CONCEITO DE DIREÇÃO: O QUE DIZEM MESTRANDOS A RESPEITO?

AUTORES: José Carlos Pinto Leivas[1]

Vanilde Bisognin[2]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: Rua Ernesto Witrock, 141 ap. 202-B. Centro – Canoas – RS – Brasil. E-mail: leivasjc@unifra.br

Fecha de recepción: 15 - 03 - 2013 Fecha de aceptación: 06 - 08 - 2013

RESUMO

Este artigo aborda uma pesquisa qualitativa realizada com sete alunos de um Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática com o objetivo de investigar qual o conhecimento deles a respeito do conceito de direção. A investigação foi feita ao iniciar a disciplina em que um dos investigadores é o titular e aborda conteúdos de álgebra linear e geometria analítica. Foi proposto um questionário com três questões abertas, sem alternativas de respostas, a fim de que os investigados respondessem livremente. A análise dos resultados mostrou que os alunos relacionam o conceito, basicamente, a vetores e o confundem com o de sentido, não destacando aspectos geométricos envolvidos. Nenhum dos investigados relacionou o conceito de direção como o algo existente em comum a um feixe de retas paralelas, tangente a uma curva ou plano tangente a uma superfície. O artigo sugere algumas possibilidades de emprego do conceito relacionado a alguns tópicos matemáticos envolvendo geometria.

PALAVRAS-CHAVE: direção; feixe de paralelas; direção de curvas e de superfícies; campo de direções

CONCEPT OF DIRECTION: WHAT DO STUDENTS OF A MASTER'S DEGREE SAY?

ABSTRACT

This paper approaches a qualitative study with seven students of a master's degree. The aim was to investigate how knowledge theirs about the concept of direction in mathematics. The investigation occurred when started the discipline where one of the researchers is the holder. On this discipline we study Linear Algebra and Analytic Geometry. We proposed three open questions without answer choices for the students answer freely. The results showed that students relate the concept basically to vectors and they confuse with sense

[1] Doutor em Educação Matemática e professor do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA - Brasil

2 Doutora em Matemática e professora do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA – Brasil. E-mail: vanilde@unifra.br

and they don't emphasizing geometric aspects involved. None of the students related the concept of direction as something existing in a common bundle of parallel lines, or tangent to a curve or tangent plane to a surface. The article suggests some possibilities for relate direction with others topics in geometry.

KEYWORDS: direction; bundle of parallel lines; direction of curves and surfaces; field of directions

INTRODUÇÃO

Historicamente o conceito de integral advém dos tempos da Antiguidade enquanto que o da derivada é formulado a partir do século XVII, segundo Courant e Robbins (2000). Para os autores, um dos interesses de Fermat estava na obtenção de pontos de máximo e de mínimo do gráfico de funções e, para tal, a noção de tangente à curva e respectiva variação era um aspecto geométrico relevante para a obtenção do conceito de derivada a ser formulado algebricamente. De acordo com o que ocorresse com a variação da direção dessas tangentes à curva, um ponto seria caracterizado como ponto de máximo ou de mínimo. Para a obtenção dessa direção, o conceito de inclinação, o qual é associado a um ângulo, também desempenha papel de destaque.

O conceito clássico de derivada foi formalizado, do ponto de vista matemático, por Leiniz(1646-1716) e Newton(1643-1727) estimulados por diferentes motivações. Newton tinha em mente sua aplicação à Física enquanto Leibniz, por necessidade de introduzir na Matemática um novo conceito que se fazia necessário, porque se encontrava latente o cálculo de tangentes a certas curvas planas.

Segundo Boyer(1996), o traçado de tangentes às cônicas era conhecido desde Apolonius 200 a.c. Entretanto, Fermat(1601-1655) e Descartes(1596-1650), introduziram o método algébrico para o estudo de propriedades geométricas das curvas, criando a Geometria Analítica. Desse modo, tendo em mente o traçado de tangentes às curvas, Leibniz definiu um novo conceito matemático denominado *derivada*.

Para Eves (2004), Papus deu breves indicações sobre conteúdos de seis trabalhos de Apolônio, dentre os quais *Inclinações* com 125 proposições. "O problema geral em *Inclinação* era inserir um segmento de reta entre dois lugares dados, de tal maneira que a reta do segmento passasse por um ponto dado" (p. 201) Percebe-se na citação a atenção, já envolvida nos estudos de Papus, ao tratamento em Geometria do tema direção.

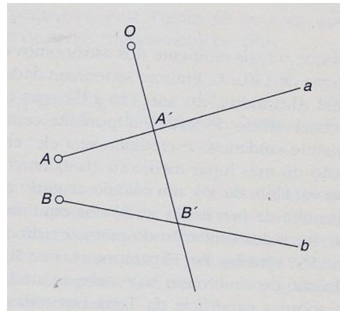

Figura 1: O problema geral de Inclinação. Fonte: Eves, 2004, p. 201.

Por sua vez, como veremos na pesquisa realizada, o tratamento atual do assunto direção deixa a desejar, além do nosso conhecimento empírico de que estudantes, a partir do ensino médio, fazem confusão entre os conceitos de direção e de sentido. Possivelmente, tal conflito cognitivo prende-se ao fato de não haver uma definição precisa a respeito do primeiro, ao longo dos currículos escolares e mesmo universitário, sendo que ele surge na definição de um vetor, como um ente geométrico possuindo módulo, direção e sentido. Isto, geralmente é feito ao iniciar os estudos de Trigonometria em Matemática e também na disciplina de Física. Por outro lado, o conceito de direção não é retomado em Geometria Analítica e também em Cálculo, como se fosse algo já internalizado pelo estudante.

O presente artigo tem por primeiro objetivo apresentar resultados de uma pesquisa realizada com sete estudantes de um Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática, antes de iniciar a disciplina de Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica, a respeito da compreensão dos estudantes sobre o conceito de direção. Como segundo objetivo, discorrer sobre este conceito e estabelecer conexões do mesmo em diversos campos do conhecimento matemático, especificamente, em aspectos relacionados à geometria envolvida.

Para tal discutiremos e interpretaremos o termo direção em vários espaços ambientes termo que tem significado dado por Leivas (2009): "espaço ambiente é o espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas" (p.161). O leitor encontrará neste artigo o significado de direção de reta, de curva e de superfície, associando-o à feixe de paralelas, reta tangente à curva e plano tangente à superfície, respectivamente.

Ao explorarmos a geometria envolvida em disciplinas como Álgebra Linear, Cálculo Diferencial de uma e várias variáveis, por exemplo, estamos utilizando-a como saber matemático constituído, ou seja, o saber geométrico. Villani (2001) caracteriza isso como método pedagógico e, o ato de empregá-la na construção deste saber, Leivas (2009) define: "Geometrização é um processo de utilizar abordagens geométricas como um método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, portanto, Geometria é um ponto de vista que conduz à geometrização." (p.123)

Como citado antes, ao tratar um dos problemas de Apolônio sobre Inclinações, cujo enunciado é o seguinte: "Dada uma circunferência, inserir nela uma corda de comprimento dado e apontando para um ponto dado" (Eves, 2004, p. 219), Papus nos coloca possibilidade de tomada de consciência sobre "o apontar para" o qual, em nosso entender, carrega a ideia de direção. O mesmo autor cita ainda que Apolônio abordou um problema ainda mais difícil do que o anterior, mas com a mesma conotação de direção, a saber, "Dado um losango com um lado prolongado, inserir um segmento de reta dado no ângulo exterior de modo que ele aponte para o vértice oposto" (Idem, p. 219), havendo várias soluções para tal problema, segundo o autor.

Assim, o problema de direção, histórica e geometricamente, é tratado desde os tempos de Apolônio, o qual viveu no período de 262 a 190 a.C. e, portanto, é anterior ao estilo analítico de Descartes (1596-1650). Entendemos que os pressupostos aqui introduzidos justificam o presente artigo.

DIREÇÃO

Na geometria de Euclides a régua e o compasso desempenhavam papel preponderante e as construções e demonstrações geométricas eram seus pontos fortes, daí a denominada geometria sintética. Como a régua servia para traçar retas e segmentos e, o compasso para transportar medidas, a noção de grandeza atendia às necessidades imediatas. Consideremos ainda o fato que, à época, não se cogitava a existência de números que não fossem os racionais, relacionados com grandezas comensuráveis, muito embora os gregos percebessem a existência de grandezas incomensuráveis, por exemplo, o número $\sqrt{2}$ como traduzindo a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. Os gregos, da escola pitagórica, sempre faziam a associação entre sistemas numéricos com pontos da reta e, assim, perceberam que a reta não mantinha uma relação de continuidade com os números racionais. Este problema histórico, ou seja, da continuidade da reta, só foi resolvido no século XX, por Dedekind.

No momento em que os sistemas numéricos se desenvolveram, inclusive com o advento dos números negativos, novas possibilidades de tratar objetos geométricos também foram surgindo. Assim, a noção de sentido pode ser associada à de grandeza para mensurar segmentos, por exemplo. De acordo com Eves (1969), foi no século dezessete que surgiu a ideia de tratar as grandezas com sentido, principalmente no tratamento da geometria de posição por Carnot e, por Möebius em seu *Der barycentriche Calcul*. Este fato histórico aqui abordado serve para nossa compreensão da ligação entre os dois conceitos, muito embora daqui para frente iremos nos fixar no tratamento do conceito de direção e em sua utilização em alguns conteúdos matemáticos.

Schubring (2007), ao discorrer sobre a história dos números negativos - um problema conceitual – indica que a mesma não teve uma continuidade no seu desenvolvimento; apresentou desvios, regressos, obstáculos e diversidade conceitual oriunda de comunidades diferentes. Para ele, começou-se a tomar consciência das contradições nos fundamentos da Matemática durante o século XVIII, mas não se conseguiu uma solução conceitual. Essas contradições foram acentuadas, particularmente, no caso dos números negativos “sendo eles casos especiais de grandezas: números inteiros com uma ‘qualidade’, neste caso: uma direção” (p. 3). O autor vai além ao afirmar que: “Hoffmann, em suas observações, admitiu que um multiplicador negativo não fica legitimado pela definição da multiplicação, mas tentou atribuir um sentido pela noção de “oposição” de qualidades, como direção em geometria e bens versus débitos para grandezas na álgebra” (p. 8-9). [...] “Hoffmann recusou apropriar-se da abordagem algebrizante moderna e continuou a manter a justificação anterior baseada em noções geométricas, i.e., em “qualidades”, na “direção”[...] (p. 14)

Assim, o autor discute uma forma de utilizar o conceito de direção como possibilidade de efetuar multiplicação de números inteiros positivos e negativos, muito além daquela originalmente feita para números naturais na multiplicação como sendo uma repetição de parcelas iguais, o que não se coaduna para a multiplicação de números negativos.

No Cálculo Diferencial a derivada de uma função em um ponto pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva naquele ponto. Consideremos a função y=f(x) com x∈R. Chama-se derivada da função f no ponto A(xo,yo) o limite da razão $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, quando x→xo, ou ainda $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, onde $\Delta y = f(x)-f(x_o)$, $\Delta x = x - x_o$ e C(x,y) é um ponto qualquer sobre a curva. Neste processo de limite, ou seja, na medida em que x se aproxima de x_0, a reta secante [passando por A e C] tende a se aproximar da reta tangente à curva f no ponto A (figura 2).

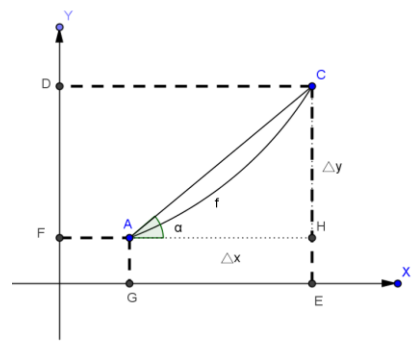

Figura 2: Representação geométrica da derivada.

Por sua vez, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nada mais é do que a tangente trigonométrica do ângulo α que a reta secante forma com a horizontal. No limite, quando Δx → 0, a inclinação da reta secante passa a se aproximar da inclinação da reta tangente.

Fazendo x variar e se a função f for derivável tem-se a função derivada em um ponto (x,y) qualquer da curva dada pela equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$.

Dada uma equação diferencial (1) e se a função f for derivável em todos os pontos de seu domínio então ela é integrável e, ao integrá-la, temos uma nova função ou curva, cuja inclinação da reta tangente em cada ponto é o valor da equação diferencial no respectivo ponto. Dessa forma, a equação (1) produz as inclinações das retas tangentes dessa curva obtida pela integral a qual se denomina curva integral. Com isto, é possível descrever geometricamente as curvas integrais de (1) no plano cartesiano XOY, pela obtenção das inclinações das retas tangentes substituindo nesta os valores correspondentes à abscissa de cada ponto (x,y) e representando tais retas numa pequena vizinhança deste. Desta forma se obtém uma figura denominada de campo de direções ou campo de inclinações, as quais indicam a direção da curva integral segundo autores como Anton (2000) e Stewart (2002) e, de acordo com o número de pontos representados, pode-se obter as próprias curvas integrais. Na figura 3 são indicados o campo de direção sem e com as curvas integrais para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x) = x^2$.

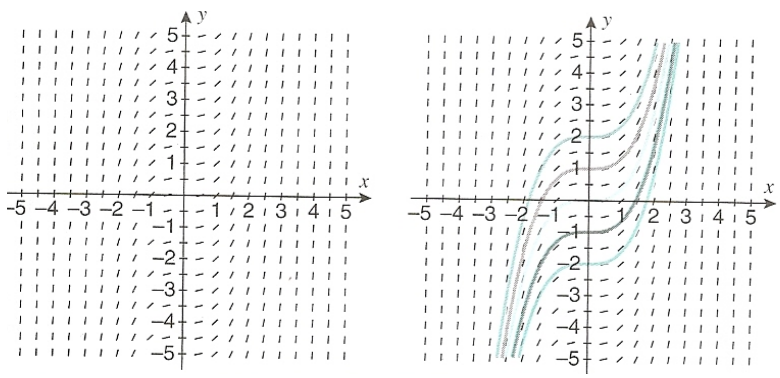

Figura 3: Campos de direções ou de inclinações. Fonte: Anton (2000, p. 389).

Mas afinal, o que vem a ser direção? Em geral, o conceito é utilizado intuitivamente, sem definições. Entretanto, acreditamos que, a partir do advento da Geometria Diferencial, muitos problemas geométricos, envolvendo propriedades de curvas e superfícies, puderam ser tratados utilizando Cálculo Infinitesimal, incluindo curvas e superfícies. Dessa forma, propriedades locais, isto é, propriedades válidas em vizinhanças relativamente pequenas de um ponto desses espaços ou lugares geométricos fazem parte deste campo da Geometria. Por outro lado, se tais propriedades podem ser estudadas e analisadas em vizinhanças maiores ou em todo o campo de definição, então se tem a Geometria Integral ou Geometria Global e nelas o uso do conceito é frequente.

Na definição 22 do livro I de Euclides encontramos “Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram” (Bicudo, 2009, p. 98). As proposições 27, 28 e 29 tratam de paralelismo, dentre outras, bem como a 30: “As paralelas à mesma reta são paralelas entre si” (Idem, p. 121). Nas construções euclidianas o paralelismo é empregado frequentemente. Assim, partimos deste conceito para a seguinte definição*: direção de uma reta no plano ou no espaço é o algo em comum existente entre uma coleção de retas paralelas.*

O estilo analítico vem, posteriormente a Euclides, caracterizar ângulo de inclinação e coeficiente angular, por exemplo, associados ao conceito de direção. A figura 4 ilustra a direção de uma reta r, a qual é dada pelo conjunto $\{r_1, r_2, r_3\}$ de retas paralelas, enquanto que a figura 5 ilustra a direção da reta s dada pelo conjunto ou feixe $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$. Pela proposição 30 do livro I de Euclides, enunciada antes, o número de retas do feixe não é relevante para a definição de direção.

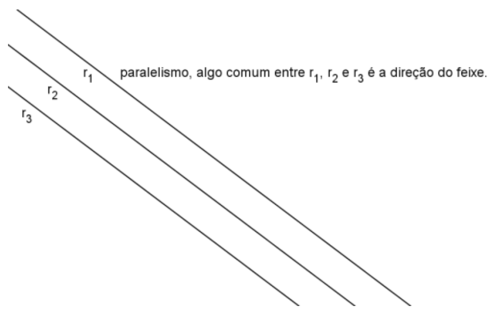

Figura 4: Direção de r.

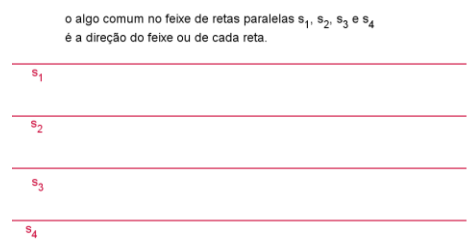

Figura 5: Direção de s.

Se o objeto não for uma reta, for uma curva plana ou espacial, o conceito de direção é o mesmo dado para reta? Consideremos um ponto P qualquer da curva e uma pequena vizinhança dele na qual a curva não apresenta autointersecção, isto é, não se corta e não tem singularidades, ou seja, admite derivada. Toda reta que passa pelo ponto P e por outro ponto qualquer Q da vizinhança é denominada reta secante à curva e sua posição limite, quando Q tende a P, é chamada reta tangente à curva. Segundo Eves (1969)*, “de todas as retas que passam por P esta tangente constitui a melhor aproximação ao curso ou rumo da curva nesse ponto; de acordo com isto, a direção da tangente em P se chama direção da curva em P” (*p.262. trad. e grifo dos autores).

A figura 6, a seguir, ilustra a direção da reta tangente t à curva no ponto P. Assim, o problema de obter a direção de uma curva num ponto se reduz a obter a direção da reta tangente à curva naquele ponto.

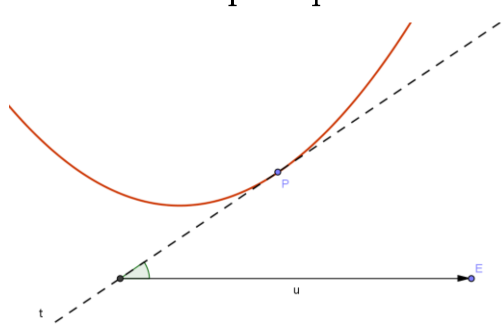

Figura 6: Direção de uma curva no ponto P.

Por sua vez, esta direção vem acompanhada do ângulo que tal reta forma com uma direção pré-estabelecida, no caso da figura 6, a direção do eixo E ou vetor u.

Consideremos agora o espaço geométrico como sendo uma superfície no espaço. O Cálculo Diferencial de várias variáveis utiliza a derivada direcional ao tratar com derivadas parciais. Dada uma função f, nas variáveis x e y, por exemplo, a derivada parcial da função f em relação a x é interpretada como a derivada ordinária da função f na variável x, fazendo y=k constante. Tem-se sobre a superfície z=f(x,y) uma curva c=f(u,k) e, portanto, recaímos na situação anterior. Assim, teremos uma direção da curva c dada pela sua tangente num ponto P(x,k) da superfície e, de forma similar, considerando a outra curva, ou seja, tomando x constante e fazendo variar y. Segue que há pelo menos duas tangentes num certo ponto P da superfície, desde que a função f admita derivadas numa vizinhança do ponto, a exemplo do que ocorreu no caso de curvas planas, o que leva a intuir que a superfície não se corta e não tem cúspides[3].

De um modo geral, dado um ponto P de uma superfície M, atendendo às condições citadas, pode-se perceber, intuitivamente, que todas suas curvas passando por P têm tangentes contidas num plano no espaço que contem P. Este plano é denominado plano tangente à M em P e o vetor ortogonal a ele é denominado vetor normal do plano ou da superfície no ponto P. Para Fischbein (1987) e para Leivas (2009), intuição pode ser pensada como um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto.

A existência de um plano tangente e de um vetor ortogonal a ele leva à definição de *direção da superfície num ponto como sendo a direção de seu plano tangente naquele ponto,* o que significa que ela não é constante, da mesma forma que para curvas, ao contrário da reta que tem direção fixa em todos os seus pontos. Obviamente, existirá a direção de uma superfície num ponto se existir e forem distintas as direções das curvas da superfície naquele ponto. O estilo vetorial introduzido no desenvolvimento da Geometria permite que se fale em direções linearmente independentes na definição do plano tangente e, consequentemente, na direção da superfície.

A figura 7, a seguir, ilustra uma superfície esférica M, com seu plano tangente TPM, uma vez que a mesma admite tal plano em quaisquer de seus pontos. A reta ortogonal ao plano é orientada pelo vetor N. Não é difícil perceber que essa reta ortogonal ao plano tangente no ponto P, passa pelo centro da esfera, definindo de forma clara a direção da superfície.

[3] Pontos em que não existem derivadas.

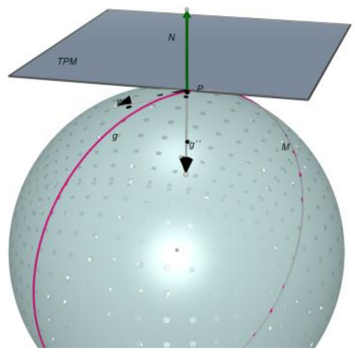

Figura 7: Direção da superfície M no ponto P.

Discutimos até aqui alguns pressupostos históricos e teóricos sobre direção, formalizando seu conceito a partir de retas no plano ou no espaço e expandindo para direção de curvas e de superfícies. No que segue trataremos da pesquisa realizada.

A PESQUISA

Para Janesick (1994), "Projetos de pesquisa qualitativa começam com uma pergunta. De fato, os pesquisadores qualitativos projetam um estudo com indivíduos reais em mente, e com a intenção de viver nesse ambiente social ao longo do tempo" (p. 210, trad. livre dos autores). De modo geral, perguntas que são adequadas para uma investigação qualitativa, segundo a autora, têm sido aquelas de pesquisadores envolvidos em muitos currículos, assim como por teóricos. Dentre as que podem despertar para a pesquisa qualitativa e que são objetos de pesquisas daqueles que investigam currículo, estão as relacionadas a questões sobre a qualidade de um dado currículo, inovações ou programas; questões relacionadas a significado e interpretação de algumas componentes deste e questões envolvendo currículo oculto, segundo a mesma autora.

Em nossa prática profissional temos levantado algumas questões relacionadas ao currículo da formação de professores, quer inicial ou continuada. Assim, o presente artigo aborda uma pesquisa qualitativa, uma vez que levantamos uma pergunta que dá origem ao artigo, a qual vem nos inquietando há algum tempo ao ministrarmos disciplinas na Licenciatura em Matemática e, atualmente, no Mestrado: *o que é direção?* A partir da questão de pesquisa elaboramos o seguinte objetivo*: investigar qual o conhecimento que alunos de uma disciplina de mestrado, todos licenciados em Matemática e em exercício profissional, têm a respeito do conceito de direção* com a finalidade de desencadear a disciplina de Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Acreditamos que, ao analisar o que dizem mestrandos, poderemos interpretar, de certa forma, a qualidade dos currículos da Licenciatura em Matemática bem como sugerirmos inovações aos programas atuais. Continua a se persistir em distribuir os programas numa grade curricular sem conexões, como no caso do tema da pesquisa, direção, que tem ligação em várias áreas do conhecimento, como indicada nos pressupostos teóricos já destacados no item anterior do artigo. Esses permitem dar vários significados a um mesmo conceito, dentro de determinados contextos, mas inter-relacionados.

Um dos focos temáticos identificado junto à Associação Nacional de Pesquisa em Educação, no Grupo de Trabalho de Educação Matemática foi "estudos sobre o ensino de matemática na universidade (6 trabalhos – 12,5%)" (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p. 35). Isso justifica nossa questão de pesquisa. Já para Kilpatrick (1994, apud Fiorentini e Lorenzato, 2006), "prática docente, crença, concepções e saberes práticos; conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor" (p. 42) são duas tendências mundiais em educação matemática durante a década de 90, mas que permanecem atuais em nossa opinião.

Em pesquisas qualitativas o pesquisador faz uso de análise indutiva as quais podem ser por categorias, temas e padrões, obtidos a partir da coleta de dados em instrumentos cuidadosamente elaborados pelo mesmo ou seus auxiliares. Utilizamos como método para a coleta de dados o questionário escrito de associação livre e com questões abertas a fim de não inibir ou induzir respostas dos sujeitos da pesquisa, bem como oportunizar informações que possam não ter sido pensados pelo pesquisador. Por se tratar de uma pesquisa em que os dados são colhidos diretamente no campo de atuação do pesquisador, ou seja, em sua própria sala de aula, podemos considerar a modalidade da coleta de dados como naturalista, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006).

Aplicamos o questionário, elaborado com questões abertas, sem alternativas de respostas, pois, para Maia (2009), ele é importante instrumento de registro "Por oferecer respostas predeterminadas em número limitado de escolhas, este instrumento é considerado, por um lado, mais objetivo do que a entrevista e, por outro, suscetível de ser respondido, como a associação livre, por um número maior de sujeitos" (p. 28). Assim pensamos para poder obter uma diversidade maior de respostas, sem induzir os sujeitos, pois tínhamos a hipótese de que o termo somente é associado ao estudo de vetores sem outras conexões, como com curvas, superfícies e até mesmo a curvas integrais como ilustrado anteriormente.

A pesquisa foi realizada com sete alunos de um mestrado profissionalizante no Brasil, na primeira aula da última disciplina do quadro curricular, sendo ela optativa e versando sobre Álgebra Linear e Geometria Analítica. Um dos pesquisadores, professor da disciplina, já havia ministrado outra disciplina, Geometria, no semestre anterior, tendo algum conhecimento prévio dos indivíduos e sua formação inicial e continuada, inclusive com um conhecimento empírico sobre a formação dos mesmos. Todos eles são licenciados em Matemática em instituições públicas e privadas e estão em exercício no magistério.

No cabeçalho do questionário solicitamos que fosse registrado o nome do respondente e o ano de conclusão. Além disso, pedimos que marcassem o nível de atuação: ( ) Fundamental; ( ) Médio; ( ) Superior e ( ) Curso Técnico.

Do que foi levantado neste cabeçalho, temos os seguintes dados. Um aluno atua somente no Ensino Fundamental e concluiu o curso de Licenciatura em 1988; um no Ensino Superior, com conclusão em 2010; três atuam no Fundamental e Médio e concluíram em 2010; uma aluna atua no Fundamental e Técnico, formada em 2005 e uma última formada em 2009 atua no Médio e Técnico. Consideramos ainda o fato de haver alunos de três estados brasileiros envolvidos o que, de certa forma, fornece dados não somente locais. Podemos perceber que, a exceção de um deles, todos concluíram seus cursos a menos de dez anos.

A informação para responder foi feita oralmente e escrito o seguinte: *a palavra "direção" tem amplo uso nas diversas linguagens: natural e científica.* Neste sentido seguiram-se três perguntas com um espaço para respostas.

1. Qual o significado que ela tem para você?

2. Em que momento de sua vida acadêmica você lembra ter encontrado o conceito de direção? [nível de ensino, disciplina, leituras,...]

3. Você conseguiria associar o conceito de direção a algum conteúdo matemático? Se sim, qual(is) seria(m) ele(s)?

ANÁLISE DOS DADOS

Para a análise dos dados e preservamos a identidade dos sujeitos da investigação, os nomearemos por *M1, M2, M3, M4, M5, M6 e M7*.

A respeito do significado da palavra direção para os sujeitos, classificamos as resposta em três categorias pela inclusão de palavra-chave na resposta: associação com a ideia de sentido; associação com a ideia de norteador, orientação, caminho e outras. Três dos investigados se enquadraram na primeira categoria ao assim se expressarem:

M1: direção = sentido; algo que situa, localiza.

M3: Para mim a palavra direção tem o sentido de orientação.

M7: Direção quer dizer o modo de orientação, o sentido de onde partem as coisas.

As respostas de outros três enquadrados na segunda categoria são as seguintes:

M2: A palavra direção tem um significado norteador, algo como um caminho traçado que se deve seguir. Também, trago à mente palavras como esquerda e direita, pois são consideradas "direções".

M4: Direção no meu ponto de vista é uma orientação, ou seja, um caminho a ser percorrido.

M6: Direção: partir de um lugar (no espaço) para outro determinado lugar, seguindo um caminho.

Por sua vez M5 se expressa da seguinte forma: *"Científico no âmbito escolar e/ou formação. Natural se pensarmos intuitivamente/geometricamente."*

Percebe-se que, embora todos sejam formados em Matemática, nenhum deles apresentou, ao menos, o significado geométrico do conceito como um feixe de retas paralelas o que seria esperado uma vez que seis ensinam Matemática na escola básica e um no ensino superior. Além disso, a relação com conceitos matemáticos não emergiu e ficou, segundo as escritas, algo como no “senso comum”. A escrita de M5 se distingue das demais, pois, além de não estabelecer alguma conexão com sentido ou mesmo rumo como os demais, não produz significado.

A segunda pergunta buscou verificar se os sujeitos se lembravam de algum momento ou disciplina em sua formação, sobre o conceito de direção. Entendemos que isso deveria fazer sentido uma vez que a exceção de M3, os demais concluíram a Licenciatura em Matemática recentemente. Além disso, como todos estão em fase de revisão de literatura sobre seus projetos de dissertação, poderia ser provável terem encontrado alguma leitura relacionada.

Estabelecemos as seguintes categorias para respostas à segunda questão: aparece a palavra vetor e/ou Geometria Analítica e Álgebra Linear na resposta; aparece a palavra física; outros. Apenas um dos sete investigados não indicou nenhuma dessas palavras chaves e quatro deles também indicaram que haviam visto em Física. Isto indica, provavelmente, que a noção de vetores para eles esteve presente no tratamento vetorial dado à Geometria Analítica.

Destacamos nas respostas de *M1, M5 e M6* a ausência de conexão da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, provavelmente pelas discussões que têm ocorrido nas disciplinas e seminários do Mestrado Profissional a respeito de produção de significados e conexões que se fazem necessárias de serem estabelecidos especialmente pelos objetivos de tal mestrado, a saber, aperfeiçoar a prática dos professores em exercício.

M1: Não exatamente o conceito, mas a direção é importante para a álgebra linear, no conteúdo de vetores. No ensino básico, na física do ensino médio. Na graduação vi álgebra linear separado de geometria analítica, sem conexões alguma.

O respondente salienta a importância do conceito, mesmo não o tendo tornado preciso na primeira pergunta.

M2: O conceito de direção é visto, inicialmente no ensino básico, quando estuda-se lateralidade (direita, esquerda). Também é visto na disciplina de Álgebra, no ensino superior, no estudo de espaços vetoriais e vetores.

M5: Em alguns momentos no ensino fundamental no 7º. ano, quando é iniciado o estudo do conjunto dos números inteiros. E mais tarde na graduação nos cursos de Álgebra Linear, mas sem fazer conexão com a Geometria Analítica, que era uma disciplina totalmente separada da Álgebra na graduação.

Percebe-se na primeira frase da resposta de *M5* que a mesma confunde o conceito de direção com de sentido, usualmente feito na construção da reta numerada do conjunto dos números inteiros.

M6: A palavra direção não lembro, mas o conceito de direção foi trabalhado em geometria analítica e álgebra linear, mas como foram disciplinas em semestres separados não foi feito ligação nenhuma.

M3 acrescenta que o conceito de direção esteve também presente em sua formação na disciplina de Fundamentos de Matemática e *M4* apenas lembra ter o primeiro contato com o conceito em Física no primeiro ano do Ensino Médio e nada relacionado com disciplinas da Licenciatura em Matemática.

Na terceira pergunta proposta, esperávamos que os indivíduos investigados associassem o conceito de direção a conteúdos matemáticos, quer de sua formação profissional, quer no seu exercício profissional. *M1, M2, M5, M6 e M7* responderam que o conceito estava associado a vetores (espaços vetoriais, Geometria Analítica, Física), o que comprova nosso conhecimento intuitivo da limitação ao emprego do conceito a um ramo ou conteúdo específico da Matemática.

A resposta de *M3: Representação geométrica dos pares ordenados. Gráfico de funções de 1º grau,* que concluiu sua formação há mais tempo, dá outros indicativos de emprego do conceito, embora não explicite de que forma isto ocorre. *M6* responde que também associa o conceito de direção a "plano cartesiano", além de associar a vetores e à Física. De forma similar, *M7*, além de associar com vetores, também associa a funções de 1º grau. Por fim, temos a resposta de *M4: Sim, Função, Trigonometria, Conjuntos numéricos, etc.*

Das respostas ao terceiro item podemos inferir que os sujeitos foram bastante limitados em suas respostas, não indo muito além do que haviam enunciado na primeira pergunta, uma vez que não conseguiram detalhar o conceito aplicado a outros ramos da Matemática ou de outras disciplinas além da Física. Muito embora tenham citado funções, trigonometria, conjuntos numéricos, funções de primeiro grau, pares ordenados, não se desvencilharam da álgebra linear.

CONCLUSÕES

A pesquisa com os sete mestrandos evidenciou que o conceito de direção não está presente entre eles a menos da associação com vetores, comprovando o conhecimento empírico dos investigadores. Possivelmente isso ocorra, pois ele é introduzido, em geral, juntamente com sentido e módulo quando é caracterizado o que seja um vetor como objeto físico, na disciplina Física. Em geral, o conceito associado à Álgebra Linear se limita a este caráter físico do vetor e por isso, talvez, os alunos o associem, quase que exclusivamente, a este ramo ou à Geometria Analítica, nem sempre vinculada com o tratamento vetorial.

Constatamos que nenhum dos respondentes estabeleceu relação do conceito de direção com o de inclinação, por exemplo, buscando histórica e geometricamente significados, como aquele indicado por Eves (2004), num dos problemas de Apolônio, relacionando inclinação a segmentos.

Também se evidenciou na pesquisa que nenhum dos indivíduos relacionou o conceito de direção, em seu aspecto geométrico, como aquele algo comum existente em um feixe de retas paralelas, o que é preocupante em termos de formação de professores que, atualmente, estão em exercício profissional. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam o recurso à História da Matemática como podendo oferecer contribuições para o ensino e a aprendizagem em Matemática, em particular ao indicarem: “Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagens deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles”. (Brasil, 1998, p.42)

Por sua vez, o documento, no bloco Espaço e Forma, indica: “Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistema de coordenadas” (Idem, p. 51), ao que ampliamos para outros espaços geométricos ou ambientes, como indicado pelos autores neste texto.

Desta forma, recomendamos que o conceito de direção tenha um tratamento na formação do professor de Matemática de forma relacionada a diversos campos dessa área do conhecimento, como no Cálculo Diferencial e Integral de uma e várias variáveis, ampliando-o para direção de curvas e de superfícies, como feito anteriormente neste artigo. Com isto, estaremos dando à Geometria o seu devido papel no currículo da formação do professor, corroborando ao que Villani (2001) caracterizou como método pedagógico e, portanto, geometrizar o currículo, como definido por um dos autores do artigo.

Para finalizar, apresentamos uma construção feita no GeoGebra, em colaboração, para a qual foi necessário evocar o conceito de direção. Desta forma, ilustramos como as tecnologias que fazem parte de nosso tempo atual podem ser aliadas na construção do conhecimento geométrico e matemático. Fomos interpelados por uma colega que utiliza as tecnologias em sua prática e que desejava produzir o movimento de um personagem, o “cebolinha” das histórias infantis, sobre um dado caminho previamente definido.

Assim, buscamos o conceito de direção sobre uma curva para realizar o que era desejado, obtendo-se a figura 8, a seguir. Observamos que construímos uma direção v, segundo a reta s, e dispomos o “cebolinha” no ponto A. Ao movimentarmos tal ponto, o cebolinha descreve um campo de direções tangentes à curva f, ou seja, segue a direção indicada para esta curva.

A construção ilustrada, com o uso da tecnologia computacional, mostra possibilidade de envolvimento com a atualidade educacional em que vivemos, segundo a qual os estímulos oriundos dessa tecnologia, podem proporcionar melhor aproveitamento do ensino.

O desenvolvimento de uma cultura informática é essencial na reestruturação da maneira como se dá a gestão da educação, a reformulação dos programas pedagógicos, a flexibilização das estruturas de ensino, a interdisciplinaridade dos conteúdos, o relacionamento dessas instituições com outras esferas sociais e com a comunidade. (Kenski, 2007, p.101)

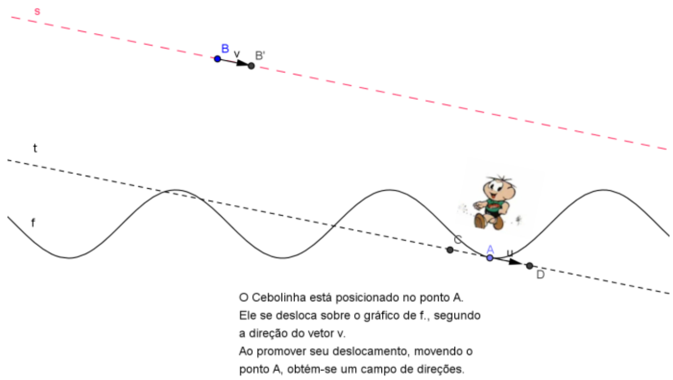

Figura 8: Construção feita no GeoGebra pelos autores e por Maria do C. B. Trevisan[4].

Podemos clicar na reta r e com o mouse direito habitar rastro no GeoGebra para obter o traçado. Ao movimentar o ponto o “cebolinha” se desloca e aparece o campo de direções (figura 9).

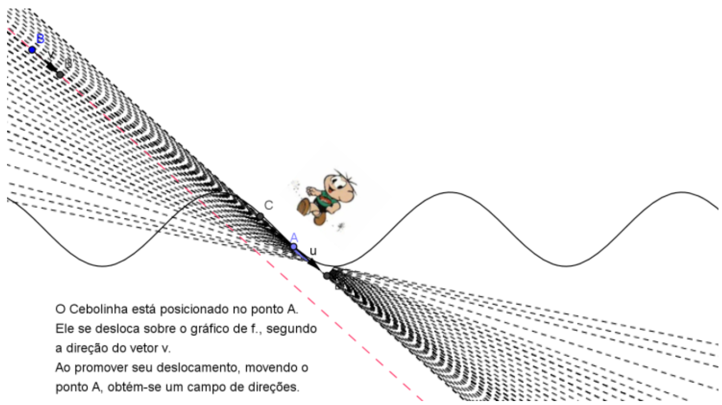

Figura 9: Campo de direções obtidas pelo percurso do ponto A.

Esperamos que a pesquisa e as recomendações apresentadas neste artigo possam contribuir para mudanças curriculares e novas pesquisas.

BIBLIOGRAFIA

Anton, H. (2000). *Cálculo*: um novo horizonte, 6. ed. v. 1. Porto Alegre: Bookman.

Bicudo, I. (2009). Os Elementos/Euclides. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP.

Boyer, C. (1998). História da Matemática, 2. ed. São Paulo: Ciência Moderna.

Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

[4] Maria do C. B. Trevisan é professora da UNIFRA e colabora com o Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática no uso de tecnologias computacionais. Cebolinha é um membro da turma da Mônica, que são personagens de histórias infantis em quadrinhos, criadas por Maurício de Souza. Capturada de http://www.google.com.br/search?hl=ptPT&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1143&bih=714&q=CEBOLINHA em 10 mar.2013.

Courant, R. y Robbins, H. (2000). *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrias*. Trad. al español por Siperstein, S. B. México: Uteha, v. 2.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Fiorentino, D. y Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: SP: Autores Associados.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*: an educational approach. Dordrecht: Reidel.

Janesick, V. J. (1994). The dance of qualitative research design: metaphor, methodolatry, and meaning. En: Denzin, N.K. y Lincol, Y.S. (editors) *Handbook of Qualitative Research* (pp. 209-219). USA: SAGE publications, Inc..

Kenski, V. M. (2007). *Educação e Tecnologias*: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. 2009. Tese Doutoral em Educação – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 294 p.

Maia, L. de S. L. (2009). Vale a pena ensinar Matemática. En: Borba, R. y Guimarães, G. (org.). *A pesquisa em educação matemática*: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez.

Schubring, G. (2007). Um outro caso de obstáculos epistemológicos: o princípio de permanência. En: *Bolema*. Rio Claro: (SP). (Ano 20, n. 28, pp.1-20).

Stewart, J. (2002). *Cálculo*. v. 1, 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Villani, V. (2001). *Perspectives en L´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI*. [S.l.]: PMME-UNISON, Feb. 2001. Documento de discussão para um estudo ICMI. Disponível em: http://www.xtec.es/~jdomen28/article2.htm#top . Consultado em 12 de agosto de 2008.