UNIVERSIDAD SANTO TOMAS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

Comunicaciones en Estadística
Diciembre 2010, Vol. 3, No. 2

Inclusión de la igualdad en la hipótesis nula

Including Equal Sign in Null Hypothesis

Jorge Ortiz Pinilla[a]
jorgeortiz@usantotomas.edu.co

Hanwen Zhang[b]
hanwenzhang@usantotomas.edu.co

Resumen

Con alguna frecuencia, los investigadores se preguntan si la hipótesis nula puede excluir la igualdad de su enunciado para dejarla dentro de la alternativa, argumentando que las definiciones encontradas en la literatura permiten hacerlo y que por sus planteamientos teóricos o prácticos les resulta conveniente. El propósito de este artículo es mostrar que al incluir la igualdad en la hipótesis alterna, los procedimientos dejan de ser correctos desde el punto de vista de la inferencia estadística.

***Palabras clave*:** hipótesis nula, intervalos de confianza, pruebas de hipótesis estadísticas..

Abstract

A question the researchers get with some frequency is about the possibility of excluding the equal sign from the null hypothesis to include it into the alternative. They find this convenient from teoretical or practical viewpoints. Some definitions given in the litterature allow this and the aim of this paper is to illustrate some errors in the statistical procedures as a consequence of doing so.

***Key words*:** Confidence Intervals, Null Hypothesis, Statistical Hypothesis Tests.

1. Introducción

Cuando se presenta el tema de las pruebas de hipótesis, es usual encontrar que los términos clave se introducen de manera que permiten interpretaciones y usos equivocados de parte de los lectores. En libros de carácter teórico, es común proponer plantearlas en función de una partición del espacio paramétrico $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$,

[a]Docente investigador. Universidad Santo Tomás.
[b]Docente investigador. Universidad Santo Tomás.

donde Θ_0 corresponde a los valores admisibles según la hipótesis nula y Θ_1, los de la alternativa (Mood et al. 1974). Igual que antes, aunque los planteamientos a lo largo del texto son correctos, esta propuesta admite definir, por ejemplo, $\Theta_0 = (-\infty, \mu_0)$ y $\Theta_1 = [\mu_0, \infty)$, es decir, $H_0 : \mu < \mu_0$, $H_1 : \mu \geq \mu_0$, donde μ_0 es un valor conocido.

Mendenhall & Sincich (1997, p. 423) dan como ejemplo introductorio el caso de un investigador que quiere determinar si el nivel medio μ de un tipo de contaminante liberado a la atmósfera por una empresa química no sobrepasa el límite establecido por la Agencia para la Protección del Ambiente (EPA) de tres partes por millón. Afirman que la teoría que la EPA quiere apoyar, llamada hipótesis alternativa o de investigación, es que $\mu > 3$. Más adelante (p. 436) dan una explicación sobre la conveniencia de tomar la alternativa como la hipótesis respaldada por el investigador, pues si se trata de la nula y si los datos la apoyan, tendría que explorar los valores de la potencia para algunas alternativas, lo que resultaría extremadamente tedioso o imposible. Si bien el planteamiento es correcto, con este tipo de argumentación cabe la posibilidad de querer apoyar una hipótesis como $\mu \geq 3$, que sería la alternativa, definiendo entonces como nula $\mu < 3$.

Es común proponer plantear la hipótesis alternativa como aquella que el investigador quiere apoyar y la nula como resultante del planteamiento complementario. El hecho de que α se calcule bajo H_0 y que pueda ser fijada a conveniencia puede llevar a argumentaciones como la siguiente:

> Supongamos que las hipótesis estadísticas en juego sean $K_1 : \mu > \mu_0$ y $K_2 : \mu \leq \mu_0$ y que el error más grave consista en rechazar K_1 si es verdadera. Entonces diseñamos la prueba de manera que podamos controlar la probabilidad de cometer este error tomando K_1 como la hipótesis nula, es decir, $H_0 : \mu > \mu_0$ y asignamos un valor de α que nos permita limitar esta probabilidad como necesitamos.

En este artículo mostraremos que a pesar de que no hay ninguna inconveniencia teórica que impida poner la igualdad en H_1, sí puede presentar algunos resultados contradictorios en algunas situaciones específicas. Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 mostramos, mediante una prueba específica, que al no incluir la igualdad en H_0 tamaño de la prueba no se ve afectado; en la sección 3 mostramos que en algunos casos la exclusión de la igualdad de H_0 lleva a contradicciones entre la regla de decisión y las estimaciones puntuales; en la sección 4 mostramos que en algunos al poner la igualdad en H_1 puede dañar la dualidad que existe entre una prueba de hipótesis y un intervalo de confianza.

2. El tamaño de la prueba

Consideremos una muestra aleatoria de tamaño n, denotada por $X_1 \ldots, X_n$, proveniente de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ con μ desconocido y σ_0^2 conocido. Supongamos, además, que las hipótesis de interés se plantean como:

$$H_0: \ \mu > \mu_0 \quad vs \quad H_1: \ \mu \leq \mu_0, \tag{1}$$

donde la igualdad $\mu = \mu_0$ está incluida en el subespacio paramétrico especificado por la hipótesis alterna, H_1. En estas condiciones, es natural pensar en rechazar H_0 cuando $\bar{X} < K$ para alguna constante K. Para determinar el valor de K y completar la regla de decisión, recurrimos al tamaño de la prueba, definido como (Bickel & Doksum 1977, p. 170):

$$\alpha = \sup\{P(\text{rechazar } H_0)\} \qquad \text{cuando } H_0 \text{ es verdadera.} \tag{2}$$

Para el caso específico de las hipótesis dadas en (1), se tiene:

$$\alpha = \sup\left\{P(\bar{X} \leq K)\right\} \qquad \text{cuando } H_0 \text{ es verdadera.} \tag{3}$$

El valor de K se determina a partir de la distribución nula de $\bar{X}$, esto es, la distribución de $\bar{X}$ cuando H_0 es verdadera. Como $\mu > \mu_0$ es equivalente a $\mu = \mu^*$ con $\mu^* > \mu_0$, entonces

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu^*)}{\sigma_0} \sim \ N(0, 1). \tag{4}$$

Por lo tanto, la definición (3) se convierte en

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup\Big\{P\Big(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu^*)}{\sigma_0} \leq \frac{\sqrt{n}(K - \mu^*)}{\sigma_0}\Big) : \mu^* > \mu_0\Big\} \\ &= \sup\Big\{\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(K - \mu^*)}{\sigma_0}\Big) : \mu^* > \mu_0\Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución correspondiente a la distribución normal estándar. Como $\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(K - \mu^*)}{\sigma_0}\Big)$ es una función decreciente de μ^*, entonces el supremo del conjunto $\Big\{\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(K - \mu^*)}{\sigma_0}\Big) : \mu^* > \mu_0\Big\}$ se da cuando $\mu^* = \mu_0$. Entonces, en este caso, se tiene que $\alpha = \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(K - \mu_0)}{\sigma_0}\Big)$, y el valor de K se obtiene como

$$K = \mu_0 + \Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \mu_0 + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

y así, la regla de decisión establece rechazar H_0 si

$$\bar{X} \leq \mu_0 + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

lo que equivale a rechazar H_0 si $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \leq z_\alpha$ y el tamaño de la prueba es α. Nótese que:

- La regla de decisión encontrada coincide con la del sistema de hipótesis $H_0: \ \mu \geq \mu_0 \ \ vs. \ H_a: \ \mu < \mu_0$. Es decir, el hecho de que H_0 excluya la igualdad no afecta numéricamente la regla de decisión. Lo mismo ocurre con la prueba unilateral derecha.

- La razón por la que la exclusión de la igualdad en H_0 no influye en la regla de decisión se encuentra en que el tamaño de una prueba se define en función del supremo tal como en (3).

3. Contradicción con el estimador de máxima verosimilitud

En la sección anterior se propuso como conjunto de valores de la media en la hipótesis nula un intervalo abierto que excluye la igualdad del extremo inferior μ_0 del intervalo correspondiente a Θ_0.

El valor-p se define como el mínimo valor que debe tener el nivel de significación de la prueba para que H_0 se rechace con los datos de la muestra que se observe. Se calcula como el valor de probabilidad, calculada bajo H_0, del intervalo construido a partir del valor observado de la estadística de prueba, en la dirección que tomaría en condiciones de la hipótesis alternativa. Para el ejemplo presentado se tiene:

$$\text{Valor-p } = \Pr(Z \leq z_o) = \Phi(z_o) \quad \text{con} \quad z_o = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \tag{7}$$

y, con un nivel de significación α, se rechaza H_0 en favor de H_1 si se cumple que Valor-p $\leq \alpha$.

Si, como resultado de la observación de la muestra, se obtiene $\bar{x} = \mu_0$, entonces

$$\text{Valor-p} = \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}$$

Según la regla de decisión, no se encuentran evidencias para rechazar la hipótesis nula, planteada como $H_0 : \mu > \mu_0$. A la misma decisión se llega aplicando (6), pues la condición de rechazo, $\bar{x} \leq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$, no se cumple cuando $\bar{x} = \mu_0$, dado que $z_\alpha < 0$.

Esta situación es evidentemente contradictoria, pues se encuentra que la hipótesis nula no admite como valor para μ el obtenido con el estimador de máxima verosimilitud, $\bar{X}$.

El problema no se limita al caso de $\bar{x} = \mu_0$. Supongamos que $\mu < \mu_0$ y que, por las condiciones poblacionales, con alta probabilidad se encontrarán muestras con valores inferiores a μ_0 pero lo suficientemente cercanos como para que el promedio muestral fuera muy cercano de μ_0 y que, además, z_o fuera cercano de cero. Siendo así, el valor-p sería cercano de 0.5, llevando a concluir que H_0 no se puede rechazar. Es decir, si $\bar{x} < \mu_0$, pero de manera que $z_o \approx 0$, con un resultado de un promedio muestral menor que μ_0 se concluye que $\mu > \mu_0$. La contradicción es evidente. Para la prueba unilateral derecha se presenta un problema similar.

4. Intervalos de confianza y pruebas bilaterales

En esta sección veremos que la exclusión de la igualdad de la hipótesis nula genera también dificultades en las pruebas bilaterales y en los intervalos de confianza acotados por los dos extremos. Recordemos la dualidad que se tiene con estas dos herramientas inferenciales. Para las hipótesis:

$$H_0 : \ \mu = \mu_0 \quad vs. \ H_1 : \ \mu \neq \mu_0 \tag{8}$$

se sabe que la región de rechazo se encuentra en las colas de la distribución de la estadística $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0}$ y que la regla de decisión de tamaño α consiste en rechazar H_0 cuando

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0} > z_{1-\alpha/2} \quad \text{o} \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < -z_{1-\alpha/2}$$

Por otro lado, el intervalo de confianza de menor longitud para μ, con coeficiente $100 \times (1 - \alpha)\,\%$, es

$$\big(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\big) \tag{9}$$

y una forma de utilizarlo para tomar una decisión acerca de $\mu = \mu_0$ es rechazar esta igualdad cuando μ_0 no se encuentra en el intervalo calculado. Es decir, rechazar H_0 si $\mu_0 < \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ o si $\mu_0 > \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. Mediante operaciones algebraicas simples, se puede ver que esto equivale a aplicar la regla de decisión estándar de la teoría de prueba de hipótesis presentada anteriormente. Por lo tanto, la decisión que se toma acerca de $\mu = \mu_0$ es la misma usando la teoría de prueba de hipótesis o los intervalos de confianza. Puede verse también que el intervalo de confianza es el conjunto de valores de μ_0 que conducirían a no rechazar H_0 si las pruebas se realizaran con los datos de la muestra que se observe. Esto se conoce como la relación de dualidad mencionada al comienzo de la sección.

Supongamos ahora que dejamos la igualdad en la hipótesis alterna y que planteamos las hipótesis de la siguiente manera:

$$H_0 : \ \mu \neq \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \ \mu = \mu_0 \tag{10}$$

Dado este sistema, la región de rechazo ya no se encuentra en las colas de la distribución de la estadística de prueba, sino en el centro. Por lo tanto, se rechaza H_0 si $-K < \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < K$, donde K es una constante tal que la probabilidad de rechazar equivocadamente H_0 sea α, es decir, $K = z_{(1+\alpha)/2}$. Esto equivale a rechazar la hipótesis nula si $\bar{X} - z_{(1+\alpha)/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{(1+\alpha)/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$.

Este intervalo es más corto que (9), obtenido por los métodos de estimación. Como consecuencia, los valores no comunes son resultado de la estimación por intervalo, que al no pertenecer a la región de rechazo de $H_0 : \mu \neq \mu_0$, estarían apoyando la condición de diferencia, es decir, estarían rechazando los valores que resultan de los procedimientos de estimación. Con ello, la dualidad entre la prueba de hipótesis y el intervalo de confianza deja de cumplirse.

5. Conclusiones

En este escrito se vio que la exclusión de la igualdad de la hipótesis nula puede traer como consecuencia el uso de procedimientos inferenciales estadísticos inadecuados: las pruebas arrojan resultados incoherentes y pierden su relación de dualidad con los intervalos de confianza. Por consiguiente, se recomienda que los investigadores hagan sus planteamientos teóricos de manera que la hipótesis nula que se derive de ellos admita la igualdad.

Recibido: 30 de octubre de 2010
Aceptado: 25 de noviembre de 2010

Referencias

Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (1977), *Mathematical Statistics*, Holden Day.

Mendenhall, W. & Sincich, T. (1997), *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, cuarta edn, Prentice Hall, México.

Mood, A. M., Graybill, F. A. & Boes, D. C. (1974), *Introduction to the theory of statistics*, third edn, McGraw-Hill, New York.