



TLATEMOANI
Revista Académica de Investigación
Editada por Eumed.net
No. 17 – Diciembre 2014
España
ISSN: 19899300
revista.tlatemoani@uaslp.mx

Fecha de recepción: 06 de noviembre de 2014
Fecha de aceptación: 17 de diciembre de 2014

FILTROS NO LINEALES

Pablo Salas Castro
iepablosalas@hotmail.com
Isaac Campos Cantón
icampos@fciencias.uaslp.mx
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Resumen

El uso de filtros es de suma importancia debido a que se utilizan en los sistemas de radio, para eliminar interferencia, ruido no deseado, limitar el ancho de banda, sintonización de señales, ecualizadores, procesamiento digital de señales, mejorar la calidad de energía en un sistema, acondicionamiento y transmisión de señales analógicas, entre otras muchas aplicaciones. Por ello es importante entender correctamente el funcionamiento y características de los filtros, cuestión que se tratará en este trabajo. Primero analizaremos los filtros lineales clásicos caracterizados por su respuesta en amplitud (filtros FIR, IIR) y posteriormente los filtros lineales caracterizados por su respuesta en frecuencia (pasabajas, pasaaltas, pasabandas, rechazabanadas) junto con sus funciones de

transferencias, factor de calidad y criterio de diseño, para posteriormente introducir las posibilidades de usar filtros no lineales basados en circuitos osciladores no lineales como pueden ser el de Chua, Lorenz y Chen.

Palabras clave: Filtro Lineal, Filtro No Lineal, Osciladores, Factor de Calidad, Función de Transferencia.

Abstract

The use of filters is important because it is used in radio, to eliminate interference and unwanted noise, limit the bandwidth, tuning signals, equalizers, digital processing signals, improving the quality of energy in a system, conditioning and analog signal transmission, among many other applications. Therefore it is important understand properly the filter operation and its characteristics, which will be described in this paper. First we analyze the classical linear filters where are characterized by their amplitude response (FIR and IIR filters) and as secondly by its frequency response (lowpass, highpass, bandpass, reject bands) together with their transfer functions, quality factor and design criteria, and then inserting the possibilities of using nonlinear filters based in nonlinear circuit oscillators such as Chua, Lorenz and Chen systems.

Keywords: Linear Filters, Nonlinear Filters, Oscillators, Quality Factor, Transfer Function.

1. INTRODUCCIÓN

Puede definirse un filtro como cualquier dispositivo que modifica de un modo determinado una señal que pasa a través de él. Hay diversas clasificaciones de los filtros (Miyara, 2004). Cuando la señal es una magnitud eléctrica se dice que es un filtro eléctrico y son los que trataremos en este artículo.

Otra Clasificación son los filtros Lineales y los No Lineales. Los Filtros no lineales tienen muchas aplicaciones, especialmente para remover ruidos que son no aditivos. Por ejemplo, el filtro medio se utiliza para eliminar los picos de ruido, que afecta sólo a un pequeño porcentaje de las muestras, posiblemente por cantidades muy grandes. De hecho todos los receptores de radio utilizan filtros no lineales para convertir señales de kilohertzios a gigahertzios en la gama de frecuencias de audio; y todo el procesamiento digital de señales normalmente hace uso de filtros no lineales para transformar las señales analógicas a binarias.

Sin embargo, los filtros no lineales son más difícil de usar y de diseñar que los lineales, debido a que las herramientas matemáticas más potentes de análisis de señales (por ejemplo, la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia) no se pueden utilizar en ellos. Así, los filtros lineales se utilizan a menudo para eliminar el ruido y la distorsión creada por los procesos no lineales, simplemente porque el filtro no lineal adecuado sería demasiado difícil de diseñar y construir. Por esta razón resulta necesario entender con profundidad el comportamiento de los filtros lineales, sus funciones, aplicaciones y características, y así partir de estas bases para el diseño de los filtros no lineales. En particular, si el ruido no se superpone a la entrada en el dominio de la frecuencia, este pueden ser separado completamente por los filtros de paso banda lineales. Por otro lado, para casi cualquier otra forma de ruido, se necesitará algún tipo de filtro no lineal para tener recuperación máxima de la señal.

En la Sección 2 veremos las características que definen a un filtro lineal, su respuesta en amplitud, su respuesta en frecuencia, la función de transferencia de las distintas configuraciones, y por último analizaremos aspectos importantes como son el factor de calidad y los criterios de diseño.

En la Sección 3 veremos los filtros no lineales el primero es basados en el Sistema de Chua, que es un sistema caótico del cual es posible obtener un comportamiento de tipo filtro y el segundo se obtiene a partir del Sistema de Lorenz, que es más complejo que el Sistema de Chua.

2. Filtros Lineales

Se dice que un filtro es lineal si se puede aplicar el principio de superposición. Es decir, supongamos que tenemos las entradas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que al pasar por el filtro por separado se convierten en $g_1(t)$ y $g_2(t)$ respectivamente. El filtro es lineal si se cumple que $f = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ se convierte en $g = a_1g_1(t) + a_2g_2(t)$ después de pasar por el filtro.

Sea $g(t)$ la salida producida por la excitación $f(t)$. Se dice que el filtro es invariante en el tiempo si se cumple que para la entrada $f(t - t_0)$ la salida es $g(t - t_0)$.

Podemos clasificar a los Filtros Lineales en base a su función de transferencia por su Respuesta en Amplitud y Frecuencia.

2.1 Respuesta en Amplitud

Los Filtros Lineales en base a su respuesta en amplitud pueden dividirse en dos clases: filtros de respuesta infinita (IIR, por sus siglas en inglés (infinite impulse response)) y filtros de respuesta finita (FIR, por sus siglas en inglés (finite impulse response)) (Campos, 2014).

- **Filtros FIR.** Sólo pueden ser implementados en tiempo discreto. Pueden ser descritos como una suma ponderada de entradas con un determinado retardo. Si la entrada en un determinado instante es cero, la salida será cero a partir de un instante posterior a los retardos incluidos por el filtro. De

este modo, solo existirá respuesta por un tiempo finito. Los filtros FIR tienen la gran ventaja de que pueden diseñarse para ser de fase lineal, lo cual hace que presenten ciertas propiedades en la simetría de los coeficientes de su ecuación característica. Con este tipo de filtros se tiene especial interés en aplicaciones de audio. Además son siempre estables. La respuesta impulsiva $h(n); n = 1, 2, \dots$ caracteriza completamente al filtro, a tal punto que las señales de entrada y salida están relacionadas por la suma de la convolución que para el filtro FIR toma la forma (Ifeachor, 1993):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1)$$

Esta suma convolución no es muy útil operativamente en la búsqueda de su solución debido a que la respuesta al impulso contiene muchos términos (en teoría, infinitos términos). Por ello, se implementa este filtro con ecuaciones a diferencias que permite calcular las muestras de salida en forma recursiva.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (2)$$

- **Filtros IIR.** Estos filtros presentan una salida aún cuando la entrada sea cero, si las condiciones iniciales son distintas de cero. La energía del filtro decaerá con el tiempo, pero no llegará a ser nula. Por lo tanto, la respuesta al impulso se extiende infinitamente. Su ecuación característica al impulso $h(n); n = 1, 2, \dots$ es (Ifeachor, 1993):

$$y(n) = - \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3)$$

El número N es el orden del filtro, y fija la cantidad de modos de respuesta impulsiva, la relación de los coeficientes a_i y b_i se obtiene aplicando la transformada Z a la Ecuación (3) y realizando las operaciones correspondientes.

2.2 Respuesta en Frecuencia

Hay varios tipos de filtros en base a su respuesta en frecuencia, se pueden caracterizar por su función de transferencia $h(\omega)$.

$$y(\omega) = h(\omega)x(\omega) \quad (4)$$

Siendo $y(\omega)$ la salida del sistema y $x(\omega)$ la señal de entrada, estos filtros son:

- **Filtro Pasabajos.** Permite el paso de frecuencias debajo de una frecuencia de corte (Hayt, 2007), mientras que amortigua de manera significativa las frecuencias por arriba de dicho corte, tiene una función característica ideal que se ilustra con la curva que se muestra en la Figura 1.

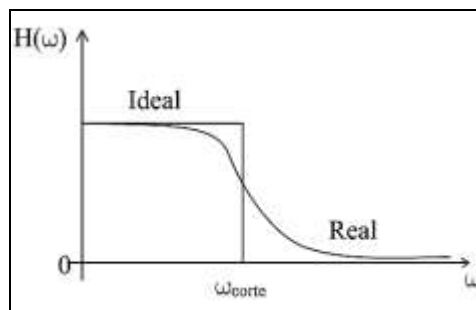


Figura 1. Curva de respuesta en frecuencia de un filtro Pasabajas.

- **Filtro Pasaaltas.** Contrario a un filtro Pasabajas, permite el paso de frecuencias por arriba de una frecuencia de corte mientras que amortigua de manera significativa las frecuencias por debajo de dicho corte (Hayt, 2007). Tiene una función característica ideal que se muestra por la curva en la Figura 2.

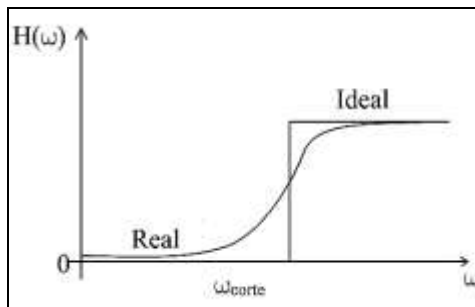


Figura 2. Curva de respuesta en frecuencia de un filtro Pasaaltas.

- **Filtro Pasabandas.** Es la combinación de un filtro pasabajas y un filtro pasaaltas, la región entre las dos frecuencias de corte se conoce como pasabandas (Hayt, 2007). Tiene una función característica ideal que se muestra por la curva en la Figura 3.

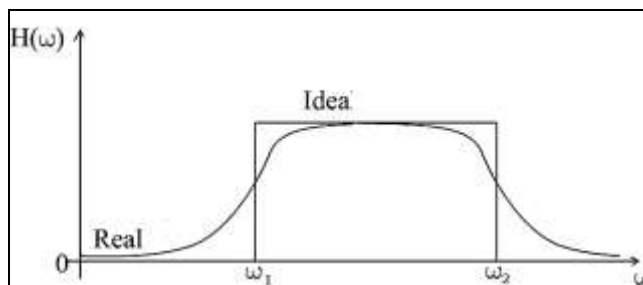


Figura 3. Curva de respuesta en frecuencia de un filtro Pasabandas.

- **Filtro Rechazabandas.** Al combinar un filtro pasabajas y un filtro pasaaltas, a la región fuera de la banda de paso se conoce como rechazabanda, que deja pasar frecuencias tanto altas como bajas, pero atenúa cualquier señal que tenga una frecuencia entre las dos frecuencias de corte (Ifeachor, 1993). Tiene una función característica ideal que se muestra por la curva en la Figura 4.

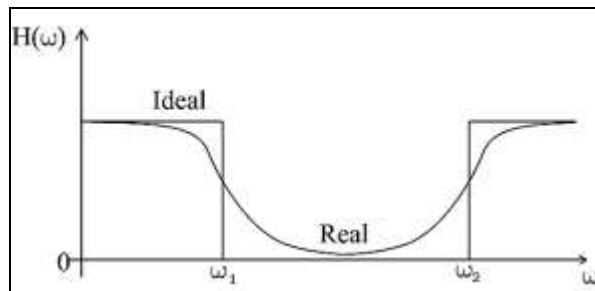


Figura 4. Curva de respuesta en frecuencia de un filtro Rechazabandas.

- **Filtro Pasa Todo.** Permite el paso de todas las frecuencias, pudiendo cambiar su fase.

Estos a su vez pueden dividirse en Filtros Pasivos que son aquellos que utilizan componentes de tipo pasivo (Capacitores, Resistencias, Inductores) y los Filtros Activos que utilizan componentes como Capacitores, Resistencias y Amplificadores Operacionales.

2.2.1 Filtro Pasivo Pasabajas

Se puede construir un filtro de este tipo mediante el empleo de un sólo capacitor y una sola resistencia, como se muestra en la Figura 5.

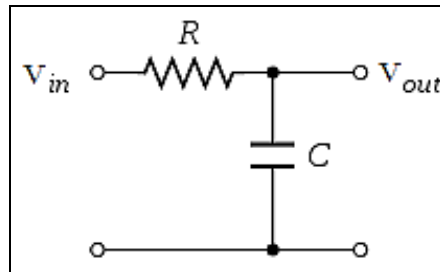


Figura 5. Circuito eléctrico de un filtro pasivo pasabajas.

La función de transferencia de este circuito de filtro pasabajas es

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + RCs} \quad (5)$$

$H(s)$ tiene una sola frecuencia de corte, la cual ocurre en $\omega_0 = 1/RC$ y un cero en $s = \infty$, lo cual propicia su comportamiento de filtrado "pasabajas". Este comportamiento se entiende en forma cualitativa al considerar la impedancia del capacitor: a medida que aumenta la frecuencia, el capacitor empieza a actuar como un cortocircuito para la señal de CA, lo que da lugar a una reducción de la tensión de salida.

2.2.2 Filtro Pasivo Pasaaltas

Se obtiene invirtiendo la posición del capacitor y la resistencia, como se muestra en la Figura 6.

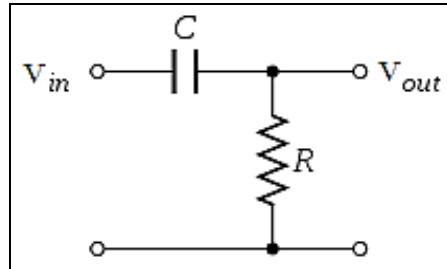


Figura 6. Circuito eléctrico de un filtro pasivo pasaaltas.

La función de transferencia de este circuito de filtro pasivo pasaaltas es

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{RCs}{1 + RCs} \quad (6)$$

que tiene un cero en $s = 0$ y un polo en $s = -1/RC$ lo que conduce a un comportamiento de filtro "pasaaltas".

2.2.3 Filtro Pasivo Pasabandas

Existen varios circuitos que clasifican como filtros "pasabandas". Considere el circuito simple de la figura 7, en el que la salida se toma a través de la resistencia.

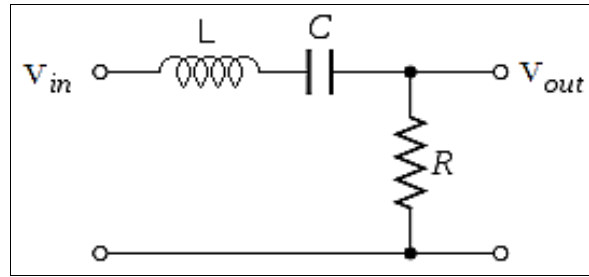


Figura 7. Circuito eléctrico de un filtro pasivo pasabandas.

Se encuentra con facilidad la función de transferencia de este circuito la cual es,

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (7)$$

2.2.4 Filtros Activos

El uso de un elemento activo, como el amplificador operacional, en el diseño de filtros, supera en mucho las desventajas de los filtros pasivos (Escudero, 2006). Así mismo, estos circuitos pueden presentar un comportamiento similar al de los inductores mediante la ubicación estratégica de capacitores. Una forma de independizar un filtro de la etapa que le sigue es añadir un amplificador operacional en configuración no inversora o en seguidor de tensión, como se muestra en la Figura 8.

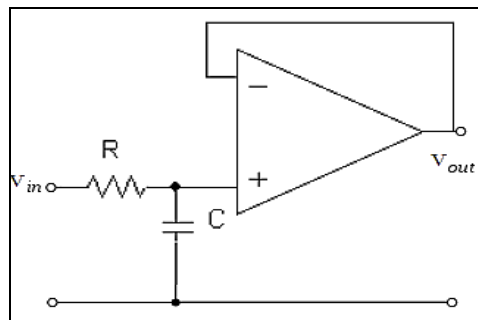


Figura 8. Diagrama eléctrico de un filtro activo pasabajas.

Si se quiere tener una ganancia mayor que la unidad el diagrama de la Figura 8 se complementa como se muestra en la Figura 9.

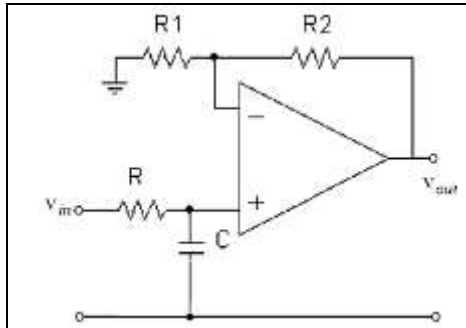


Figura 9. Diagrama eléctrico de un filtro activo pasabajas con ganancia.

La función de transferencia de este circuito (Figura 9) es,

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + RCs} \quad (8)$$

Al convertir el filtro en un filtro activo se consiguen dos objetivos:

- Se aísla el filtro de la carga.
- Se puede amplificar la señal si se desea.

De esta misma forma basta agregar un amplificador operacional a un filtro pasaaltas o pasabandas pasivo para obtener un filtro activo con las mismas características pero con las ventajas ya citadas.

2.2.5 Orden de un Filtro

El orden de un filtro describe el grado de aceptación o rechazo de frecuencias por arriba o por debajo, de la respectiva frecuencia de corte. Un ejemplo es un Filtro de orden 2, que se caracteriza porque en el denominador hay un polinomio de orden 2, siendo la función de transferencia de la forma,

$$H(s) = \frac{P(s)}{1 + a_1s + a_2s^2} \quad (9)$$

donde $P(s)$ depende del tipo de respuesta del filtro.

Para realizar filtros analógicos de órdenes más altos se suele realizar una conexión en serie de filtros de primer o segundo orden debido a que a mayor orden el filtro se hace más complejo. Sin embargo, en el caso de filtros digitales es habitual obtener órdenes superiores a 100.

2.3 Factor de Calidad Q

El factor de calidad Q , es un parámetro que mide la relación entre la energía reactiva que almacena y la energía que disipa durante un ciclo completo de la señal. Un alto factor Q indica una tasa baja de pérdida de energía en relación a la energía almacenada por el resonador.

Es un parámetro importante para los osciladores, filtros y otros circuitos sintonizados, pues proporciona una medida de lo aguda que es su resonancia. El factor de calidad Q de circuitos pasivos es bajo, inferior a 100. El uso de circuitos activos mejora el factor de calidad, este se define como (Hayt, 2007),

$$Q = \text{Factor de Calidad} = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía total perdida por ciclo}} \quad (10)$$

En filtros sirve para ver lo selectivos que son, es decir, para ver el ancho de banda. En principio, un filtro con menor ancho de banda (mayor Q), será mejor que otro con más ancho de banda. Es más difícil hacer filtros de calidad (porque requieren una Q mayor) a alta frecuencia que a baja frecuencia.

Para encontrar el factor de calidad asociado al ancho de banda de un filtro se utiliza la fórmula:

$$Q = \text{Factor de Calidad} = \frac{f_0}{AB} \quad (11)$$

Donde: f_0 = frecuencia de resonancia y AB = ancho de banda ($f_2 - f_1$).

Vemos, por tanto, que en el momento de diseñar un filtro hay que tener varias cosas en cuenta. La primera es la frecuencia de corte que se desea. La segunda es el valor que debe tener Q . Desde el punto de vista matemático puede tener cualquier valor pero no desde el punto de vista de la estabilidad del circuito. Se han desarrollado diferentes técnicas que permiten conocer de forma predeterminada de que forma puede ser el filtro. En concreto, existen tres criterios ya muy estudiados que son los que dan mejores prestaciones. Estos son los de *Chebyshev*, *Bessel* y *Butterworth*.

2.4 Filtro Butterworth

El filtro de Butterworth es uno de los filtros electrónicos básico, diseñado para producir la respuesta más plana que sea posible hasta la frecuencia de corte. En

otras palabras, la salida se mantiene constante casi hasta la frecuencia de corte, luego disminuye a razón de $20n \text{ dB}$ por década, donde n es el número de polos del filtro. Los filtros Butterworth son fáciles de construir porque los valores resultantes de los componentes son más prácticos que la mayoría de los otros tipos, y en estos filtros las variaciones de los componentes son menos críticas. El filtro de Butterworth es el único filtro que mantiene su forma para órdenes mayores (sólo con una caída de más pendiente a partir de la frecuencia de corte) y necesita un mayor orden para los mismos requerimientos en comparación con otros, como los de Chebyshev o el elíptico.

La aproximación de Butterworth se obtiene al imponer como condición que la respuesta en magnitud del filtro sea máximamente plana en la banda pasante y en la no pasante, por lo que debe cumplir que las $(2N-1)$ primeras derivadas de $|H(\omega)|$ sean cero para $\omega = 0$ y $\omega \rightarrow \infty$ (Escudero, 2006). Únicamente posee polos y la función de transferencia es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad (12)$$

Donde N es el orden del Filtro y ω_c es la frecuencia de corte, la Figura 10 muestra un ejemplo del diagrama de Bode de un Filtro Butterworth.

FILTROS NO LINEALES

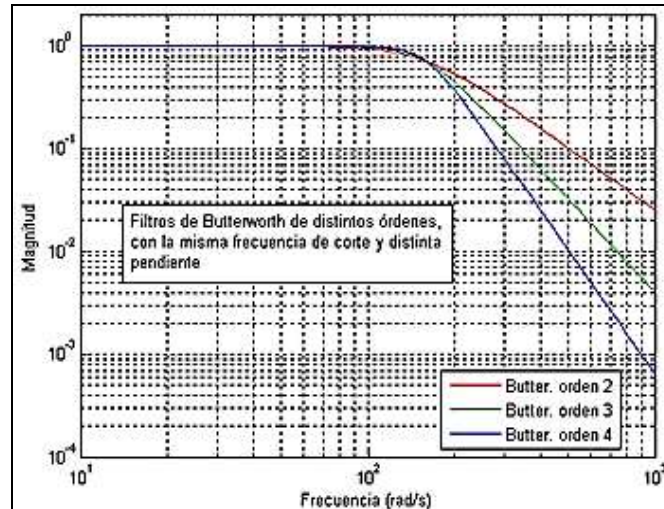


Figura 10. Diagrama de Bode de filtros Butterworth pasabajas.

2.5 Filtro Chebyshev

Con los filtros de Chebyshev se consigue una caída de la respuesta en frecuencia más pronunciada, en frecuencias bajas debido a que permiten rizado en alguna de sus bandas (paso o rechazo). A diferencia del Filtro de Butterworth donde los polos se distribuyen sobre una circunferencia, los polos del filtro Chebyshev lo hacen sobre una elipse; sus ceros se encuentran en el eje imaginario del plano complejo.

Son una mejor aproximación a un filtro ideal. La respuesta en la región de corte es más rectangular, y el índice de descenso a la banda de supresión, más abrupto. Esas características se obtienen a expensas de permitir variaciones en la respuesta de la banda de paso, lo que se denomina rizo de la banda de paso.

Los filtros Chebyshev son más críticos en lo que se refiere a su construcción que los de la familia Butterworth, y más sensibles a las tolerancias de los componentes. Cuanto mayor sea el rizo, tanto más abrupto será el filtro para un

orden dado n , pero tanto más crítico se hará el circuito. Su función característica puede expresarse como:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2 + \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (13)$$

Normalmente se toma $\epsilon < 1$, y donde n es el orden del filtro, ω_c es la frecuencia de corte y C_n es el polinomio de Chebyshev de orden n que tiene la siguiente forma:

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(ncos^{-1}(x)) & \text{si } x < 1 \\ \cosh(ncosh^{-1}(x)) & \text{si } x > 1 \\ C_n(1) = 1 & \forall n \end{cases} \quad (14)$$

La aproximación de Chebyshev genera un rizado en la banda pasante. La amplitud de dicho rizado varía entre 1 y $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ donde ϵ es el factor de rizado, parámetro controlado por el diseñador.

La Figura 11 muestra una comparación entre un filtro Butterworth y uno Chebyshev.

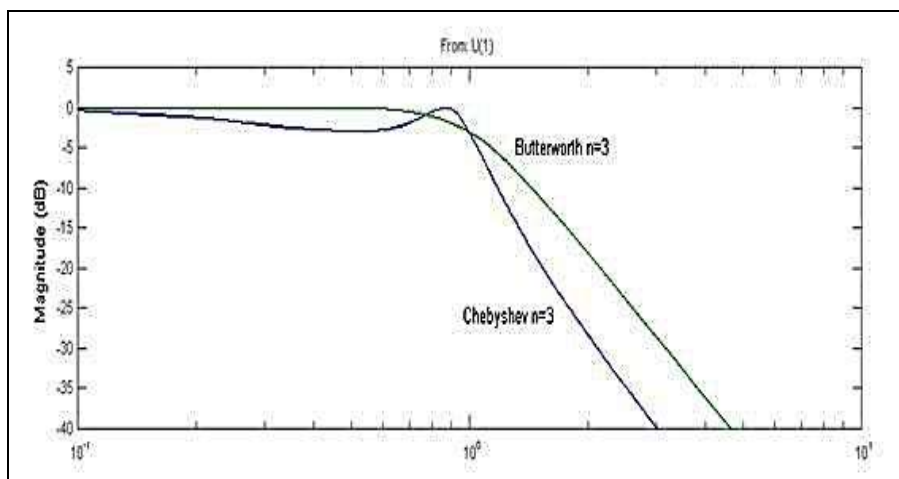


Figura 11. Diagrama de Bode de un filtro Butterworth y un Chebyshev pasabajas.

2.6 Filtro Bessel

Son filtros que únicamente tienen polos. Están diseñados para tener una fase lineal en las bandas pasantes, por lo que no distorsionan las señales; por el contrario tienen una mayor zona de transición entre las bandas pasantes y no pasantes.

Cuando estos filtros se transforman a digital pierden su propiedad de fase lineal. Su respuesta en frecuencia es:

$$H(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \quad (15)$$

Donde n es el orden del filtro y el denominador es un polinomio de Bessel, cuyos coeficientes son:

$$a_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-k} k! (n - k)!} \quad (16)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. La Figura 12 muestra una comparación entre un filtro Butterworth, Chebyshev y Bessel.

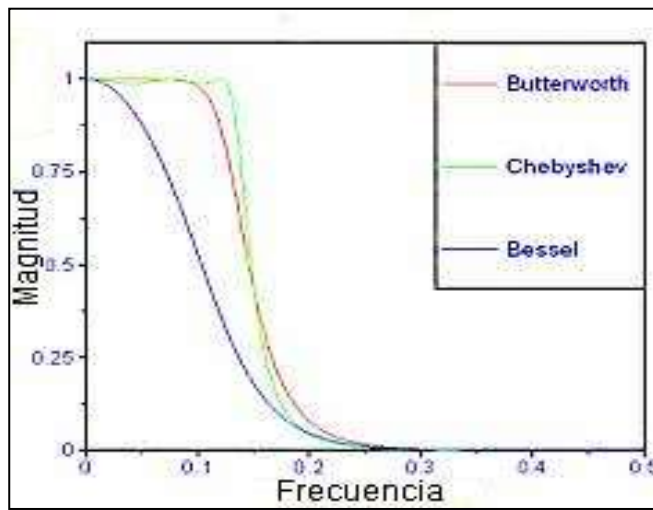


Figura 12. Diagrama de Bode de un filtro Butterworth, Chebyshev y Bessel pasabajas.

3. Filtros No Lineales

En nuestros días, un tópico de gran importancia es dar respuestas alternativas al diseño de filtros, así una de las apuestas es desarrollar filtros basados en sistemas no lineales, donde los circuitos caóticos son candidatos para efectuar este tipo de tareas. Entonces esperamos que los elementos caóticos puedan generar diferentes filtros y además tengan la habilidad de multifiltrado. En contraste a los circuitos basados en sistemas lineales, donde su configuración se realiza seleccionando un ancho de banda específico.

Es posible obtener un comportamiento de tipo filtro a través del uso de sistemas no lineales interconectados y considerando algunos criterios para tal comportamiento. La configuración de sistemas no lineales interconectados se basa sobre la estructura de filtros lineales pasabajas, por ejemplo la primera ecuación del sistema de Lorenz la cual detallaremos más adelante.

Los circuitos caóticos electrónicos más utilizados son el de Lorenz, Chen, Lu, Rossler y Chua, por lo que a continuación profundizaremos sobre estos circuitos.

3.1 Sistema de Lorenz

Edward Lorenz fue el primero en evidenciar el sistema del caos determinístico, es decir, aquel que es desordenado e impredecible pero a su vez también es acotado y finito, el sistema que utilizó consta de 3 ecuaciones diferenciales parciales desarrolladas para modelar la convección térmica en la capa

atmosférica inferior. Las ecuaciones de éste se pueden implementar con circuitos electrónicos sencillos y a través de sus parámetros se puede obtener una descripción muy completa de su dinámica (Nuñez, 2011).

Este sistema nos ofrece una galería de dos lóbulos, donde ajustando ciertos parámetros el circuito puede observarse al graficar dos de sus voltajes, uno contra el otro, que esta señal es semejante a diversas formas de la naturaleza; un ejemplo claro es la similitud con una mariposa, al ir variando las ganancias del circuito podemos observar cómo crecen o disminuyen las alas (Lepez, 2012).

Sus ecuaciones diferenciales características son (Lepez, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= cx - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (17)$$

Dibujando el espacio fase obtenemos la Figura 13, este tipo de conjuntos se les llama atractor extraño.

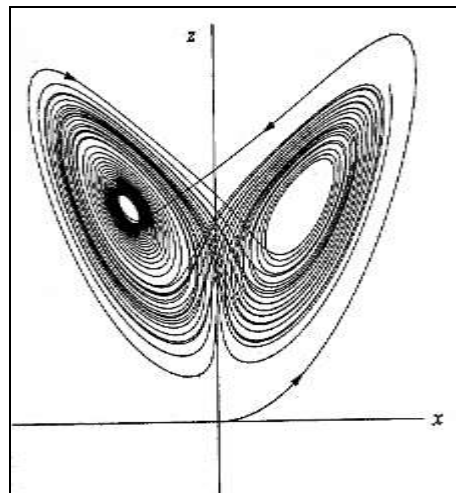


Figura 13. Atractor extraño formado por los estados x y z del sistema de Lorenz.

3.2 Sistema de Chen

Estos sistemas tienen una estructura simple, pero muestran comportamientos dinámicos distintos a los del sistemas de Lorenz. Puede utilizarse para estudiar fenómenos naturales como la generación de remolinos de agua, o también como inspiración de diseños de funcionales en todo tipo de ambiente (Lepez, 2012).

Sus ecuaciones diferenciales características son (Lepez, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz - cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{18}$$

Dibujando el espacio fase obtenemos la Figura 14.

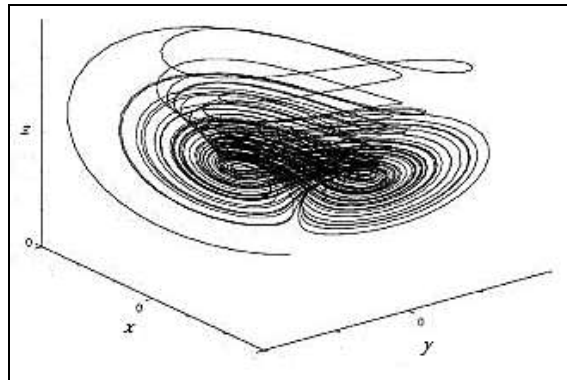


Figura 14. Atractor de Chen.

3.3 Sistema de Lü

Está formado por una cubierta doble en forma de herradura. El sistema de Lü pertenece a la familia Lorenz, ya que al cambiar los valores de los parámetros, el comportamiento de sus señales sigue el de todos los miembros de esta familia (Lepez, 2012).

Sus ecuaciones diferenciales características son (Lepez, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (19)$$

Dibujando el espacio fase obtenemos la Figura 15.

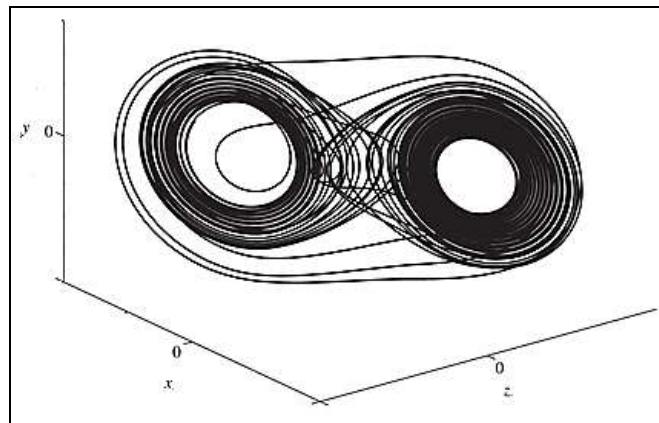


Figura 15. Atractor de Lü.

3.4 Sistema de Rossler

Fue inspirado por la geometría que representa los flujos en tres dimensiones y, en particular, por el principio de reinyección, que se basa en la característica de los sistemas de tipo de relajación para presentar a menudo una variedad lenta en

forma de Z en su espacio fase. Este atractor tiene alguna similitudes con el atractor de Lorenz, que consta de un sólo lóbulo (Lepez, 2012).

Sus ecuaciones diferenciales características son (Lepez, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (20)$$

Dibujando el espacio fase obtenemos la Figura 16.

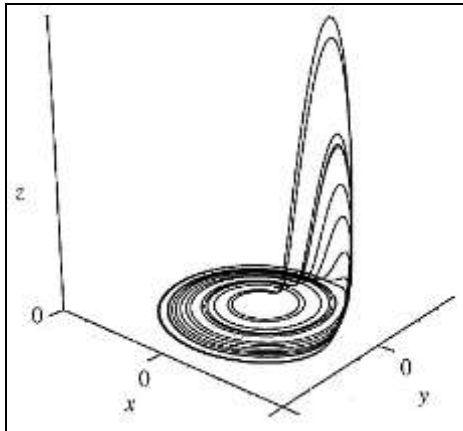


Figura 16. Atractor de Rossler.

3.5 Sistema de Chua

En la década de 1980 Leon O. Chua propuso un sistema oscilador caótico. El sistema de Chua representa el comportamiento de un circuito eléctrico formado por un inductor, dos condensadores unidos por una resistencia variable y el diodo de Chua. Este circuito eléctrico es capaz de generar atractores caóticos de uno o dos enroscados (Campos, 2012).

El circuito de Chua es el sistema dinámico autónomo más simple que puede ser utilizado para estudiar la dinámica no lineal en circuitos eléctricos. Este circuito tiene la ventaja, desde el punto de vista didáctico, de que manifiesta una amplia variedad de las características comunes a otros sistemas no lineales, tales como bifurcaciones, caos y sincronización.

El circuito de Chua se muestra en la Figura 17 (Campos. 2012).

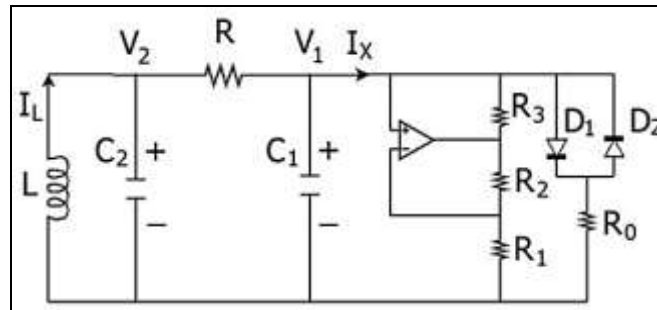


Figura 17. Circuito de Chua.

Sus ecuaciones diferenciales características son (Campos, 2014):

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dV_1}{dt} &= \frac{V_2 - V_1}{R} - I_x(V_1) \\
 C_2 \frac{dV_2}{dt} &= \frac{V_1 - V_2}{R} + I_L \\
 L \frac{di_L}{dt} &= -V_2
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Con

$$I_x(V_1) = m_1 - \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|V_1 + V_D| - |V_1 - V_D|]
 \tag{22}$$

donde V_D es el voltaje correspondiente al puntos de ruptura del diodo, y $m_0 = -R_2/(R_1R_3)$ y $m_1 = [-R_2/(R_1R_3)] + [1/R_0]$.

Dibujando el espacio fase obtenemos la Figura 18.

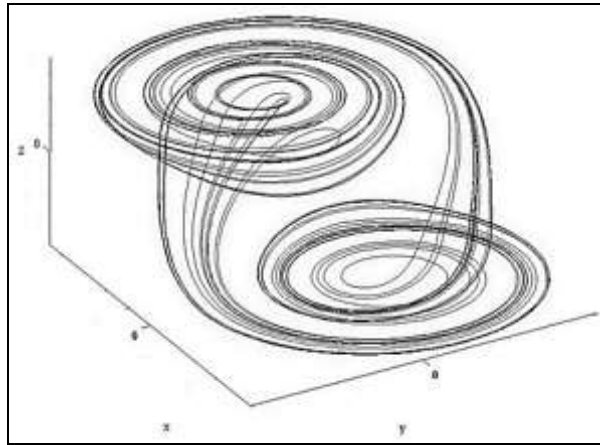


Figura 18. Atractor de Chua.

3.6 Filtro en Base al Sistema de Chua

Al analizar la red RCL del Circuito de Chua es posible obtener su resonancia, que es la tendencia de un sistema a oscilar con una mayor amplitud a una frecuencia específica. Analíticamente la frecuencia de resonancia será aquella en cuyo caso la reactancia del sistema sea cero, es decir, la impedancia tenga un comportamiento puramente resistivo (Campos, 2014).

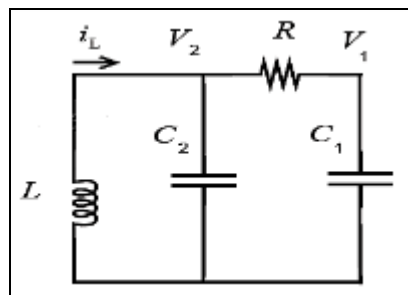


Figura 19. Circuito RLC de Chua.

La red RCL se muestra en la Figura 19, su impedancia está dada por:

$$Z_T = \frac{RLC_2s^2 + Ls + R}{RLC_1C_2s^3 + L(C_1 + C_2)s^2 + RC_1s + 1} \quad (23)$$

Y su reactancia está dada por:

$$X(\omega) = \frac{R(1 - \omega^2LC_2)(\omega^3RLC_1C_2 - \omega RC_1C_1) + \omega L(1 - \omega^2L(C_1 + C_2))}{(1 - \omega^2L(C_1 + C_2))^2 + (\omega^3RLC_1C_2 - \omega RC_1)^2} \quad (24)$$

Ahora tomando el circuito como un sistema de dos puertos, donde V_1 y V_2 son su entrada y salida respectivamente, y tomando en consideración los tres casos descritos por la Ecuación 22 podemos obtener 3 funciones de transferencia (Campos, 2014):

- Caso 1. $V_1 < V_D$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(R_0R_2 + R_1R_3)Ls}{R\alpha LC_1s^3 + \alpha L(C_1 + C_2)s^2 + (R_1R_3LV_D - \alpha RC_1)s - \alpha} \quad (25)$$

- Caso 2. $|V_1| < V_D$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2Ls}{RR_1R_3C_1C_2s^3 + R_1R_3L(C_1 + C_2)s^2 - RR_1R_3C_1s - R_1R_3} \quad (26)$$

- Caso 1. $V_1 > V_D$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(R_0R_2 + R_1R_3)Ls}{R\alpha LC_1s^3 + \alpha L(C_1 + C_2)s^2 - (R_1R_3LV_D + \alpha RC_1)s - \alpha} \quad (27)$$

Donde $\alpha = R_0R_1R_3$.

De las ecuaciones anteriores es posible observar la similitud de estas con la función de transferencia de un Filtro Pasabandas de tercer orden, lo cual se puede verificar con el siguiente diagrama de Bode mostrado en la Figura 20 obtenido del Circuito de Chua tomando las consideraciones antes descritas (Campos, 2014).

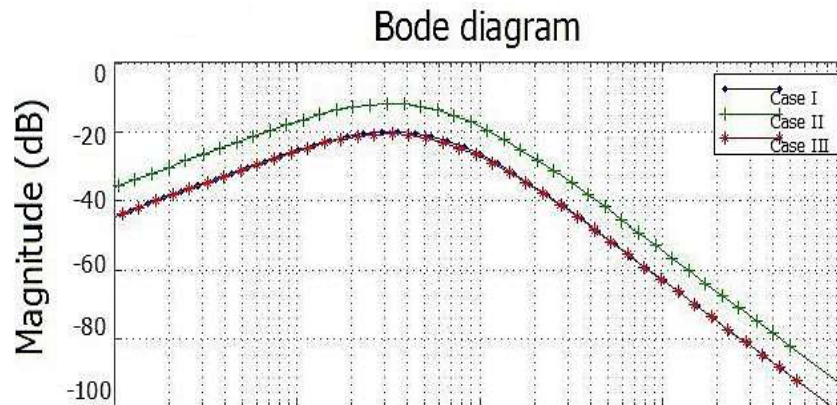


Figura 20: Diagrama de Bode del Circuito de Chua caracterizado como un filtro.

3.7 Filtro en Base al Sistema de Lorenz

La configuración de los sistemas no lineales interconectados se basan sobre la estructura de filtros lineales pasabajas, por ejemplo, tomando la primera ecuación de Lorenz (Ecuación 17) y comparandola contra la ecuación diferencial de un filtro pasabajas de primer orden Ecuación (28) (obtenida al aplicar la transformada inversa de Laplace a la Ecuación (5) de la Sección 2.2.1.).

$$v_{out}' = \frac{1}{RC} (v_{in} - v_{out}) \quad (28)$$

Con esto podemos observar que el estado x corresponde a v_{out} y el estado y corresponde a v_{in} en la Ecuación (17) con lo que concluimos que la primera ecuación del Sistema de Lorenz equivale a un filtro pasabajas pasivo de primer orden.

El campo de los filtros no lineales proveniente de sistemas no lineales es un campo nuevo el cual debe ser explorado exhaustivamente. Por ejemplo como primera aproximación, de forma similar se pretende hacer un comparativo entre las otras ecuaciones del sistema de Lorenz para caracterizar totalmente dicho sistema como filtro.

BIBLIOGRAFÍA

Campos C., E., Fermat, R. S., Campos C., I., Morales S., J. A., 2012, "Un circuito lógico basado en chaos", Congreso Anual 2010 de la Asociación de México de Control Automático, Puerto Vallarta, Jalisco, México.

Campos C., I., Segura-C., O. A., Balderas N., R. E., Campos C., E., 2014, "Chuas circuit and its characterization as a Filter", European Journal of Physics, N. 35, 065018.

Escudero, J., Parada, M., Simón, F., 2006, "Temario Departamento de Tecnología Electrónica", Tema 4.

Hayt, W., Kemmerly, J., Durbin, S., 2007, "Análisis de Circuitos en Ingeniería", Sección 16, Mc Graw Hill, Séptima Edición.

Ifeachor, E., Jervis, B., 1993, "Digital Signal Processing: a practical approach", Editorial Addison-Wesley, Longman Ltd, Edingburg Gate, Harlow, England.

Lepez, H., Paulina, M., González, P. S., Campos C., I., 2012, "Representación de la naturaleza a través de un osciloscopio", Universitarios Potosinos, No. 154, Año Siete.

Miyara, F., 2004, "Filtros Activos", Universidad Nacional de Rosario, Argentina, Segunda Edición.

Núñez, R., 2011, "Evaluando las sincronizaciones sin y con retroalimentación en circuito de Lorenz", Revista Mexicana de Física, No. 57 (84-90), Año Uno.

Williams, A., Taylor, F. J., 1995, "Electronic Filter Design Handbook". Mc Graw Hill.