whenever there is a claim principal. The type of model with time-related claims process generates two reserves, one for when the subsequent claim is not delayed to a next time and another where it covers the total claimed by both the principal and by the subsequent claim. Since manipulate these processes separately is unnecessary and impractical, we generate from the survival probabilities of both processes and manipulate the probability generating functions, an equation that collects information from the two processes of reserves.

***Keywords*:** booking processes, probability generating functions, probability of ruin, claims related in time compound binomial.

1. Introducción

Las compañías de seguros utilizan el proceso de reservas para hacer predicciones sobre el comportamiento de los portafolios que se manejan, su principal aplicación es el cálculo de la probabilidad de ruina. Ya que la probabilidad de ruina para un proceso de superávit en tiempo continuo puede requerir un manejo matemático dispendioso, algunos autores como Shiu (1989) y Dickson (1994) plantean la discretización del modelo para conseguir resultados aproximados de manera más sencilla. Uno de los modelos discretos más utilizados es el modelo binomial compuesto, propuesto por Gerber (1988), debido a que desde este se puede hacer un paso al modelo en tiempo continuo utilizando un límite al infinito.

A medida que el tiempo ha avanzado y las compañías aseguradoras han presentado distintos tipos de inconvenientes, donde los modelos clásicos no brindan una solución, se ha hecho necesario implementar nuevos modelos matemáticos y probabilísticos; sobre todo, para distintos tipos de situaciones donde existe dependencia entre las reclamaciones que se encuentran en un portafolio. Un modelo donde existe dependencia es el planteado por Guo & Yuen (2001) y estudiado en detalle por Castillo (2013); en dicho estudio aparecen la relación entre los procesos de reservas o superávit que se presentan cuando existe una reclamación principal y una sobrereclamación o reclamación subsecuente. La ecuación de relación entre procesos de reservas es utilizada también por Guo & Yuen (2001), con el propósito de plantear fórmulas recursivas que permiten calcular la probabilidad de ruina en tiempo finito para este tipo de modelo con reclamaciones relacionadas en el tiempo.

El documento que se desarrolla a continuación presenta en la Sección 2 las generalidades del modelo binomial compuesto introducido por Gerber (1988) y tratado por Rincón (2012) y Kaas et al. (2005). La Sección 3 presenta los supuestos necesarios y algunas características del modelo binomial compuesto con reclamaciones relacionadas en el tiempo. En la Sección 4 se presenta el método para la obtención de la ecuación que relaciona los procesos de reservas que surgen al estudiar el modelo planteado en la Sección 3.

2. Modelo binomial

En la literatura que trata sobre riesgo actuarial los autores presentan el modelo de Poisson compuesto, dicho modelo es bastante práctico ya que la distribución de Poisson depende de un único parámetro λ, así mismo es común que los montos de reclamaciones se supongan distribuidos de manera exponencial, esto para facilitar la estimación de parámetros de una muestra; en este caso se presenta el modelo binomial compuesto que, aunque evidencia mayor dificultad en modelos prácticos, es mucho más sencillo para la manipulación teórica y, además, desde este se puede encontrar una relación con el proceso de Poisson. Es por ello que se presenta este modelo que es introducido por Gerber (1988) y mencionado en extensión por Rincón (2012) y Alfredo (2000).

Se dice que si en la función de riesgo colectivo

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

donde N es la v.a del número de siniestros y/o reclamaciones en un intervalo de tiempo $[0, T]$ y Y_i es el monto de la i-ésima reclamación.

Si la v.a N se distribuye de manera binomial, es decir $N \sim bin(n, p)$, se dice que la función de riesgo S sigue una distribución binomial compuesta, que se nota $S \sim bincomp(n, p, G)$; en donde G es la función de distribución de cada monto.

Algunas de las características más importantes para este modelo son las siguientes:

Si S se distribuye de manera binomial compuesta se tiene que:

$$E(S) = npE(Y)$$
$$Var(S) = np((E(Y))^2 - p(E(Y))^2)$$
$$M_s(t) = (1 - p + pM_Y(t))^n$$

3. Modelo binomial compuesto con reclamaciones relacionadas en el tiempo

Se considera un modelo a tiempo discreto que involucra dos tipos de reclamaciones de seguros, las cuales son la reclamación principal y la sobre-reclamación o reclamación subsecuente sobre las unidades de tiempo $t = 1, 2, 3 \ldots$, se supone que cada reclamación principal induce una reclamación subsecuente.

En cualquier periodo de tiempo la probabilidad de tener una reclamación principal será p, $0 < p < 1$, y de no tenerla es $q = 1 - p$, la ocurrencia de las reclamaciones principales en diferentes periodos de tiempo son independientes, es decir la ocurrencia de una reclamación en el periodo k no depende de la ocurrencia en los periodos de tiempo anteriores a k; así mismo está reclamación no influirá en la ocurrencia de una reclamación en los periodos de tiempo siguientes a k. La sobre-reclamación que está asociada a una reclamación principal ocurre en el mismo periodo de tiempo con probabilidad θ o puede ser retrasada al siguiente periodo de tiempo con probabilidad $\delta = 1 - \theta$; es acá donde se presenta el tipo de relación que existe entre la reclamación principal y la sobre-reclamación. Los montos de reclamación son independientes entre si y son enteros positivos, los montos de reclamaciones principales $X_1, X_2, X_3 \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidos con función de probabilidad común

$$f(m) = f_m = Pr(X = m)$$

para $m = 1, 2, 3 \ldots$, con su correspondiente función generadora de probabilidad dada por

$$\bar{f}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m z^m$$

y con media

$$\mu_X = \sum_{m=1}^{\infty} m f_m.$$

Sean $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ variables idénticamente distribuidas e independientes que representa los montos para las sobre-reclamaciones, con función de probabilidad común

$$g(n) = g_n = Pr(Y = n)$$

Para $n = 1, 2, 3 \ldots$, con su correspondiente función generadora de probabilidad dada por

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$$

Y con media

$$\mu_Y = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n.$$

Asúmase que la prima por periodo de tiempo es de valor 1, que el superávit inicial es $u \in \mathbb{Z}^+$ y su proceso de superávit es

$$S(t) = u + t - U_X - U_Y \tag{1}$$

donde U_t^X y U_t^Y es la suma de montos de las reclamaciones principales y sobre-reclamaciones en los primeros t periodos de tiempo respectivamente, es decir

$$U_k^X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad y \qquad U_k^Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

La probabilidad de Ruina en tiempo finito es

$$\psi(u,k) = Pr(S(t) \leq 0; t = 1, 2, 3 \ldots, k) \tag{2}$$

Y con esto la probabilidad de supervivencia será

$$\phi(u,k) = 1 - \psi(u,k)$$

Este modelo supone el caso donde la ruina ocurre, ya que los fondos de la aseguradora son negativos.

Sea U_k la suma de U_k^X y U_k^Y, entonces para el periodo de tiempo $t = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} E(U_1) &= E(U_1^X + U_1^Y) \\ &= E(U_1^X) + E(U_1^Y) \end{aligned}$$

Y utilizando el teorema de la probabilidad total y el hecho de independencia entre los montos de los dos tipos de reclamaciones se obtiene

$$= p\mu_X + p\theta\mu_Y$$

Pueden existir tres escenarios en los cuales se presenten las reclamaciones relacionadas en cualquier periodo de tiempo, dichos escenarios deben tenerse en cuenta en el momento de querer planificar sobre ellos y estos se enumeran a continuación.

1. La reclamación principal.
2. La reclamación inicial y la reclamación subsecuente inducida por la reclamación inicial.
3. La reclamación subsecuente inducida por la reclamación inicial ocurrida previamente.

Bajo los posibles tipos de reclamación ya mencionados, la esperanza matemática de la suma de los montos de reclamaciones para un periodo cualquiera viene dada por

$$\begin{aligned} E(U_{n+1}) &= E(U_n) + p\mu_X + p\theta\mu_Y + p(1-\theta)\mu_Y \\ &= E(U_n) + p\mu_X + p\theta\mu_Y + p\delta\mu_Y \\ &= E(U_{n-1}) + p\mu_X + p\theta\mu_Y + p\delta\mu_Y + E(U_1) \\ &= E(U_{n-1}) + 2(p\mu_X + p\theta\mu_Y + p\delta\mu_Y) \end{aligned}$$

donde por inducción

$$\begin{aligned} &= (n+1)p0o\mu_X + p\theta\mu_Y + np\delta\mu_Y \\ &= np(\mu_X + \mu_Y) + p\mu_X + p\theta\mu_Y \end{aligned}$$

Por último, en el planteamiento del modelo se asegura que la tasa de la prima excede la tasa de reclamaciones netas y por lo tanto la carga de aseguramiento es positiva, en términos de la esperanza de la suma de montos reclamados.

$$p(\mu_X + \mu_Y) < 1 \tag{3}$$

Ya que para algunos lectores puede parecer extraño plantear este modelo a un escenario real, se ponen en consideración las siguientes situaciones donde se puede presentar este tipo de reclamaciones relacionadas en el tiempo; si se considera que para una catástrofe, como un terremoto o una tormenta, puede ser muy probable que ocurran reclamaciones de seguros después de los hechos inmediatos, o también se puede considerar el caso en que un seguro de accidente tenga después de cobrada la reclamación el agravante posterior del suceso de muerte.

Otra posible interpretación del modelo puede ser que la reclamación subsecuente sea tomada como una porción aleatoria del total de reclamaciones, tomando algunas unidades de tiempo para ser resuelto.

4. Ecuación de relación entre los procesos de reservas que modelan dos reclamaciones relacionadas en el tiempo

Cuando se presentan reclamaciones que se pueden enmarcar en el modelo mencionado en la sección 2, a su vez se manifiestan dos escenarios en los cuales difieren los procesos de reservas, es por ello que a partir de los escenarios que se mencionan a continuación se genera una ecuación que relaciona estos dos procesos.

El primero de los escenarios consiste en que si una reclamación principal ocurre en un periodo de tiempo determinado la reclamación subsecuente también ocurrirá en el mismo periodo, por lo tanto no existirán reclamaciones para el próximo periodo de tiempo y de esta manera el proceso de superávit se renueva; en este caso el proceso de reservas o superávit que modela dicha situación se presenta en la ecuación (2.1).

El segundo escenario es el evento complementario, que se mencionó anteriormente, es decir si existe una reclamación principal sobre su reclamación se producirá en el siguiente periodo de tiempo. Ahora, si la reclamación principal se produce en el periodo anterior y su reclamación subsecuente asociada se produce al final del periodo de tiempo actual, se tiene el siguiente proceso de superávit condicionado al segundo escenario

$$S_1(t) = u + t - U_t^X - U_t^Y - Y \tag{4}$$

para $t = 1, 2, 3 \ldots$ y con $S_1(0) = u$. Se nota además la probabilidad de supervivencia al proceso condicional en el periodo k como $\phi_1(u, k)$ y con esto se obtiene por medio del teorema de la probabilidad total que

$$\begin{aligned}\phi(u-1,k) &= q\phi(u,k-1) + p\theta \sum_{m+n\leq u} \phi(u-m-n,k-1) f_m g_n \\ &\qquad + p(1-\theta) \sum_{m\leq u} \phi_1(u-m,k-1) f_m \\ &= q\phi(u,k-1) + p\theta \sum_{m+n=1}^{u} \phi(u-m-n,k-1) f_m g_n + \\ &\qquad p\delta \sum_{m=1}^{u} \phi_1(u-m,k-1) f_m \end{aligned} \tag{5}$$

donde cada uno de los sumandos de la ecuación anterior representa cada posibilidad en las que se pueden presentar las reclamaciones en el periodo $t = k$, es decir

1. El primer sumando representa la probabilidad de que no exista reclamación principal en el periodo $t = k$, por la probabilidad de supervivencia del periodo anterior.

2. El segundo sumando representa la probabilidad de que exista reclamación principal y reclamación subsecuente en el periodo $t = k$, por la probabilidad de supervivencia del periodo anterior.

3. El tercer sumando representa la probabilidad de que exista reclamación principal en el periodo $t = k$ y que la reclamación principal sea retrasada al periodo $k + 1$, por la probabilidad de supervivencia del periodo anterior; es de notar que en esta oportunidad se usa el proceso de superávit definido para esta situación en la ecuación (3.1).

Además

$$\begin{aligned}\phi_1(u-1,k) &= q \sum_{n\leq u} \phi(u-n,k-1) g_n + p\theta \sum_{m+n+l\leq u} \phi(u-m-n-l,k-1) f_m g_n g_l \\ &\qquad + p(1-\theta) \sum_{m+n\leq u} \phi_1(u-m-n,k-1) f_m g_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(u-1,k) &= q \sum_{n=1}^{u} \phi(u-n,k-1) g_n + p\theta \sum_{m+n+l=1}^{u} \phi(u-(m+n+l),k-1) f_m g_n g_l \\ &\qquad + p\delta \sum_{m+n=1}^{u} \phi_1(u-(m+n),k-1) f_m g_n\end{aligned} \tag{6}$$

para $u \geq 1$ y $k \geq 1$. Es claro que $\phi(u,0) = \phi_1(u,0) = 1$ para todo $u \geq 0$. Se define la función generadora así

$$\bar{\phi}(z,k) = \sum_{u=0}^{\infty} \phi(u,k) z^u \qquad y \qquad \bar{\phi_1}(z,k) = \sum_{u=0}^{\infty} \phi_1(u,k) z^u$$

Para manipular las ecuaciones (5) y (6) mediante las funciones generadoras de probabilidad es necesario hacer un trabajo previo; para empezar se multiplicará la ecuación (3.2) por z^u, de donde se tiene

$$\begin{aligned} zz^{u-1}\phi(u-1,k) = z^u q\phi(u,k-1) + z^u p\theta \sum_{m+n=1}^{u} \phi(u-m-n,k-1) f_m g_n \\ + z^u p\delta \sum_{m=1}^{u} \phi_1(u-m,k-1) f_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zz^{u-1}\phi(u-1,k) = q(z^u\phi(u,k-1)) + p\theta\Big(\sum_{m+n=1}^{u} z^{u-(m+n)}\phi(u-m-n,k-1) z^m f_m z^n g_n\Big) \\ + p\delta\Big(\sum_{m=1}^{u} z^{u-m}\phi_1(u-m,k-1) z^m f_m\Big) \end{aligned}$$

ahora, si a esta última ecuación la sumamos a cada lado de 1 a infinito sobre u

$$\begin{aligned} z\sum_{u=1}^{\infty} z^{u-1}\phi(u-1,k) = q\Big(\sum_{u=1}^{\infty} z^u\phi(u,k-1)\Big) \\ + p\theta\Big(\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m+n=1}^{u} z^{u-(m+n)}\phi(u-m-n,k-1) z^m f_m z^n g_n\Big) \\ + p\delta\Big(\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{u} z^{u-m}\phi_1(u-m,k-1) z^m f_m\Big) \end{aligned}$$

esto es por definición de las funciones generadoras de probabilidad

$$z\bar{\phi}(z,k) = q(\bar{\phi}(z,k-1) - \phi(0,k-1)) + p\theta\bar{\phi}(z,k-1)\bar{f}(z)\bar{g}(z) + p\delta\bar{\phi_1}(z,k-1)\bar{f}(z) \quad (7)$$

utilizando los mismos argumentos sobre (3.3) se obtiene

$$z\bar{\phi_1}(z,k) = q\bar{\phi}(z,k-1)\bar{g}(z) + p\theta\bar{\phi}(z,k-1)\bar{f}z\bar{g}^2(z) + p\delta\bar{\phi_1}(z,k-1)\bar{f}(z)\bar{g}(z) \quad (8)$$

Ahora, teniendo en cuenta las funciones generadoras bivariadas

$$\bar{\phi}(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\phi}(z,k)t^k,\quad \bar{\phi_1}(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\phi_1}(z,k)t^k,\quad y\quad \bar{\phi_0}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\phi}(0,k)t^k$$

y aplicando el mismo método que se utilizó para conseguir (3.4) y (3.5) se tiene

$$z\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\phi}(z,k)t^k = qt(\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}\bar{\phi}(z,k-1)-\phi(0,k-1))+pt\theta\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\phi}(z,k-1)\bar{f}(z)t^{k-1}\bar{g}(z) + pt\delta\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\phi_1}(z,k-1)\bar{f}(z)t^{k-1}$$

$$z(\bar{\phi}(z,t)-\bar{\phi}(z,0)) = qt(\sum_{k=0}^{\infty}t^k\bar{\phi}(z,k)-\phi(0,k))+pt\theta\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\phi}(z,k)\bar{f}(z)t^k\bar{g}(z) + pt\delta\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\phi_1}(z,k)\bar{f}(z)t^k$$

$$z(\bar{\phi}(z,t)-\bar{\phi}(z,0)) = qt(\bar{\phi}(z,t)-\bar{\phi_0}(t))+p\theta t\bar{f}(z)\bar{g}(z)\bar{\phi}(z,t)+p\delta t\bar{f}(z)\bar{\phi_1}(z,t) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} z(\bar{\phi_1}(z,t)-\bar{\phi_1}(z,0)) &= qt\bar{g}(z)\bar{\phi}(z,t)+p\theta t\bar{f}(z)\bar{g}^2(z)\bar{\phi}(z,t)+p\delta t\bar{f}(z)\bar{g}(z)\bar{\phi_1}(z,t) \\ &= \bar{g}(z)(qt\bar{\phi}(z,t)+p\theta t\bar{f}(z)\bar{g}(z)\bar{\phi}(z,t)+p(1-\theta)t\bar{f}(z)\bar{\phi_1}(z,t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Es de notar que $\bar{\phi_1}(z,0)=\bar{\phi}(z,0)$, donde por definición y por propiedades de la serie geométrica se obtiene

$$\bar{\phi_1}(z,0)=\bar{\phi}(z,0)=\sum_{u=0}^{\infty}\phi(u,0)z^u=\sum_{u=0}^{\infty}z^u=\frac{1}{1-z}$$

y con esto (3.6) y (3.7) pueden escribirse como

$$z\bar{\phi}(z,t)-\frac{z}{1-z}=(qt+p\theta t\bar{f}(z)\bar{g}(z))(\bar{\phi}(z,t))+p(1-\theta)t\bar{f}(z)(\bar{\phi_1}(z,t)-qt(\bar{\phi_0}(t))$$

$$z\bar{\phi_1}(z,t)-\frac{z}{1-z}=\bar{g}(z)(z\bar{\phi}(z,t)-\frac{z}{1-z}+qt(\bar{\phi_0}(t)).$$

Para combinar las dos ecuaciones anteriores, primero se tiene despejando de la segunda ecuación $\bar{\phi_1}(z,t)$

$$\bar{\phi_1}(z,t) = \frac{1}{1-z} + \bar{g}(z)\bar{\phi}(z,t) - \frac{\bar{g}(z)}{1-z} + \frac{qt\phi_0(t)\bar{g}(z)}{z}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{\phi_1}(z,t)t\bar{f}(z)p(1-\theta) = \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)}{1-z} + \bar{g}(z)t\bar{f}(z)p(1-\theta)\bar{\phi}(z,t) - \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)\bar{g}(z)}{1-z} \\ + \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)qt\phi_0(t)\bar{g}(z)}{z}\end{aligned}$$

y al reemplazar este valor en la primera ecuación

$$\begin{aligned}z\bar{\phi}(z,t) - \frac{z}{1-z} = (qt + p\theta t\bar{f}(z)\bar{g}(z))\bar{\phi}(z,t) + \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)}{1-z} + \bar{g}(z)t\bar{f}(z)p(1-\theta)\bar{\phi}(z,t) \\ - \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)\bar{g}(z)}{1-z} + \frac{t\bar{f}(z)p(1-\theta)qt\phi_0(t)\bar{g}(z)}{z} - qt(\bar{\phi_0}(t))\end{aligned}$$

donde agrupando términos semejantes la ecuación queda escrita como

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(z,t)[z - t(q + p\bar{f}(z)\bar{g}(z))] = \frac{z}{1-z} + t(1-\bar{g}(z))\frac{p(1-\theta)\bar{f}(z)}{1-z} \\ - qt\bar{\phi_0}(t)\left(1 - p(1-\theta)t\frac{\bar{f}(z)\bar{g}(z)}{z}\right). \quad (11)\end{aligned}$$

Sea U_k^W el monto total de reclamaciones en los primeros k periodos en el modelo binomial compuesto, con monto individual de reclamaciones $W = X+Y$. Entonces, para encontrar la función generadora de probabilidad de U_k^W notada como $\bar{h}(z,k)$ se procede de la siguiente manera:

Para un periodo de tiempo cualquiera se tiene desde el teorema de la probabilidad total aplicado al modelo binomial compuesto que

$$Pr(X+Y=k) = p\theta Pr(X+Y=k) + p(1-\theta)Pr(X+Y=k)$$

si se desea expresar lo anterior mediante la función generadora de probabilidad entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
\bar{h}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X+Y=k)t^k \\
&= qt^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p\theta Pr(X+Y=k) + p(1-\theta)Pr(X+Y=k)\right] t^k \\
&= q + p\bar{f}(z)\bar{g}(z)
\end{aligned}
$$

Usando la hipótesis de independencia de los montos de reclamaciones para cada periodo se tiene que para los primeros k periodos la función generadora de probabilidad $\bar{h}(z,k) = [q + p\bar{f}(z)\bar{g}(z)]^k$. Además se notarán las funciones de densidad y de distribución de U_k^W como $h(i,k)$ y $H(i,k)$ respectivamente. Con esto, si se divide a ambos lados de (3.8) por $z - t\bar{h}(z,1)$ es decir se multiplica por $(z - t\bar{h}(z,1))^{-1}$, cuya expresión se puede ver como serie de potencias de la variable t de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
(z - t\bar{h}(z,1))^{-1} &= \frac{1}{z - t\bar{h}(z,1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(\bar{h}(z,1))^k}{z^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

Sí se multiplica cada término de (3.8) por el resultado anterior, se toma la suma $\sum_{k=0}^{\infty}$ para todos los sumandos, se toma factor común t^k y se multiplica a ambos lados de la ecuación la expresión z^k, se obtiene que para $k = 1, 2, 3\ldots$

$$
\begin{aligned}
z^k\bar{\phi}(z,k) = \frac{\bar{h}(z,k)}{1-z} + \bar{f}(z)(1-\bar{g}(z))\bar{h}(z,k-1)\frac{p(1-\theta)}{1-z} - q\sum_{j=0}^{k-1}\phi(0,k-1-j)\bar{h}(z,j)z^{k-1-j} \\
+ pq(1-\theta)\bar{f}(z)\bar{g}(z)\sum_{j=0}^{k-2}\phi(0,k-2-j)\bar{h}(z,j)z^{k-2-j}. \quad (12)
\end{aligned}
$$

La ecuación (3.9) presenta la información que brindan los dos procesos de reservas expresados bajo funciones generadoras de probabilidad, de las reclamaciones principales y sobre-reclamaciones y en terminos de la probabilidad de supervivencia. Guo & Yuen (2001) hace uso de esta relación para presentar fórmulas recursivas para el cálculo de la probabilidad de ruina, cuando se tienen reclamaciones relacionadas en el tiempo bajo el supuesto de el modelo binomial compuesto.

5. Conclusiones

Los supuestos de un modelo binomial compuesto permiten la manipulación de diferentes modelos en el área actuarial de manera menos dispendiosa o difícil, el caso donde se intentan modelar dos reclamaciones relacionadas en el tiempo no es atípico a este hecho. En este escrito se puede evidenciar que desde el trabajo sobre dicho supuesto y la introducción de las funciones generadoras de probabilidad de los montos de reclamaciones, tanto principales como de las sobre-reclamaciones, es posible encontrar una fórmula en términos de la probabilidad de supervivencia y la función generadora de probabilidad común que recopila los datos de ambos tipos de reclamación. Con la ecuación presentada se puede generar un estudio, bien sea sobre el comportamiento de la probabilidad de ruina o de supervivencia, o de las funciones generadoras de probabilidad y por lo tanto de sus momentos factoriales o sus valores puntuales de probabilidad.

Recibido: 2 de agosto de 2013
Aceptado: 19 de diciembre de 2013

Referencias

Alfredo, D. E. (2000), The compound binomial model revisited, Technical report, Universidad Técnica de Lisboa, Lisboa.

Castillo, E. J. (2013), Probabilidad de ruina en el modelo binomial compuesto para reclamaciones no convencionales, Technical report, Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Dickson, D. C. M. (1994), 'Some comments on the compound binomial model', *ASTIN Bulletin* **24**, 33–45.

Gerber, H. U. (1988), 'Mathematical fun with the compound poisson process', *ASTIN Bulletin* **18**, 161–168.

Guo, Y. & Yuen, C. (2001), 'Ruin Probabilities for Time-Correlated Claims in the Compound Binomial Model', *Insurance: Mathematics and Economics* **29**, 47–57.

Kaas, R., Goovaerts, M. & Denuit, M. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks*, Wiley and Sons, Chichester.

Rincón, L. (2012), *Introducción a la Teoría de Riesgo*, Ciudad universitaria UNAM, Mexico D.F.

Shiu, E. (1989), 'The probability of eventual ruin in a compound binomial model', *ASTIN Bulletin* **19**, 179–190.