PRINCIPIA **23**(2): 145–151 (2019) doi: 10.5007/1808-1711.2019v23n2p145
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

Ao Modo de Saccheri

In the manner of Saccheri

FRANK THOMAS SAUTTER
Universidade Federal de Santa Maria, BRASIL
ftsautter@ufsm.br

Abstract. I will apply a technique employed by Giovanni Girolamo Saccheri in *Logica demonstrativa* (1701) to concisely prove the invalidity of moods of the First Figure of the Theory of the Assertoric Syllogism without appealing to facts outside logic.

Keywords: Aristotle • assertoric syllogism • counterexample • logical purity

RECEIVED: 28/02/2019 ACCEPTED: 23/05/2019

1. A técnica tradicional de Aristóteles

A técnica de redução utilizada por Aristóteles nos *Primeiros Analíticos* para provar validade de silogismos é bem conhecida e dispomos, inclusive, de diversas variantes contemporâneas da mesma.[1] Menos conhecida e explorada é a técnica utilizada por ele nos Capítulos 4 a 6 para provar *invalidade* de silogismos.

Aristóteles é exemplarmente metódico e, de fato, a tarefa o exige. O espaço lógico composto por 256 candidatos a dedução[2] é dividido em três regiões — as Figuras — conforme o termo médio seja o sujeito em uma premissa e o predicado em outra (Primeira Figura), conforme o termo médio seja o predicado em ambas as premissas (Segunda Figura), ou conforme o termo médio seja o sujeito em ambas as premissas (Terceira Figura).[3] Ele examina os candidatos da Primeira Figura no Capítulo 4, os candidatos da Segunda Figura no Capítulo 5, e os candidatos da Terceira Figura no Capítulo 6. No interior de cada Figura, Aristóteles primeiro examina os candidatos cujas premissas são universais, depois os candidatos cujas premissas são mistas quanto à quantidade — uma universal, outra particular — e, finalmente, os candidatos cujas premissas são particulares. A invalidade de candidatos rejeitados é provada mediante a técnica de contraexemplo, com a utilização de triplas de termos concretos. A Tabela 1 apresenta um sumário dos resultados referentes à Primeira Figura, em ordem de aparição no texto aristotélico.

Nesta Tabela 'm' está para o termo médio do silogismo, 'p' está para o termo maior do silogismo (o termo predicado da conclusão), e 's' está para o termo menor do silogismo (o termo sujeito da conclusão). A primeira, a segunda, a quinta e a sexta

Premissa maior	Premissa menor	Resultado
Amp	Asm	Asp
Emp	Asm	Esp
Amp	Esm	⟨ cavalo, homem, animal⟩ ⟨ pedra, homem, animal ⟩
Emp	Esm	⟨ medicina, linha, ciência ⟩ ⟨ unidade, linha, ciência ⟩
Amp	Ism	Isp
Emp	Ism	Osp
Imp (ou Omp)	Asm	⟨ prudência, disposição, bom ⟩ ⟨ ignorância, disposição, bom ⟩
Imp (ou Omp)	Esm	⟨ cisne, cavalo, branco ⟩ ⟨ corvo, cavalo, branco ⟩
Amp	Osm	Redução ao caso Amp, Esm
Emp	Osm	Redução ao caso Emp, Esm
Imp (ou Omp)	Ism (ou Osm)	⟨ cavalo, branco, animal ⟩ ⟨ pedra, branco, animal⟩

Tabela 1. Candidatos a dedução na Primeira Figura.

linhas da Tabela 1 apresentam os modos válidos mesmo sem pressupostos existenciais: BARBARA, CELARENT, DARII e FERIO, respectivamente. Mais adiante utilizarei pressupostos existenciais, o que resultará no acréscimo de BARBARI e CELARONT. Aristóteles é econômico nas provas de invalidade, ao utilizar metade das triplas que seriam necessárias em uma aplicação por força bruta da técnica de contraexemplo.[4] Isso é possível devido à aplicação do seguinte resultado, expresso na linguagem da lógica contemporânea:

Teorema 1. Seja Γ um conjunto de fórmulas quaisquer, α uma fórmula qualquer, e β uma fórmula tal que $\{\alpha, \beta\}$ é insatisfazível. Se $\Gamma \models \alpha$, então $\Gamma \cup \{\beta\}$ é insatisfazível.

Demonstração: Suponha que $\Gamma \cup \{\beta\}$ é satisfazível. Logo, há uma estrutura $\mathfrak{E}$ tal que todas as fórmulas de Γ e β são verdadeiras em $\mathfrak{E}$. Mas se β é verdadeira em $\mathfrak{E}$, então α não é verdadeira em $\mathfrak{E}$, pois $\{\alpha, \beta\}$ é insatisfazível. Logo, há uma estrutura $\mathfrak{E}$ tal que todas as fórmulas de Γ são verdadeiras em $\mathfrak{E}$ mas α não é verdadeira em $\mathfrak{E}$, isto é, não é o caso que $\Gamma \models \alpha$. Q.E.D.

Amparado pelo Teorema 1, considere-se um exemplo de candidato rejeitado. Na terceira linha da Tabela 1 é apresentado um candidato cuja premissa maior é 'Amp', cuja premissa menor é 'Esm', e cujas triplas de termos concretos são '⟨ cavalo, homem, animal⟩' e '⟨ pedra, homem, animal ⟩'. Essas triplas são tais que o primeiro termo corresponde ao termo menor do candidato, o segundo termo ao seu termo médio, e o terceiro termo ao seu termo maior. Assim, por exemplo, em relação à primeira tripla temos: 'Todo homem é animal' é a premissa maior e 'Nenhum cavalo é homem' é a premissa menor. Aristóteles utiliza a primeira tripla para construir o conjunto satisfazível de proposições formado pela premissa maior, pela premissa menor e pela proposição universal afirmativa 'Asp'. No presente exemplo, esta proposição é 'Todo cavalo é animal'. Utilizando o Teorema 1, rejeitam-se, a partir desta tripla, as conclusões incompatíveis com a proposição universal afirmativa, ou seja, rejeitam-se as conclusões negativas 'Esp' e 'Osp'.[5] Ele utiliza a segunda tripla para construir o conjunto satisfazível de proposições formado pela premissa maior, pela premissa menor e pela proposição universal negativa 'Esp'. No presente exemplo, a premissa maior é 'Todo homem é animal', a premissa menor é 'Nenhuma pedra é homem' e a proposição universal negativa 'Nenhuma pedra é animal'. Utilizando o Teorema 1, rejeitam-se, a partir desta tripla, as conclusões incompatíveis com a proposição universal negativa, ou seja, rejeitam-se as conclusões afirmativas 'Asp' e 'Isp'.[6]

Striker (2009, pp.98–9) sugere que, em relação aos candidatos das linhas 9 e 10, há uma tentativa malsucedida de rejeitá-los ao utilizar triplas de termos concretos para os quais vale tanto 'Osm' como 'Ism'. Striker sugere, ainda, que Aristóteles finalmente os rejeita apelando para a rejeição dos candidatos das linhas 3 e 4, respectivamente. Esta alternativa de prova é possível graças ao seguinte resultado lógico:

Teorema 2. Se não é o caso que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \chi$ e α é mais forte do que β, então não é o caso que $\Gamma \cup \{\beta\} \models \chi$.

Utilizarei o Teorema 2 e o Teorema 3, abaixo, para desenvolver uma técnica de contraexemplo alternativa à técnica de Aristóteles:

Teorema 3. Se não é o caso que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \chi$ e β é mais forte do que χ, então não é o caso que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

O procedimento de Aristóteles é admirável, mas será necessário utilizar 'pedras', 'cavalos', 'coisas brancas' ou outro material extralógico para provar resultados lógicos? Afinal, a lógica não basta a si mesma? Não é uma prova de sua suficiência a crítica interna que levou ao desenvolvimento de lógicas de domínio vazio, ou seja, a sistematização das leis lógicas vigentes mesmo se não houvesse nada no mundo?[7] Na sequência apresentarei a prova dos 58 modos inválidos da Primeira Figura, sem utilizar material extralógico; esta prova está baseada em um resultado de Saccheri.

2. A técnica puramente lógica de Saccheri

No Capítulo 9 da Parte I de sua *Logica demonstrativa*, Saccheri (1986, pp.xxvi–xxvii) demonstra *in nobiliorem viam* a regra medieval '*In prima figura minor non potest esse negativa*', ou seja, na Primeira Figura a premissa menor não pode ser negativa. O que se entende por '*in nobiliorem viam*' é a ausência de material extralógico. O exemplo citado por Halsted (apud Saccheri 1986, pp.xxvi-xxvii) é o da invalidade do modo AEE da Primeira Figura. A prova é a seguinte: Suponha que AEE seja válido. Neste caso o silogismo

> 'Todo silogismo da Primeira Figura com as duas premissas universais afirmativas (BARBARA) é válido. Nenhum silogismo da Primeira Figura com uma premissa negativa é um silogismo da Primeira Figura com as duas premissas universais e afirmativas. Logo, nenhum silogismo da Primeira Figura com uma premissa negativa é válido'

é um silogismo válido, por hipótese, e as duas premissas são verdadeiras. Logo, a conclusão é verdadeira, ou seja, nenhum silogismo da Primeira Figura com uma premissa negativa é válido. Mas um AEE da Primeira Figura é um silogismo da Primeira Figura com uma premissa negativa. Portanto, um AEE da Primeira Figura é inválido. Absurdo![8] Q.E.D. A técnica de Saccheri recorre ao expediente de *usar* o modo cuja invalidade quer ser provada, mas também *mencioná-lo*.

A resposta à pergunta sobre se esta técnica de Saccheri pode ser estendida à prova de todos os modos inválidos da Primeira Figura é positiva. No restante deste trabalho realizarei tal prova.

Modo filtrado	**Modos-alvo do filtro**
AAO	AAO, AIO, IAO, IIO, AAE, IAE, AIE, IIE
AEO	AEO, IEO, AOO, IOO, AEE, IEE, AOE, IOE
EEO	EEO, OEO, EOO, OOO, EEE, OEE, EOE, OOE
OAO	OAO, OIO, OAE, OIE
EIE	EIE
AEI	AEI, IEI, AOI, IOI, AEA, IEA, AOA, IOA
EAI	EAI, OAI, EII, OII, EAA, OAA, EIA, OIA
EEI	EEI, OEI, EOI, OOI, EEA, OEA, EOA, OOA
IAI	IAI, III, IAA, IIA
AIA	AIA

Tabela 2. 10 modos inválidos filtrados da Primeira Figura e seus respectivos 58 modos-alvo.

O primeiro passo da prova consiste em reduzir o número de casos a serem provados. Utilizando os Teoremas 2 e 3, é suficiente mostrar a invalidade de 10 dos 58 modos inválidos da Primeira Figura. A Tabela 2 apresenta os 10 modos filtrados[9] cuja invalidade requer prova e os respectivos modos-alvo do filtro cuja invalidade é debitaria da invalidade do respectivo modo filtrado. Por exemplo, na primeira linha da Tabela 2, o modo AAO é um modo-alvo de si mesmo; AIO, IAO e IIO são modos-alvo do modo filtrado AAO por aplicação do Teorema 2 (enfraquecimento de premissa); AAE é modo-alvo do modo-filtrado AAO por aplicação do Teorema 3 (fortalecimento da conclusão); e IAE, AIE e IIE são modos-alvo do modo AAE por aplicação do Teorema 2 (enfraquecimento de premissa) e, indiretamente, eles são modos-alvo do modo AAO.

A aplicação dos Teoremas 2 e 3 depende do pressuposto existencial dos termos envolvidos, mais especificamente depende da subalternação de proposições de tipo I a proposições de tipo A, e da subalternação de proposições de tipo O a proposições de tipo E. Isto implica que a aplicação da técnica de Saccheri à Teoria do Silogismo Assertórico sem pressupostos existenciais demanda o exame ineficaz *individual* dos 60 modos inválidos (sem pressupostos existenciais) da Primeira Figura.

Modo da 1ª Figura	**Termo maior**	**Termo médio**	**Termo menor**
AAO	silogismo do modo AAO da 1ª Figura	silogismo válido	silogismo válido
AEO	silogismo do modo AEO da 1ª Figura	silogismo do modo AAA da 1ª Figura	silogismo válido
EEO	silogismo do modo EEO da 1ª Figura	silogismo do modo AAO da 1ª Figura	silogismo válido
OAO	silogismo do modo OAO da 1ª Figura	silogismo	silogismo válido
EIE	silogismo válido	silogismo do modo AAA da 1ª Figura	silogismo do modo EIE da 1ª Figura
AEI	silogismo do modo AEI da 1ª Figura	silogismo inválido	silogismo inválido
EAI	silogismo inválido	silogismo inválido	silogismo do modo EAI da 1ª Figura
EEI	silogismo do modo EEI da 1ª Figura	proposição	silogismo inválido
IAI	silogismo do modo IAI da 1ª Figura	silogismo	silogismo inválido
AIA	silogismo	silogismo do modo AAA da 1ª Figura	silogismo válido

Tabela 3. Prova de invalidade de 10 modos inválidos filtrados da Primeira Figura.

Na Tabela 3 estão apresentadas as triplas de termos que constituem o contraexemplo em cada caso. À exceção de AIA, todas as demais provas são por autorrefutação, para usar uma caracterização de Prior (2019). Elas utilizam apenas fatos lógicos, tais como: que BARBARA é um modo válido, que uma proposição não é um silogismo, que todo S é S (o que vale mesmo sem o pressuposto existencial de S), que todos os silogismos de um mesmo modo ou são igualmente válidos ou igualmente inválidos, as regras de inferência imediata, etc. Por exemplo, prova-se a invalidade do modo OAO (quarta linha da Tabela 3) mediante os seguintes passos: Suponha que o modo OAO é válido. Neste caso o silogismo

> 'Algum silogismo não é silogismo válido. Todo silogismo do modo OAO da Primeira Figura é um silogismo. Logo, algum silogismo do modo OAO da Primeira Figura não é um silogismo válido'

é válido e suas premissas são verdadeiras. Portanto, sua conclusão também é verdadeira, ou seja, algum silogismo do modo OAO da Primeira Figura não é válido. Absurdo! Q.E.D.

Convém destacar que EEO utiliza a invalidade de AAO, cuja invalidade foi previamente provada, mas qualquer modo cuja invalidade tivesse sido previamente provada poderia servir ao mesmo propósito.

Seria interessante verificar se o mesmo procedimento poderia ser aplicado às demais Figuras e, desse modo, verificar se a Teoria do Silogismo Assertórico basta a si mesma. Finalmente, seria interessante verificar se a mesma restrição — uso exclusivo de material lógico — poderia ser aplicada a cálculos contemporâneos.[10] Prior (2019) mostrou que Łukasiewicz o fez em provas de independência do Cálculo Implicacional Clássico, o que sugere que a técnica talvez não seja simplesmente um efeito colateral da pobre expressividade da Teoria do Silogismo Assertórico.

Referências

Chellas, B. F. 1980. *Modal Logic: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Garrido, M. 1983. *Lógica Simbólica*. 6^a Reimpresión revisada. Madrid: Tecnos.

Mostowski, A. 1951. On the rules of proof in the pure functional calculus of the first order. *The Journal of Symbolic Logic* **16**(2): 107–11.

Prior, A. N. 2019. *Independence-proofs without models*. Editado por Adriane Rini, Max Cresswell e Peter Ohrstrom. https://research.prior.aau.dk/nachlass/. Acesso: 21/02/2019.

Rescher, N. 1966. *Galen and the Syllogism*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Saccheri, G. 1986 [1733]. *Euclides vindicatus*. Translated from the Latin and edited by George Bruce Halsted. With notes by Paul Stäckel and Friedrich Engel translated from the German by F. Steinhardt. 2nd ed. New York: Chelsea.

Smith, R. 1989. *Aristotle Prior Analytics*. Indianapolis/Cambridge: Hackett.

Striker, G. 2009. *Aristotle Prior Analytics Book 1*. Oxford: Oxford University Press.

Weidemann, H. 2004. Aristotle on the reducibility of all valid syllogistic moods to the two universal moods of the first figure (APr A7, 29b1-25). *History and Philosophy of Logic* **25**(1): 73–8.

Notas

[1]Weidemann (2004) esclarece o procedimento aristotélico de redução aos modos perfeitos BARBARA e CELARENT; Garrido (1983, p. 165) destaca o procedimento de redução aos modos BARBARA e DATISI, proposto por Łukasiewicz, e o procedimento de redução aos modos BARBARA e FERIO, proposto por Bochenski.

[2]Smith (1989, p.106), seguindo uma sugestão de John Corcoran, traduz 'συλλογισμοζ' por 'dedução'. Empregarei, mais adiante, o uso consagrado, ou seja, 'silogismo' diz respeito a uma determinada forma e 'silogismo válido' corresponde a 'συλλογισμοζ'.

[3]Rescher (1966) recorre a duas concepções tradicionais para explicar a ausência de uma Quarta Figura nos *Primeiros Analíticos*. Na primeira concepção recorre-se à extensão dos termos, havendo apenas três modos do termo médio — o termo compartilhado — relacionar-se extensionalmente aos extremos — os termos não compartilhados: (1) ele é menor em extensão a um dos extremos e maior em extensão ao outro, (2) ele é maior em extensão a ambos os extremos, (3) ele é menor em extensão a ambos (Rescher 1966, pp.22–3). Na segunda concepção recorre-se à posição ocupada pelo termo médio em relação aos extremos: (1) ele é sujeito em uma premissa e predicado na outra, (2) ele é predicado em ambas as premissas, (3) ele é sujeito em ambas as premissas (Rescher 1966, pp.25–7). Esta última solução só faz sentido se ainda não há diferenciação entre premissa maior e premissa menor, ou seja, se somente as premissas estão dadas.

[4]Entende-se por "força bruta" o tratamento individual de candidatos, sem agrupá-los.

[5]Aqui já está evidenciado o uso de pressupostos existenciais, porque a oposição contrária somente se dá sob estes pressupostos.

[6]Aqui também está evidenciado o uso de pressupostos existenciais, porque a oposição subalterna somente se dá sob estes pressupostos.

[7]Aparentemente Mostowski (1951) foi o primeiro lógico a investigar as leis da lógica em domínios quaisquer, inclusive o domínio vazio.

[8]Prior (2019) menciona este método engenhoso de Saccheri, mas o exemplifica com a prova de invalidade de AEO.

[9]Adaptei à situação presente um termo técnico amplamente utilizado. Filtragem é uma técnica utilizada na prova de decidibilidade de lógicas, técnica esta que visa provar que a lógica possui a propriedade de modelo finito, ou seja, se um não-teorema é falso, então ele é falso em um modelo finito. A filtragem consiste precisamente em destacar a subclasse de modelos finitos de uma dada classe de modelos (ver Chellas (1980, pp.62–3)).

[10]Desde que a Teoria do Silogismo pode ser imersa no Cálculo de Predicados Monádicos de Primeira Ordem, um candidato natural para a aplicação da técnica de Saccheri é este Cálculo.

Agradecimentos

O autor agradece o apoio do CNPq no desenvolvimento deste trabalho, através da concessão de uma bolsa de produtividade em pesquisa.