# Diseños de bloques balanceados incompletos (bibd) a través de un enfoque matricial

Manuel R. Piña[1], Manuel A. Rodríguez[2] y Evelyn H. Castañeda[2]

**RESUMEN**

Frecuentemente en la experimentación a través del diseño de bloques incompletos, encontramos que la información de la matriz $C$ es una matriz singular, razón por la cual esta matriz no es invertible. En este artículo proponemos un enfoque matricial para calcular el efecto del vector de los tratamientos mediante la determinación de la pseudoinversa de $C$ en el diseño de bloques incompletos balanceados (BIBD) y la construcción de la tabla del ANOVA en este enfoque para checar los términos significativos y la falta de ajuste del modelo.

**Palabras Clave***:* Matriz Singular, Seudo-inversa, Descomposición del Valor Singular, Diseño de Bloques Balanceados Incompletos.

## INTRODUCCIÓN

Los diseños de bloques en general, son arreglos que se realizan con la finalidad de tener el control de forma sistemática sobre la variabilidad debida a fuentes externas. Cuando estas fuentes de variabilidad existen, es posible generar diseños por bloques capaces de separar y eliminar esta variación del resto de los efectos de los factores de interés. Preece (1967) introduce para estos objetivos, los diseños balanceados incompletos anidados en los que dentro de cada bloque del diseño de bloques incompleto, otro boque incompleto es anidado. Singh y Dey (1979), consideran diseños experimentales de este tipo a los que llamaron Diseños de Bloques

---

[1] Manuel R. Piña Monarrez, cursa el grado de Doctor en Ciencias con Especialización en Ingeniería Industrial. Este articulo, se basa en su disertación doctoral "Metodología Robusta para Superficies de Respuestas". Programa Doctoral, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México. romanpin1970@yahoo.com.mx

[2] División de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México.

Incompletos con Filas y Columnas Anidados (BIBRC) por sus siglas en ingles (Balanced Incomplete Block Design with Nested Rows and Columns). En particular, los Diseños de Bloques Incompletos Balanceados (BIBD) por sus siglas en ingles (balanced incomplete blocks design) los cuales son arreglos experimentales que permiten eliminar las fuentes de variabilidad de los efectos de los tratamientos. Así, el modelo a estimar esta dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

Donde $Y_{ij}$ es la $i\text{-}esima$ observación del $j\text{-}esimo$ bloque, $\mu$ es la media general, $\tau_i$ es el efecto del $i\text{-}esimo$ tratamiento, $\beta_j$ es el efecto del $j\text{-}esimo$ bloque y $\varepsilon_{ij}$ es el error aleatorio considerado $NID(0,\sigma^2)$. Para el ajuste del modelo dado en (1), la variabilidad total, es descompuesta en:

$$SS_{tot} = SS_{treat} + SS_{blocks} + SS_{residual} \qquad (2)$$

Lo común, para obtener las sumas de cuadrados dadas en (2), para ajustar el modelo dado en (1), consistía en utilizar el estimador de Mínimos Cuadrados (MC) para a través de sus ecuaciones normales e introduciendo algunas restricciones adicionales, realizar las estimaciones correspondientes. La estimación de estas cantidades, es posible obtenerlas de manera eficiente a través de la aplicación de la inversa generalizada para resolver de manera directa el sistema de ecuaciones resultantes y ajustar el modelo dado en (1) con el que se representa al modelo. Como se muestra en este articulo, con este método, es también posible construir la tabla de análisis de varianza para probar la adecuación del modelo. Los BIBD son frecuentemente utilizados ya que durante el proceso de experimentación con diseños experimentales aleatorios, frecuentemente no es posible realizar todas las combinaciones de los tratamientos dentro de cada bloque debido a restricciones de recursos o tamaño del bloque entre otros. Para estos casos, es recomendable utilizar los diseños experimentales BIBD, debido a que estos diseños, tienen menos tiempo de experimentación y menos costo ya que son diseños incompletos en los que cada par de tratamientos ocurren juntos el mismo número de veces Montgomery (1991). Lamentablemente, en los cálculos de los efectos que los tratamientos tienen sobre la variable de respuestas en estos diseños incompletos dados por:

$$\tau = C^{-1}Q \tag{3}$$

donde $\tau$, es un vector fila de efectos de los tratamientos, $Q$ es un vector columna de efectos corregidos de los tratamientos dado por:

$$Q = T - nk^{\delta}B \tag{4}$$

$$C = r^{\delta} - nk^{-\delta}n^{t} \tag{5}$$

y $C$, es una matriz de información de $n\,x\,n$, que generalmente resulta en una matriz singular, por lo que a través de los métodos clásicos, no es posible determinar su inversa $C^{-1}$ para realizar la estimación. En el presente articulo, utilizamos la descomposición del valor singular de $C$, para determinar la matriz base ortogonal, que nos permita determinar la seudoinversa de C dada por $(C^{+})$ (Inversa generalizada de Moore Penrouse), que utilizamos para estimar los efectos que los tratamientos tienen sobre la variable de respuesta. El método presentado en este articulo, puede ser utilizado para resolver problemas que presenten una matriz singular en el sistema de ecuaciones lineales, así como una forma alternativa para construir la tabla de análisis de varianza en la experimentación con los

BIBD. En la sección 2 se presentan las generalidades de los BIBD, en la sección 3 se presenta el método de construcción de la seudoinversa, en la sección 4 se presenta el enfoque matricial de los BIBD, en la sección 5, se desarrolla una aplicación del enfoque matricial finalmente el articulo termina con los resultados y conclusiones en la sección 6.

## 2. DISEÑO BALANCEADO DE BLOQUES INCOMPLETOS (BIBD)

En general los diseños de bloques son arreglos experimentales diseñados para sistemáticamente controlar la variabilidad de fuentes externas. En particular, los diseños de bloques balanceados incompletos (BIBD), son arreglos en los que cada bloque contiene solo algunos de los tratamientos que serán comparados, por lo que reducen el tiempo y costo de experimentación. Las propiedades de los diseños balanceados se debe a que cada par de tratamientos, ocurre juntos el mismo número de recesen el diseño. Raghavarao (1971), define un BIBD como un arreglo de $v$ símbolos y $b$ conjuntos en los que cada uno de los $k < v$ símbolos, deberán de satisfacer las siguientes condiciones:

**1.** Cada símbolo ocurre al menos una vez en cada conjunto.

**2.** Cada símbolo ocurre en exactamente $r$ conjuntos.

**3.** Cada par de símbolos ocurran juntos en exactamente en $\lambda$ conjuntos.

Los parámetros de un BIBD son $v, b, r, k, \lambda$, donde $v$ es el número de variedades en el diseño, $b$ es el número de bloques, $r$ es el número de replicas en cada variedad, $k$ es el tamaño del bloque y $\lambda$ es el número de conjuntos en donde cada par de símbolos ocurre el cual deberá de satisfacer que $vr = bk$ y $\lambda(v-1) = r(k-1)$. Un diseño es simétrico si $v = b$ lo que genera como consecuencia que $r = k$. Este tipo de diseños simétricos, son generalmente utilizados de un orden máximo de $v = b = 7$, restricción que puede ser eliminada a través de la construcción de diseños de mayor número de variedades y por supuesto de mayor número de bloques (Rodríguez, 2003). En la literatura existen varios métodos para la construcción de los BIBD tales como la construcción a través de diseños incompletos conocidos, a través de la matriz de Hadamard o por la construcción de geometrías finitas entre diseño, por lo que el diseño de bloques que se deberá de correr podría ser un diseño aleatorio balanceado de bloques incompletos (BIBD), [para la selección especifica del diseño, el lector puede consultar la tabla de diseños (BIBD) presentado por Fisher y Yates (1953); Davies (1956) y Cochran y Cox (1957)]. El análisis estadístico para estos diseños, otros. El método para la construcción del diseño utilizado en este articulo, fue a través del método de diferencias finitas dado por Bose (1939). Del mismo modo, cuando durante el proceso de experimentación, no es posible llevar acabo todas las corridas experimentales de todas las combinaciones de los tratamientos, ya sea por restricciones de material, de costo u otro, pero todas las comparaciones entre los tratamientos tienen la misma importancia, las comparaciones deberán de ocurrir en forma balanceada en cada bloque del consiste en determinar la significancia de los efectos que los tratamientos y/o bloques tienen sobre la variable de respuesta, a través del análisis de varianza $(ANOVA)$. El modelo estadístico que representa este diseño, es el que se definió en (1). Para este modelo, la suma total corregida, esta dada por (2) y puede ser rescrita como:

$$SS_{tot} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{(Y..)^2}{N} \qquad (6)$$

donde $N = bk$ con $b$ representando el

número de bloques menos uno $b = (B-1)$, $k$ es el número de tratamientos menos uno dado por $k = (a-1)$ y $Y.. = \sum_i \sum_j Y_{ij}$. Esta suma de cuadrados total puede ser descompuesta en $SS_{tot} = SS_{trat} + SS_{bloque} + SS_{error}$ donde sus componentes están dados por:

$$SS_{trat} = \frac{k \sum_1^a Q_i^2}{\lambda a} \qquad (7)$$

$$SS_{bloque} = \sum_1^b \frac{Y_{.j}}{k} - \frac{(Y..)^2}{N} \qquad (8)$$

$$SS_{error} = SS_{tot} - SS_{trat} - SS_{bloque} \qquad (9)$$

donde $Q_i$ representa el $i$-$esimo$ tratamiento corregido dado por $Q_i = Y_{i.} - \frac{1}{k}\sum_1^b n_{ij} Y_{.j}$ para $i = 1, \ldots, a$ y $\lambda$ es el número de veces que cada par de tratamientos ocurre en el mismo bloque y que es dado por $\lambda = \frac{r(k-1)}{a-1}$. Por lo que el análisis de varianza para este modelo se presenta en la tabla 1:

**Tabla 1: Análisis de Varianza General para los BIBD**

| Fuente de Variación | Suma de Cuadrados (SS) | Grados de Libertad (df) |
|---|---|---|
| Media | $G^2 / bk$ | 1 |
| Bloques | $B^t B / k - G^2 / bk$ | $b-1$ |
| Tratamientos | $Q^t \hat{t}_0$ | $t-1$ |
| Error | $y^t y - Q^t \hat{t}_0 - B^t B / k$ | $bk - b - t + 1$ |
| Total | $y^t y$ | $bk$ |

## 3. SEUDO-INVERSA

Considere el sistema lineal $Ax = y$, donde $x$ y $y$ son vectores columna de $n$ y $m$ elementos respectivamente y $A$, es una matriz de $(m\,x\,n)$. Cuando $(m = n)$ y el determinante es desigual de cero $det[A] \neq 0$, el sistema de ecuaciones tiene una solución dada por, $x = A^{-1}y$, donde $A^{-1}$, es la inversa de $A$ tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. El problema analizado en este articulo, es para el caso general en el que $A$, sea una matriz rectangular o una matriz cuadrada singular. Este problema, aparece en la estimación de Mínimos Cuadrados (OLS) (por sus siglas en ingles ordinary least square) cuando la matriz de covarianzas es singular. Para este problema, Hill (1997), introduce el concepto de inversa generalizada, principalmente haciendo uso del concepto de descomposición en valores singulares el cual es una herramienta poderosa para determinar la seudoinversa que nos permite solucionar el sistema de ecuaciones cuando la matriz de covarianzas es singular.

### 3.1 Descomposición del Valor Singular

Desde que cualquier matriz $A$ de $(m\,x\,n)$ puede ser factorizada en $A = V \sum U^t$, donde $A$ es la matriz de información, $V$ son los eigenvectores de la matriz de covarianzas $C^tC$, $U$ son los eigenvectores de $CC^t$ y

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k \end{pmatrix}$$ es una matriz

diagonal con elementos diagonales dado por los valores singulares no negativos de $C^tC$. Del mismo modo, si $C$ es una matriz cuadrada y $\Sigma$ es una matriz invertible (es decir $k = n$ y todos los $\sigma_i > 0$), entonces $C^{-1} = V \sum^{-1} U^t$ donde $V$

y $U$ son matrices ortogonales. Por otro lado, suponga que $\Sigma^{-1}$ no existe debido a que al menos uno de los $\sigma_i = 0$ para $i = 1,...,k$, por lo que podemos particionar e invertir $\Sigma$ para obtener

$$\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

donde $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal con elementos diagonales dado por los valores singulares positivos. De esta forma, la seudo inversa obtenida, está dada por:

$$C^{+} = V \Sigma^{+} U^{t} \tag{11}$$

Al multiplicar (11) por la derecha por $U$ y por la izquierda por $C$, obtenemos:

$$U = CV \Sigma^{+} \tag{12}$$

Lo cual nos permite utilizarla en (11) y obtener la seudoinversa de *C*.

## 4. ENFOQUE MATRICIAL

Para el análisis de los BIBD a través de este enfoque, permítanos suponer que la tabla 2 representa un diseño aleatorio de bloques balanceado incompleto (BIBD).

**Tabla 2:** Diseño Balanceado de Bloques Incompletos

| Tratamientos | Bloques | | | | | **T** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | … | $B_b$ | $Y_{i.}$ |
| $Q_1$ | | $Y_{12}$ | $Y_{13}$ | … | $Y_{1b}$ | $Y_{1.}$ |
| $Q_2$ | $Y_{21}$ | $Y_{22}$ | | … | $Y_{2b}$ | $Y_{2.}$ |
| $Q_3$ | $Y_{31}$ | | $Y_{33}$ | … | $Y_{3b}$ | $Y_{3.}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Q_a$ | $Y_{a1}$ | $Y_{a2}$ | $Y_{a3}$ | | $Y_{ab}$ | $Y_{a.}$ |
| $Y_{.j}$ | $Y_{.1}$ | $Y_{.2}$ | $Y_{.3}$ | … | $Y_{.b}$ | $Y_{..}$ |

Para determinar de este diseño los efectos que los tratamientos y bloques tienen sobre la variable de respuesta, en esta sección desarrollamos uno a uno los pasos necesarios para su aplicación. Los pasos son:

**Paso 1.-** De los datos de la tabla 2, determine el vector de tratamientos $T$, el vector de bloques $B$, el número $r$ de veces que los tratamientos están presentes en el diseño y el número $k$ de tratamientos que son probados en cada bloque, los cuales para los datos de la tabla 2 son:

$$T = \begin{bmatrix} Y_{1.} \\ Y_{2.} \\ Y_{3.} \\ \vdots \\ Y_{a.} \end{bmatrix}, \quad B^{t} = \begin{bmatrix} Y_{.1} \\ Y_{.2} \\ Y_{.3} \\ \vdots \\ Y_{.n} \end{bmatrix}^{t}, \quad r = (b-1) \ \text{ y}$$

$$k = (a-1)$$

**Paso 2.-** De la tabla 2, obtenga la matriz de incidencias $n$ la cual para este caso es:

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Paso 3.-** Obtenga el vector de tratamientos ajustados definido en (2) que para este método esta dado como $Q = T - nk^{-\delta} B$ donde $\delta$ (Deltha de Kroneker), es definida por $\begin{cases} 0,...si....i \neq j \\ 1,...si.....i = j \end{cases}$.

**Paso 4.-** Obtenga la matriz de información $C$ como se definió en (5).

$$C = r^{\delta} - nk^{-\delta} n^{t}$$

**Paso 5.-** Obtenga la seudoinversa como se definió en (10) si $C$ es una matriz singular o su inversa si $C$ no es singular. Para propósitos de este artículo, permítanos asumir que $C$ es una matriz singular de modo que a través de (10) obtenemos la seudoinversa dada por $C^{+} = V \Sigma^{+} U^{t}$ a través de:

**a)** Obtener la matriz simétrica $C^{t}C$, sus eigenvalores $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ y sus eigenvectores $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$.

**b)** Determine los valores singulares de $C^{t}C$ dados por $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ y representados por $\Sigma^{+} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ para toda $\sigma_i > 0$.

**c)** Determine $U = \Sigma^{+} CV$ .

**d)** Obtenga la seudoinversa a través de la ecuación (11).

**Paso 6.-** Obtenga el vector de efectos de los tratamientos $\hat{\tau}$ como se definió en la ecuación (1).

**Paso 7.-** Obtenga la suma total de cuadrados $SS_{Tot}$ como se definió en (6).

**Paso 8.-** Obtenga la suma de cuadrados de los tratamientos $SS_{Treat}$ como se definió en (7).

**Paso 9.-** Obtenga la suma de cuadrados de los bloques $SS_{Block}$ como se definió en la ecuación (8).

**Paso 10.-** Obtenga la suma de cuadrados del error $SS_{Res}$ como se definió en (9).

**Paso 11.-**Realice el análisis de varianza como se muestra en la tabla 3:

**Tabla 3:Análisis de Varianza par los BIBD bajo el Enfoque Matricial**

| Fuente | Suma de Cuad(SS) | Grados de Libertad (df) |
|---|---|---|
| Bloques | $B^tB/k-G^2/bk$ | $b-1$ |
| Tratamientos | $Q^t\hat{t}_0$ | $t-1$ |
| Error | $y^ty-Q^t\hat{t}_0-B^tB/k$ | $bk-b-t+1$ |
| Total | $y^ty-G^2/bk$ | $bk-1$ |

**Paso 12.-**Concluya acerca de la hipótesis establecida.

## 5. APLICACIÓN DEL ENFOQUE MATRICIAL

Para la demostración del enfoque matricial, utilizamos un Diseño Balanceado por Bloques Incompletos (BIBD), originalmente publicado por Montgomery 2004 (Pág. 164), en el cual la variable de respuesta fue el desempeño de cinco tipos de aditivos para gasolina y los bloques fueron cinco carros. Los datos son analizados con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$. Los datos se presentan en la tabla 4.

**Tabla 4:**Datos del Desempeño de la Gasolina

| | Automovil | | | | | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aditivo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $Y_{i.}$ |
| 1 | | 17 | 14 | 13 | 12 | 56 |
| 2 | 14 | 14 | | 13 | 10 | 51 |
| 3 | 12 | | 13 | 12 | 9 | 46 |
| 4 | 13 | 11 | 11 | 12 | | 47 |
| 5 | 11 | 12 | 10 | | 8 | 41 |
| **B** | 50 | 54 | 48 | 50 | 39 | |

### 5.1 Construcción de la tabla de Análisis de Varianza

**Paso 1.-** De la tabla 4 obtenemos.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 56 \\ 51 \\ 46 \\ 47 \\ 41 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 50 \\ 54 \\ 48 \\ 50 \\ 39 \end{bmatrix}^t \quad \mathbf{r} = (5-1) = 4, \ \mathbf{k} = (5-1) = 4.$$

**Paso 2.-** La matriz de incidencias es.

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Paso 3.-** El vector de tratamientos es.

$$Q = \begin{pmatrix} 56 \\ 51 \\ 46 \\ 47 \\ 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 54 \\ 48 \\ 50 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{33/4} \\ \mathbf{11/4} \\ \mathbf{-3/4} \\ \mathbf{-7/2} \\ \mathbf{-27/4} \end{pmatrix}$$

**Paso 4.-** La matriz de información $C$ es.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3/4 & -3/4 & -3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 3 & -3/4 & -3/4 & -3/4 \\ -3/4 & -3/4 & 3 & -3/4 & -3/4 \\ -3/4 & -3/4 & -3/4 & 3 & -3/4 \\ -3/4 & -3/4 & -3/4 & -3/4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Paso 5.-** Aplicando el proceso descrito en el paso 5 de la sección 4, la seudoinversa es.

$$C^{+} = \begin{pmatrix} 0.2132 & -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 \\ -0.0533 & 0.2132 & -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 \\ -0.0533 & -0.0533 & 0.2132 & -0.0533 & -0.0533 \\ -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 & 0.2132 & -0.0533 \\ -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 & -0.0533 & 0.2132 \end{pmatrix}$$

**Paso 6.-** El vector de efectos de los tratamientos es.

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} 16/75 & -4/75 & -4/75 & -4/75 & -4/75 \\ -4/75 & 16/75 & -4/75 & -4/75 & -4/75 \\ -4/75 & -4/75 & 16/75 & -4/75 & -4/75 \\ -4/75 & -4/75 & -4/75 & 16/75 & -4/75 \\ -4/75 & -4/75 & -4/75 & -4/75 & 16/75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33/4 \\ 11/4 \\ -3/4 \\ -7/2 \\ -27/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 11/5 \\ -1/5 \\ -14/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

**Paso 7.-** La suma total de cuadrados es.

$$SS_T = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 13 & 12 & 14 & 14 & 13 & 10 & 12 & 13 & 12 & 9 & 13 & 11 & 11 & 12 & 11 & 12 & 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 14 \\ 13 \\ 12 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 12 \\ 9 \\ 13 \\ 11 \\ 11 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{(241)^2}{20} = 76.95$$

**Paso 8.-** La suma de cuadrados de los tratamientos es.

$$SS_{TRATAMIENTOS} = \begin{pmatrix} 33/4 & 11/4 & -3/4 & -7/2 & -27/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/5 \\ 11/15 \\ -1/5 \\ -14/15 \\ -9/5 \end{pmatrix} = 35.73$$

**Paso 9.-** La suma de cuadrados de los bloques es.

$$SS_{BLOQUES} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 50 & 54 & 48 & 50 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 54 \\ 48 \\ 50 \\ 39 \end{pmatrix} - \frac{(241)^2}{20} = 31.20$$

**Paso 10.-** La suma de cuadrados del residual es. *re*

$$SS_{RESIDUAL} = 79.95 - 35.73 - 31.20 = 10.02$$

**Paso 11.-**El análisis de varianza se presenta en la tabla 5.

**Tabla 5:** Análisis de Varianza para el BIBD con un Enfoque Matricial

| Fuente | Sum de Cuadrados (SS) | Grados de Lib. (df) | Cuad. Medios CM | F |
|---|---|---|---|---|
| Tratamientos | 35.73 | 4 | 8.93 | 9.81* |
| Bloques | 31.20 | 4 | 7.80 | 8.57* |
| Residual | 10.02 | 11 | 0.91 | |
| Total | 79.95 | 19 | | |

*Significante a $\alpha = 0.05$

**Paso 12.-**Conclusión acerca de la Hipótesis.

Para un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, el valor critico de la distribución F esta dado por $F_{0.05,\ 4,\ 11} = 3.36$, por lo que se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ y se concluye que si existe diferencia entre las medias de los tratamientos. Dado que el análisis hasta aquí realizado, no refleja exactamente cual tratamiento presenta esta diferencia, nosotros recomendamos al lector realizar la prueba de rangos múltiples de Duncan entre otros métodos para determinar la diferencia entre tratamientos.

## 6. CONCLUSIONES

El enfoque matricial para la solución de problemas en los que intervienen varias variables, es eficiente desde el punto de vista computacional y particularmente, el enfoque presentado en este articulo, permite a través de la inversa generalizada de Moore Penrouse, determinar una polución factible para un sistema de ecuaciones lineales, cuando como en este caso, el sistema presenta una matriz singular. La inversa generalizada, nos permite construir la tabla de análisis de varianza para determinar a través de ella la significancia de los factores y la falta de ajuste del modelo.

## BIBLIOGRAFIA:


Bose R. C. 1939. On the Construction of Balanced Incomplete Block Design. Annals of Eugenics bf 9 pp 353-399.

Cochran W. G. and G. M. Cox. 1957. Experimental Design. 2a ed. Wiley, New York.

Davies O. L. 1956. Design and Analysis of Industrial Experiments. 2a ed. Hafner Publishing Company New York.

Fisher R. A. and F. Yates. 1953. Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. 4a ed. Oliver and Boyd, Edimburgo.

Hill R. O. Jr. 1997. Álgebra Lineal con Aplicaciones, tercera edición. Prentice Hll Iberoamericana S. A.

Montgomery D. C. 1991. Diseño y Análisis de Experimentos, Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Montgomery D.C. 2004. Diseño y Análisis de Experimentos. Editorial Limusa S.A. de C.V. México, D.F.

Preece D. A. 1967. Nested Balanced Incomplete blocks designs. Biometrica No54 Vol 3 and 4, pp479-486.

Raghavarao D. 1971. Construction and Combinatorial Problem in Design of Experiments. Dover publications Inc. New York, pp 65-76.

Rodríguez M. A. 2003. Enfoque Matricial para la Construcción y el Análisis de Varianza de Diseños de Bloques Incompletos Balanceados y con Renglones y Columnas Anidados. (Tesis Doctoral) ITCJ, Chihuahua México. (No publicada).

Singh M. and A. Dey. 1979. Block Design with Nested Rows and Columns. Biometrika No. 66. Vol. 2, pp 321- 326.