

# UN MÉTODO NUMÉRICO PARA LA OBTENCIÓN DE RELACIONES CONSTITUTIVAS EN ROCAS FRACTURADAS

Leonardo B. Monachesi <sup>1</sup> y Luis Guarracino <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Paseo del Bosque s/n, 1900. La Plata, Argentina.

Mail de contacto: [lmonachesi@fcaglp.unlp.edu.ar](mailto:lmonachesi@fcaglp.unlp.edu.ar)

<sup>2</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Paseo del Bosque s/n, 1900. La Plata, Argentina.

Mail de contacto: [luisg@fcaglp.unlp.edu.ar](mailto:luisg@fcaglp.unlp.edu.ar)

---

## RESUMEN

En este estudio se determinan las relaciones constitutivas para rocas fracturadas no saturadas mediante un procedimiento numérico que imita las técnicas de medición utilizadas en laboratorio. En forma computacional se generan muestras tridimensionales de roca con fracturas verticales y horizontales aleatorias. Cada fractura es conceptualizada como una placa tridimensional cuyas propiedades hidráulicas son descritas por el modelo de van Genuchten. El procedimiento se basa en la solución numérica de la ecuación de flujo no saturado estacionario en una malla regular de un millón de elementos utilizando un método híbrido mixto de elementos finitos. Los valores de saturación y conductividad hidráulica relativa se calculan numéricamente a partir de los resultados de la simulación para distintos valores de altura de presión. Las relaciones simuladas son ajustadas utilizando dos expresiones analíticas recientemente propuestas para rocas fracturadas no saturadas. Ejemplos numéricos muestran que ambos modelos pueden ajustar razonablemente las relaciones de saturación simuladas.

Palabras clave: relaciones constitutivas, flujo no saturado, rocas fracturadas.

## ABSTRACT

In this study constitutive relations for unsaturated fractured rocks using a numerical procedure that mimics the laboratory technique of measurement are determined. Three-dimensional rock samples with random vertical and horizontal fractures are computationally constructed. Each fracture is conceptualized as a three-dimensional plate whose hydraulic properties are described by the van Genuchten model. The procedure is based on the numerical solution of the steady-state unsaturated flow equation in a three-dimensional cubic domain, on a regular mesh of one million elements, using a hybridized mixed finite element method. The saturation and hydraulic conductivity values are numerically computed from the simulation results, for several values of pressure head. The simulated relations are fitted using two recently proposed analytical expressions for unsaturated fractured rocks. Numerical examples show that both models can match reasonably the simulated saturation relations.

Keywords: constitutive relations, unsaturated flow, fractured rocks.

## INTRODUCCIÓN

El modelado de flujo de agua en rocas fracturadas es de gran interés en varias áreas de investigación, tales como hidrología de aguas subterráneas, ciencias del suelo e ingeniería ambiental entre otras. La mayoría de los estudios que describen el movimiento del agua a través de un medio poroso no saturado están basados en la ecuación de Richards (aproximación del continuo). Para resolver esta ecuación es necesario disponer de relaciones constitutivas de saturación versus altura de presión y conductividad hidráulica versus altura de presión (ó versus saturación). Para el caso de rocas fracturadas la obtención de relaciones constitutivas por medición directa es muy dificultosa y los datos experimentales son prácticamente inexistentes (Tuller M. y Or D., 2002). Una alternativa a la medición directa es la utilización de procedimientos numéricos que imiten las pruebas de laboratorio utilizadas para determinar las relaciones constitutivas de muestras de suelo (Kwicklis E.M. y Healey R.W., 1993; Liu H.H. y Bodvarsson G.S., 2001).

En el presente estudio las relaciones constitutivas para rocas fracturadas son obtenidas mediante simulaciones numéricas del flujo no saturado estacionario en muestras sintéticas de roca. Una muestra de roca fracturada está constituida por un conjunto de fracturas aleatorias y una matriz de baja permeabilidad, ocupando un dominio tridimensional cúbico. Las fracturas generalmente contienen granos de uno o más tipos de minerales de relleno y por esta razón se conceptualizan como medios porosos tridimensionales clásicos de alta permeabilidad.

El flujo de agua a través de la muestra de roca es simulado resolviendo la ecuación de flujo no saturado estacionario. Las condiciones de borde se definen de manera tal que sobre la muestra se establezca un gradiente efectivo medio de altura de presión. Esto se logra a partir de imponer sobre sus caras horizontales inferior y superior valores constantes de altura de presión  $h_B$  y  $h_T$ , respectivamente, definidos de modo que promedien un valor efectivo de altura de presión  $h_e$ , y que su diferencia sea proporcional a  $h_e$ . Para un número de valores diferentes de  $h_e$ , los valores correspondientes de saturación y conductividad hidráulica relativa pueden ser obtenidos utilizando aproximaciones numéricas. La ecuación de flujo no saturado es resuelta utilizando un método híbrido mixto de elementos finitos que permite obtener

simultáneamente una aproximación de la altura de presión y del flujo de agua.

El método computacional propuesto permite obtener relaciones constitutivas pseudo-experimentales, las cuales son comparadas con dos expresiones analíticas de modelos constitutivos propuestos recientemente por Liu y Bodvarsson (2001) y Guarracino (2006). Basándose en simulaciones numéricas, Liu y Bodvarsson proponen utilizar la curva de saturación del modelo de van Genuchten (1980), combinado con una curva de conductividad hidráulica modificada del modelo de Brooks-Corey (1964), como un modelo constitutivo para rocas fracturadas. Guarracino obtiene una curva de saturación utilizando conceptos fractales y predice la conductividad hidráulica utilizando el modelo de Burdine (1953). Ambos modelos fueron derivados para rocas fracturadas macizas, donde se asume que no se produce flujo a través de la matriz. La habilidad de estos modelos en describir las propiedades hidráulicas de rocas fracturadas es evaluada comparando las relaciones simuladas en forma numérica con sus expresiones analíticas. Dos ejemplos aplicados a basaltos fracturados muestran que ambos modelos pueden ajustar la curva de saturación razonablemente, mientras que el modelo fractal permite obtener un mejor ajuste de la curva de conductividad hidráulica a los valores simulados.

## MUESTRA DE ROCA FRACTURADA

En esta sección se describe el procedimiento computacional utilizado para generar muestras tridimensionales de roca fracturada. La matriz de la roca se supone de baja permeabilidad y las fracturas son conceptualizadas como placas gruesas de medio poroso de alta permeabilidad. El patrón de fracturas se compone de tres grupos mutuamente ortogonales distribuidos de forma aleatoria en el espacio de la muestra. Patrones de redes de fractura similares han sido utilizados por Smith y Schwartz (1993) y Liu y Bodvarsson (2001) para investigar el flujo de agua en rocas fracturadas bidimensionales.

Para construir la red de fracturas un grupo de puntos aleatorios es generado usando una distribución uniforme. En torno de cada punto se genera un prisma rectangular de sección cuadrada de lado  $L$  y apertura  $b$  utilizando la siguiente ley fractal (Walsh J. et al., 1991):

$$b = cL^d \quad (1)$$

donde  $d$  es la dimensión fractal y  $c$  es una constante empírica. En el presente estudio determinamos relaciones constitutivas en una muestra cúbica de 10 cm de lado. Por simplicidad, las fracturas se asumen paralelas a los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$ . La Fig. 1 muestra una realización de una muestra de roca generada con los siguientes parámetros:  $b=0.1$  cm,  $d=1.13$  y  $c=0.02$ .

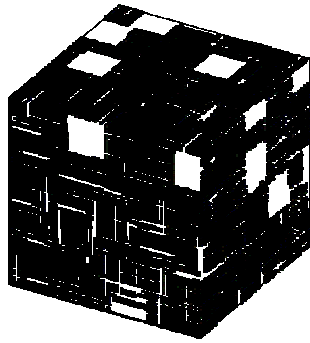


Fig.1. Muestra de roca fracturada generada computacionalmente.

Siguiendo a Pruess y Tsang (1990), Kwicklis y Healey (1993) y Liu y Bodvarsson (2001), conceptualizamos a las fracturas individuales como medios porosos tridimensionales con relaciones constitutivas representadas por el modelo de van Genuchten (1980):

$$\theta(h) = (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 + |\alpha h|^n \right]^{-m} + \theta_r$$

$$k(h) = k_s \frac{\left[ 1 - |\alpha h|^{n-1} \left[ 1 + |\alpha h|^n \right]^{-m} \right]^2}{\left[ 1 + |\alpha h|^n \right]^{m/2}} \quad (2)$$

donde  $\theta$  es el contenido de agua;  $h$  la altura de presión;  $\theta_s$  y  $\theta_r$  los contenidos de agua saturado y residual, respectivamente;  $\alpha$ ,  $n$  y  $m$  son parámetros empíricos de ajuste, con  $m=1-1/n$ ;  $k$  la conductividad hidráulica y  $k_s$  la conductividad hidráulica saturada. Las propiedades hidráulicas de la matriz de la roca también son descritas utilizando el modelo de van Genuchten.

## PROCEDIMIENTO NUMÉRICO

## Problema diferencial

El empleo de simulaciones numéricas con el objeto de determinar relaciones constitutivas efectivas para el flujo no saturado ha sido reportado por muchos autores (Liu H.H. y Bodvarsson G.S., 2001; Desbarats A.J., 1998; Monachesi L.B., 2006). Esta metodología es aplicable al caso particular de rocas fracturadas siempre que la roca esté densamente cubierta por fracturas, ó bien cuando la red de fracturas y la matriz interactúan lo suficiente como para permitir establecer un equilibrio local.

El procedimiento numérico está basado en la hipótesis de que la media aritmética entre los valores de borde  $h_B$  y  $h_T$  es representativo de la altura de presión de toda la muestra. Diremos entonces que este promedio constituye un valor efectivo  $h_e$  dado por  $h_e = (h_B + h_T)/2$ . Los valores de saturación y conductividad hidráulica asociados con el valor efectivo de altura de presión son estimados mediante la simulación numérica del flujo no saturado de agua en la muestra de roca. Luego, estableciendo diferentes valores de altura de presión efectiva es posible obtener relaciones constitutivas pseudo-experimentales tanto para la saturación de agua como para la conductividad hidráulica de la roca fracturada.

El flujo no saturado de agua a través de la muestra de roca, en estado estacionario, obedece al siguiente problema diferencial:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}(h) &= 0 & \vec{x} \in \Omega \\ \vec{q}(h) &= k(h) \vec{\nabla}(h+z) & \vec{x} \in \Omega \\ h(\vec{x}) &= h_B & \vec{x} \in \Gamma_B \\ h(\vec{x}) &= h_T & \vec{x} \in \Gamma_T \\ \vec{q}(h) \cdot \hat{\nu} &= 0 & \vec{x} \in \Gamma_L \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\vec{q}(h)$  es el flujo de agua;  $\vec{x} = (x, y, z)$ ;  $\Omega$  el dominio computacional (un cubo de lado  $a$ );  $\Gamma_B$ ,  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_L$  son las caras inferior, superior y laterales, respectivamente;  $h_B$  y  $h_T$  las alturas de presión en las caras  $\Gamma_B$  y  $\Gamma_T$ , respectivamente y  $\hat{\nu}$  el vector unitario normal a las caras laterales. Los valores  $h_B$  y  $h_T$  están definidos a partir de  $h_e$  según:

$$\begin{aligned} (h_B + h_T) / 2 &= h_e \\ (h_T - h_B) &= |h_e| / 2 \end{aligned} \quad (4)$$

La primera de las ecuaciones (4) no es más que la media aritmética de altura de presión y la segunda se obtiene imponiendo que el gradiente efectivo de altura de presión, aproximado por el cociente incremental entre  $h_B$  y  $h_T$ , sea proporcional a  $|h_e|/2a$ :

$$\bar{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial z} \approx \frac{(h_T - h_B)}{a} = \frac{1}{2a} |h_e| \quad (5)$$

Obsérvese que con esta definición el gradiente efectivo de altura de presión es siempre positivo independientemente del estado de saturación de la muestra. De esta manera, el gradiente de altura hidráulica  $H$  ( $H=h+z$ ) será siempre positivo, induciendo un flujo negativo (en el sentido de la gravedad) sin importar el signo de  $h_e$ . Nótese también que el gradiente efectivo de  $h$  es del mismo orden de magnitud que  $h_e$ . Esto permite obtener una descripción más realista del experimento numérico, dado que en las pruebas de laboratorio, cuanto mayor es el gradiente efectivo de altura de presión impuesto sobre una muestra, menor es la saturación y, por tanto, mayor es  $|h_e|$ .

### Resolución numérica

El problema diferencial (3) es resuelto mediante un método híbrido mixto de elementos finitos, el cual permite obtener simultáneamente una aproximación para la altura de presión y una para el flujo de agua (Guarracino L., 2001). La ecuación de flujo es linealizada utilizando un método de iteración de Picard. La utilización de un método mixto de elementos finitos para la aproximación de la ecuación de flujo es especialmente apropiado por dos razones: conserva la masa localmente y puede manejar grandes discontinuidades en la conductividad hidráulica. El método mixto fue implementado para el espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden más bajo (Raviart P.A. y Thomas J.M. 1977; Nedelec J., 1977) en una malla regular compuesta de elementos cúbicos. Los correspondientes grados de libertad son los valores de altura de presión en el centro del elemento y los valores de la componente normal del vector de flujo en el centro de cada cara del cubo elemental. Para cada iteración de Picard el sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultante es resuelto utilizando en forma iterativa un método de sobrerrelajación (SOR) (Peaceman D.W., 1977).

### Saturación efectiva y conductividad hidráulica

La saturación efectiva  $S_e$  de la muestra de roca se calcula a partir de la siguiente definición:

$$S_e(h_e) = \frac{\int_{\Omega} [\theta(h) - \theta_r] d\Omega}{\int_{\Omega} [\theta_s - \theta_r] d\Omega} \quad (6)$$

donde las integrales son resueltas numéricamente utilizando una regla de cuadratura y la solución numérica de (3). Dado que el gradiente efectivo de la altura de presión puede aproximarse por (5), según la Ley de Darcy, la conductividad hidráulica  $K$  de la muestra de roca es igual al flujo vertical neto a través de una sección horizontal, dividido por el gradiente efectivo de altura hidráulica  $H$ :

$$K(h_e) = \frac{1}{\left(\frac{(h_T - h_B)}{a} + 1\right)} \frac{\int_{\Gamma} \bar{q}(h) \cdot \hat{\nu} d\Gamma}{\int_{\Gamma} d\Gamma} \quad (7)$$

donde  $\Gamma$  es una sección horizontal de la muestra (la cara inferior  $\Gamma_B$ , por ejemplo). La conductividad hidráulica saturada  $K_s$  se obtiene cuando sobre las caras superior e inferior de la muestra se imponen valores de altura de presión tales que  $h_e > 0$  (muestra saturada). Por simplicidad, los resultados numéricos serán expresados en términos de la conductividad hidráulica relativa  $K_r(h_e) = K(h_e)/K_s$ .

### RELACIONES CONSTITUTIVAS SIMULADAS

El procedimiento numérico descrito en la sección anterior es utilizado para estimar las relaciones constitutivas para dos muestras de roca basáltica fracturada. Ambas muestras se asumen cúbicas de 10 cm de lado, con un patrón de fracturas como el que se muestra en la Fig. 1 (la Fig. 1 corresponde a la muestra 1). Para la caracterización hidráulica de la matriz de la roca se han utilizado los parámetros de van Genuchten calibrados por Unger et al. (2004) para los basaltos de Box Canyon Site (Idaho). Se asume también que las propiedades hidráulicas de

las fracturas pueden ser descritas por los parámetros de van Genuchten obtenidos por Carsel y Parrish (1988) para un medio de textura correspondiente a una arena arcillosa. Los parámetros de van Genuchten para la matriz y las fracturas se listan en la Tabla 1.

El problema diferencial (3) es resuelto en una malla rectangular de un millón de elementos, donde cada elemento es un cubo de 1 mm de lado. Las simulaciones fueron llevadas a cabo para 13 valores diferentes de altura de presión efectiva  $h_e$  (uno de ellos es un valor no negativo con el propósito de estimar la conductividad hidráulica saturada) y para dos distribuciones de fracturas. Ambas distribuciones comparten los mismos parámetros fractales  $d=1.13$  y  $c=0.02$ , pero difieren en la apertura y en la cantidad de fracturas. Para la muestra 1, la apertura de las fracturas es  $b=0.1$  cm, mientras que para la muestra 2  $b=0.2$  cm. La cantidad de fracturas en la muestra 1 es 2500, constituyendo una fracción volumétrica de fracturas del 46%. Para la muestra 2, la cantidad de fracturas es 1000, y la fracción volumétrica de fracturas es del 85.25 %.

Los valores correspondientes de  $S_e$  y  $K_r$  fueron calculados utilizando (6) y (7), respectivamente. La Fig. 2 muestra los valores simulados de  $S_e$  versus  $h_e$  mientras que la Fig. 3 muestra  $K_r$  como función de  $S_e$ . Ambas figuras incluyen los resultados numéricos obtenidos para las dos distribuciones de fracturas.

	fracturas	matriz
$\theta_r$	0.057	0.1
$\theta_s$	0.41	0.2
$\alpha$ [1/cm]	0.124	$4.9 \times 10^{-3}$
$n$	2.28	1.33
$k_s$ [cm/d]	350.2	0.281

Tabla 1. Parámetros de van Genuchten para las fracturas y la matriz.

Para ilustrar el efecto de las fracturas en la caracterización hidráulica de las muestras se han incluido además en las Figs. 2 y 3 las curvas de van Genuchten correspondientes a medios homogéneos con las propiedades hidráulicas de la matriz y de las fracturas.

Para valores pequeños de  $|h_e|$  (valores de saturación cercanos a 1) los valores simulados de  $S_e$  y  $K_r$  son similares a los de van Genuchten correspondientes a las fracturas. Este comportamiento sugiere que, cerca de la saturación, el flujo de agua en la muestra de roca está completamente determinado por las propiedades hidráulicas de las fracturas. Para la muestra 1, a medida que aumenta  $|h_e|$ , tanto  $S_e$  como  $K_r$  se apartan de la curva de las fracturas, acercándose en forma progresiva a la de la matriz, mientras que los valores simulados para la muestra 2 se mantienen cerca de las curvas de las fracturas en todo el rango de altura de presión. Este resultado se debe principalmente a la marcada diferencia de fracciones volumétricas de fracturas de ambas muestras. En la muestra 2 la fracción volumétrica de fracturas es muy grande, y por lo tanto su comportamiento hidráulico es muy semejante al de una muestra homogénea con las propiedades hidráulicas de las fracturas.

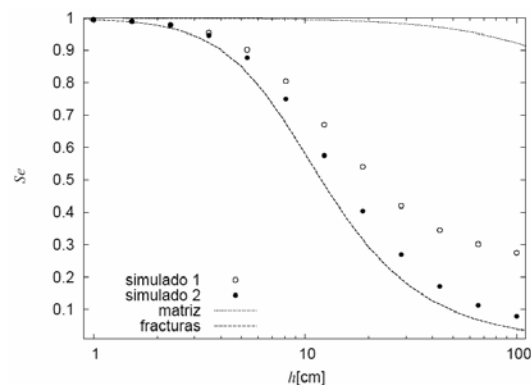


Fig. 2. Saturación efectiva simulada.

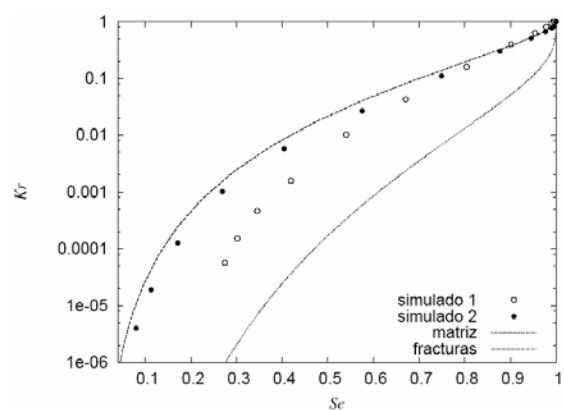


Fig. 3. Conductividad hidráulica relativa simulada.

Las relaciones constitutivas simuladas que se muestran en las Figs. 2 y 3 fueron utilizadas para evaluar dos expresiones analíticas para rocas fracturadas propuestas recientemente por Liu y Bodvarsson (2001) y Guarracino (2006). El procedimiento utilizado para la evaluación de estos modelos constitutivos consiste de dos pasos. Primero, las relaciones de saturación efectiva simuladas se ajustan con las curvas analíticas utilizando un método de búsqueda exhaustivo (Sen M. y Stoffa P.L., 1995) Segundo, los parámetros ajustados obtenidos para la curva de saturación son utilizados para predecir la curva de conductividad hidráulica relativa. Éste es un procedimiento standard en muchas aplicaciones prácticas donde la conductividad hidráulica es estimada a partir de los valores de saturación medidos.

El modelo constitutivo propuesto por Liu y Bodvarsson (2001) está dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_e &= \left[ 1 + |\alpha h|^n \right]^{-m} \\ K_r &= S_e^{3-2S_e^{1/4} + 2/(n+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $S_e$  es la curva de saturación efectiva de van Genuchten y  $K_r$  una curva de conductividad hidráulica relativa de Brooks-Corey modificada. El modelo constitutivo fractal derivado por Guarracino (2006) es el siguiente:

$$\begin{aligned} S_e &= \begin{cases} 1, & h < h_{\min} \\ \frac{h^{D-2} - h_{\max}^{D-2}}{h_{\min}^{D-2} - h_{\max}^{D-2}}, & h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \\ 0, & h_{\max} < h \end{cases} \\ K_r &= S_e^2 \frac{\left[ S_e \left[ \left( \frac{h_{\min}}{h_{\max}} \right)^{D-2} - 1 \right] + 1 \right]^{D-4}}{\left( \frac{h_{\min}}{h_{\max}} \right)^{D-4} - 1} \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $D$  es la dimensión fractal de la red de fracturas, y  $h_{\min}$  y  $h_{\max}$  son parámetros del modelo asociados con valores de corte inferior y superior de la altura de presión.

La Fig. 4 muestra los ajustes del modelo de Liu-Bodvarsson y del modelo fractal a los valores

simulados de saturación efectiva junto con las curvas de conductividad hidráulica relativa obtenidas con los parámetros de ajuste, para la muestra 1. Los parámetros ajustados de los dos modelos son:  $\alpha = 0.104 \text{ cm}^{-1}$ ,  $n = 1.691$ ,  $D = 1.55$ ,  $h_{\min} = 4.6 \text{ cm}$  y  $h_{\max} = 10^{14} \text{ cm}$ . La Fig. 5 muestra los ajustes correspondientes a la muestra 2, siendo en este caso los parámetros de ajuste:  $\alpha = 0.125 \text{ cm}^{-1}$ ,  $n = 1.9$ ,  $D = 1.31$ ,  $h_{\min} = 4.78 \text{ cm}$  y  $h_{\max} = 10^{13} \text{ cm}$ .

Se puede observar que ambos modelos ajustan bien las saturaciones simuladas para todo el rango de altura de presión efectiva.

En ambos ejemplos, el modelo de Liu-Bodvarsson sobreestima los valores de  $K_r$  simulados en todo el rango de saturación efectiva, siendo levemente más marcado este comportamiento a medida que disminuye la saturación. El modelo fractal por su parte logra predecir una curva más aproximada a los valores simulados en ambos ejemplos.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un procedimiento numérico que simula los experimentos de laboratorio utilizados para obtener relaciones constitutivas para medios porosos. Se ha resuelto la ecuación de flujo no saturado de agua en estado estacionario en un dominio tridimensional utilizando un método híbrido mixto de elementos finitos. Se llevaron a cabo experimentos numéricos para simular las relaciones constitutivas para dos muestras de roca basáltica fracturada. Las curvas de saturación efectiva y conductividad hidráulica relativa fueron ajustadas utilizando los modelos analíticos propuestos por Liu y Bodvarsson (2001) y Guarracino (2006). A partir de experimentos numéricos se encontró que ambos modelos constitutivos son válidos para describir la saturación efectiva simulada. Sin embargo los valores de conductividad hidráulica predichos por estos modelos son diferentes. Mientras el modelo de Liu y Bodvarsson sobreestima los valores simulados para todo el rango de saturación, el modelo de Guarracino logra una mejor descripción de la conductividad simulada. El procedimiento numérico propuesto constituye una alternativa válida para caracterizar las propiedades hidráulicas de una roca fracturada cuando no se dispone de datos medidos.

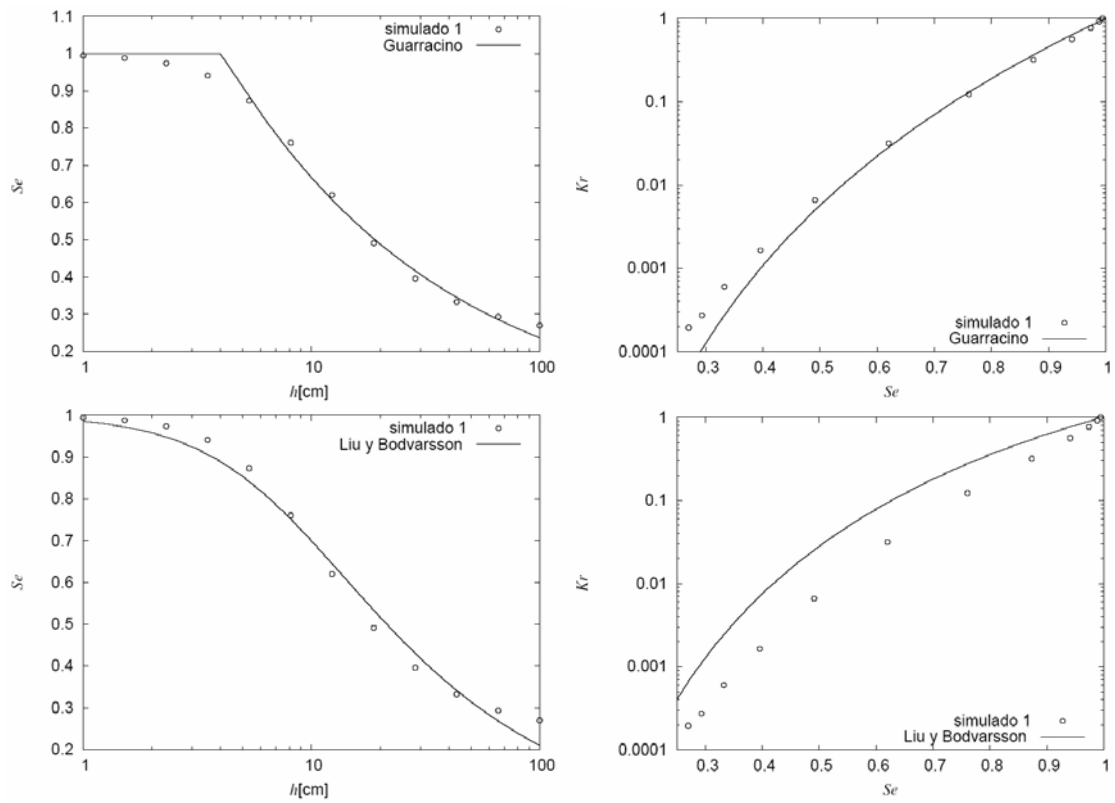
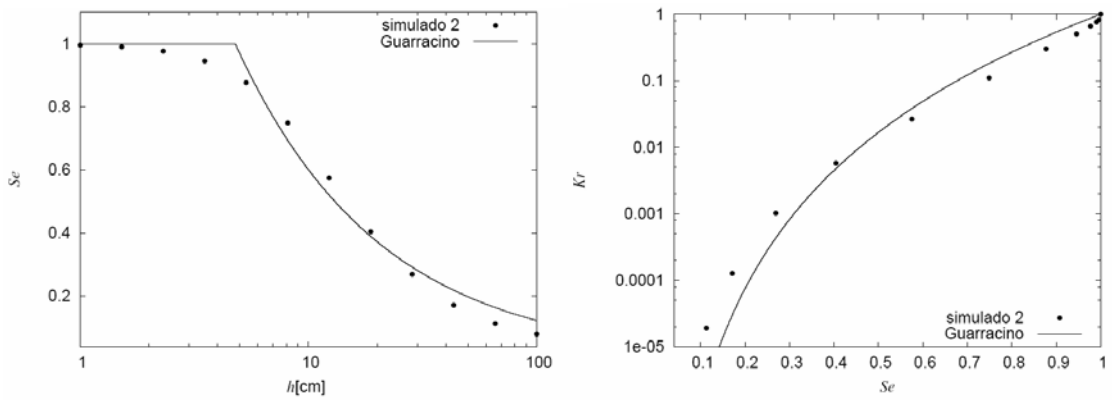


Fig. 4. Ajuste de curvas analíticas propuestas por Liu y Bodvarsson y por Guarracino a los valores simulados para la muestra 1.



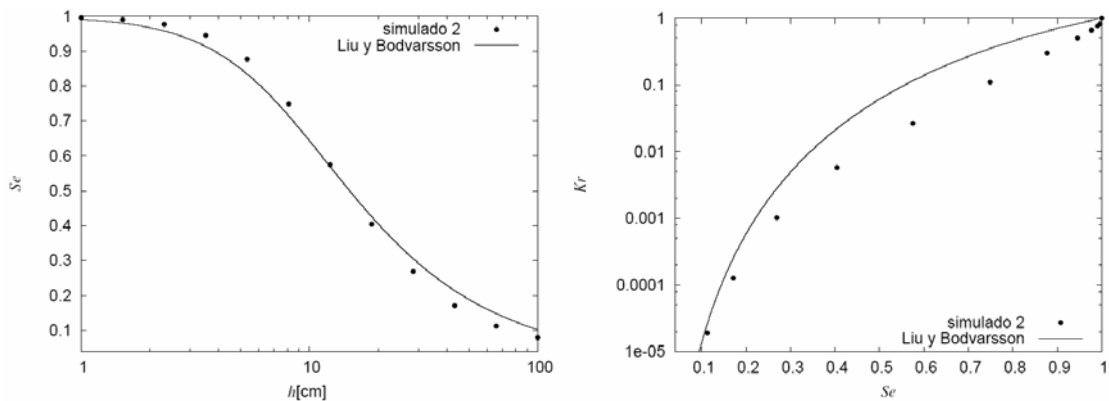


Fig. 5. Ajuste de curvas analíticas propuestas por Liu y Bodvarsson y por Guarracino a los valores simulados para la muestra 2.

## REFERENCIAS

- Brooks R.H. y Corey A.T. 1964. Hydraulic Properties of Porous Media. Hydrol. Pap. No. 3. Colorado State University, Fort Collins.
- Burdine N.T. 1953. Relative permeability calculations from pore-size distribution data. Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Engng., 198, 71-77.
- Carsel R.F. y Parrish R.S. 1988. Developing joint probability distributions of soil water characteristics. Water Resour. Res., 24, 755-769.
- Desbarats A.J. 1998. Scaling of constitutive relationships in unsaturated heterogeneous media: a numerical investigation. Water Resour. Res., 24, 1427-1436.
- Guarracino L. 2001. Modelado numérico del flujo de aguas subterráneas y transporte de solutos en medios porosos heterogéneos. Tesis doctoral. Universidad Nacional de La Plata.
- Guarracino L. 2006. A fractal constitutive model for unsaturated flow in fractured hard rocks. Journal of Hydrology, 324, 154-162.
- Kwicklis E.M. y Healey R.W. 1993. Numerical investigation of steady liquid water flow in a variably saturated fractured network. Water Resour. Res., 29, 4091-4102.
- Liu H.H. y Bodvarsson G.S. 2001. Constitutive relations for unsaturated flow in a fracture network. Journal of Hydrology, 252, 116-125.
- Monachesi L.B. 2006. Simulación Numérica de Relaciones Constitutivas para el flujo de agua en suelos heterogéneos no saturados. Tesis, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, 75 pp.
- Nedelec J. 1980. Mixed finite elements in  $R^3$ . Numer. Math., 35, 315-341.
- Peaceman D.W. 1977. Fundamentals of numerical reservoir simulation. Elsevier.
- Pruess K. y Tsang Y.W. 1990. On two-phase relative permeability and capillary pressure of rough-walled rock fractures. Water Resour. Res., 26, 1915-1926.
- Raviart P.A. y Thomas J.M. 1977. A mixed finite element method for second order elliptic problems: Mathematical aspects of the finite element method. Lect. Notes Math., 606, 292-315.
- Sen M. y Stoffa P.L. 1995. Global Optimization Methods in Geophysical Inversion. Elsevier, Amsterdam.
- Smith L. y Schwartz F.W. 1993. Solute transport through fracture networks", Bear J, Tsang CF, de Marsily G (Eds.), Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock. Academic Press, San Diego.



Tuller M. y Or D. 2002. Unsaturated hydraulic conductivity of structured porous media: a review of liquid configuration-based models. *Vadose Zone Journal*, 1, 14-37.

Unger J.A., Faybishenko B., Bodvarsson G.S. y Simmons A.M. 2004. Simulating infiltration tests in fractured basalt at the Box Canyon Site, Idaho. *Vadose Zone Journal*, 3, 75-89.

van Genuchten M. 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44, 892-898.

Walsh J., Watterson J. y Yielding G. 1991. The importance of small-scale in regional extension. *Nature*, 351, 391-393.