Uso de tecnología para el proceso de integración a través del concepto de variación: una introducción al cálculo integral a través de la variación

Oscar Ruiz Chávez[1], Juan Luna González[1], Lidia Julieta Royval Bustillos[1],
María Concepción Salazar Álvarez[1], Fernando Hermosillo Pérez[1], Eduardo José Loera Ochoa[1]

[1] Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Resumen

La tendencia en la introducción a los cursos de integración esta específicamente dirigida al manejo y aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, esta situación, puede provocar deficiencias en los estudiantes para reconocer y manipular este concepto matemático en contextos no algebraicos como las reportadas en Cantoral y Farfán (1998). Uno de los primeros obstáculos que aparecen en este tipo de cursos es la utilización y determinación de las fórmulas de suma. Reconocemos en ello una magnífica oportunidad para introducir el concepto matemático de integración en un contexto numérico y variacional, dada la evidente relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el surgimiento del Cálculo Integral. A continuación, se describe un algoritmo para la obtención de la fórmula de suma a través del uso de diferencias, aproximaciones y el planteamiento de un modelo matricial y su resolución por determinantes utilizando la regla de Cramer. La comprobación del modelo matricial se realiza mediante el uso de un software de manejo de hoja electrónica (Microsoft Excel).

Palabras Clave: Calculo Integral, Educación

Introducción

En el Cálculo, las fórmulas de integración están relacionadas con la obtención del valor de áreas bajo una curva. En específico, estamos comprometidos en determinar las fórmulas de suma y, para tal efecto, consideramos el uso de diferencias de sumas y sistemas de ecuaciones lineales, además del uso de la hoja electrónica para resolver estos sistemas. Se señala que el modelo matricial propuesto para la determinación de fórmulas se encuentra en los libros de texto de Álgebra Lineal y no en los de Cálculo.

Por otra parte, intentamos dar un mismo valor a los diferentes contextos: gráfico, numérico y algebraico, para tener una forma más flexible de presentar y resolver problemas.

Desarrollo

Una primera dificultad que aparece de manera recurrente en el inicio de los cursos de cálculo integral, es el determinar la fórmula de integración de la forma x^n. Esto último como una noción a los estudios de Leibniz, en sus primeros trabajos, sucesiones de sumas y diferencias de números. ¿Cómo calcular el valor de una suma infinita?, por ejemplo:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots$$

"Al tratar de calcular la suma infinita, Leibniz se auxilia del esquema de construcción del triángulo aritmético de Pascal para formar su triangulo armónico, y de esta forma observa que estos dos arreglos tenían una cierta relación inversa, a saber que el triángulo aritmético involucra sumas y su triángulo armónico diferencias de números. Estas ideas, que Leibniz las usó para un contexto discreto (la suma y diferencias de números como operaciones inversas)." (Muñoz Ortega, 2006) Luego las extrapolo al contexto continuo.

En el cálculo integral, las fórmulas de integración están relacionadas con el cálculo de áreas bajo una curva. (Pierre Fermat, calculó el área bajo la curva, $y = X^P$ en el intervalo $[0, a]$, es decir, $\int_o^a x^P$, para valores racionales de $p \neq -1$. Para calcular el área bajo la curva de $y = x^P$ emplea un procedimiento que consistió en considerar una partición del intervalo $[0, a]$ en forma de progresión geométrica para mostrar que: $\int_o^a x^P\,dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$.

En específico estamos comprometidos en determinar las fórmulas de suma y, para tal efecto, consideramos el uso de diferencias de sumas y sistemas de ecuaciones lineales además del uso de la hoja electrónica para resolver estos sistemas. Se señala que el modelo matricial propuesto para la determinación de fórmulas se centra en la obtención de sumas de series de la forma $\sum_{i=1}^{n} i^r$ donde obtenemos polinomios de n. $\sum_{i=1}^{n} i^r = S(n)$.

Por ejemplo, la suma de los primeros n números naturales. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ o de sus cuadrados $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n$, o de sus cubos $\sum_{i=1}^{n} i^3$, etc. Obtenemos una función polinómica de n

Tomemos, por ejemplo, el caso de la suma de los primeros n números enteros a partir del 1.

Esto es, $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = S(n)$

Utilizando una tabla para la suma de los enteros y el cálculo de sus diferencias

N	S(N)	1A DIF	2A DIF
0	0		
1	1	1	
2	3	2	1
3	6	3	1
4	10	4	1

Tabla 1. Suma de enteros

Podemos notar que las segundas diferencias son constantes, lo que nos refiere a un polinomio de grado 2: $S(n) = An^2 + Bn + C$.

De la tabla 1 tomamos los valores para n y S(n) y formamos un sistema de 3 ecuaciones lineales

$$A + B + C = 1$$

$$4A + 2B + C = 3$$

$$9A + 3B + C = 6$$

Cuya solución es $A = {}^{1}/_{2}, B = {}^{1}/_{2}, C = 0$. Lo que nos da la expresión para la suma de los primeros $\boldsymbol{n}$ números enteros: $S(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Para la tabla y los cálculos de la solución del sistema de ecuaciones mediante la regla de Cramer utilizamos una hoja de cálculo de Microsoft Excel

					AN^2+BN+C							
N	S(N)	1A DIF	2A DIF		A	B	C	S(N)	1	1	1	
0	0				1	1	1	1	3	2	1	A1
1	1	1		A	4	2	1	3	6	3	1	
2	3	2	1		9	3	1	6	1	1	1	
3	6	3	1		D	-2			4	3	1	A2
4	10	4	1		D1	-1	A=	0.5	9	6	1	
			2o. GRADO		D2	-1	B=	0.5	1	1	1	
					D3	7E-16	C=	-0	4	2	3	A3
									9	3	6	

Figura 1. Tablas y cálculos mediante Microsoft Excel

Ahora realizamos el mismo procedimiento para encontrar una expresión que calcule el valor de la suma de los cuadrados de los primeros n números enteros a partir del 1.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = S(n)$$

N	N^2	S(N^2)	1A DIF	2A DIF	3A DIF
0	0	0			
1	1	1	1		
2	4	5	4	3	
3	9	14	9	5	2
4	16	30	16	7	2
5	25	55	25	9	2

Tabla 2. Suma de cuadrados

Donde las terceras diferencias son constantes, lo que nos indica que la suma de cuadrados es una expresión de grado 3. $S(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$

Formamos nuestro sistema de 4 ecuaciones para encontrar los valores de los coeficientes

$$A + B + C + D = 1$$

$$8A + 4B + 2C + D = 5$$

$$27A + 9B + 3C + D = 14$$

$$64A + 16B + 4C + D = 30$$

Cuya solución es: $S(n) = \sum_1^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En la figura 2 se muestran las tablas y cálculos para la suma de cuadrados y de cubos

N	N^2	S(N^2)	1A DIF	2A DIF	3A DIF	D	12
0	0	0				D1=	4
1	1	1	1			D2=	6
2	4	5	4	3		D3=	2
3	9	14	9	5	2	D4=	2E-15
4	16	30	16	7	2	A=	0.333
5	25	55	25	9	2	B=	0.5
					3ER GRADO	C=	0.167
						D=	2E-16

1	1	1	1	1
8	4	2	1	5
27	9	3	1	14
64	16	4	1	30

1	1	1	1
5	4	2	1
14	9	3	1
30	16	4	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	5	2	1	8	4	5	1	8	4	2	5
27	14	3	1	27	9	14	1	27	9	3	14
64	30	4	1	64	16	30	1	64	16	4	30

N	N^3	S(N^3)	1A DIF	2A DIF	3A DIF	4a DIF	D	288
0	0	0					D1=	72
1	1	1	1				D2=	144
2	8	9	8	7			D3=	72
3	27	36	27	19	12		D4=	-0
4	64	100	64	37	18	6	D5=	2E-11
5	125	225	125	61	24	6	A=	0.25
6	216	441	216	91	30	6	B=	0.5
						4to GRADO	C=	0.25
							D=	-0
							E=	5E-14

1	1	1	1	1	1
16	8	4	2	1	9
81	27	9	3	1	36
256	64	16	4	1	100
625	125	25	5	1	225

1	1	1	1	1
9	8	4	2	1
36	27	9	3	1
100	64	16	4	1
225	125	25	5	1

1	1	1	1	1
16	8	4	9	1
81	27	9	36	1
256	64	16	100	1
625	125	25	225	1

1	1	1	1	1
16	8	9	2	1
81	27	36	3	1
256	64	100	4	1
625	125	225	5	1

1	1	1	1	1
16	9	4	2	1
81	36	9	3	1
256	100	16	4	1
625	225	25	5	1

1	1	1	1	1
16	8	4	2	9
81	27	9	3	36
256	64	16	4	100
625	125	25	5	225

Figura 2. Suma de cuadrados y suma de cubos (tomado de una hoja de Microsoft Excel)

De donde obtenemos un sistema de ecuaciones que nos ayudan a obtener la expresión para la suma de cubos:

$$S(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$$

$$S(\mathrm{n}) = \sum_{1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{0}^{n} i\right)^2$$

En las siguientes figuras se muestran las tablas y cálculos para la obtención de las expresiones

											1	1	1	1	1	1	1
N	N^4	S(N^4)	1A DIF	2A DIF	3A DIF	4a DIF	5a DIF	D	-34560		32	16	8	4	2	1	17
0	0	0						D1=	-6912		243	81	27	9	3	1	98
1	1	1	1					D2=	-17280		1024	256	64	16	4	1	354
2	16	17	16	15				D3=	-11520		3125	625	125	25	5	1	979
3	81	98	81	65	50			D4=	-2E-08		7776	1296	216	36	6	1	2275
4	256	354	256	175	110	60		D5=	1152		A=	0.2	5				
5	625	979	625	369	194	84	24	D6=	-1E-08		B=	0.5	2				
6	1296	2275	1296	671	302	108	24				C=	0.33333	3				
7	2401	4676	2401	1105	434	132	24				D=	6.5E-13	1.5E+12				
							5o.Grado				E=	-0.0333	-30				
											F=	3.8E-13	2.6E+12				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	16	8	4	2	1	32	17	8	4	2	1	32	16	17	4	2	1
98	81	27	9	3	1	243	98	27	9	3	1	243	81	98	9	3	1
354	256	64	16	4	1	1024	354	64	16	4	1	1024	256	354	16	4	1
979	625	125	25	5	1	3125	979	125	25	5	1	3125	625	979	25	5	1
2275	1296	216	36	6	1	7776	2275	216	36	6	1	7776	1296	2275	36	6	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	16	8	17	2	1	32	16	8	4	17	1	32	16	8	4	2	17
243	81	27	98	3	1	243	81	27	9	98	1	243	81	27	9	3	98
1024	256	64	354	4	1	1024	256	64	16	354	1	1024	256	64	16	4	354
3125	625	125	979	5	1	3125	625	125	25	979	1	3125	625	125	25	5	979
7776	1296	216	2275	6	1	7776	1296	216	36	2275	1	7776	1296	216	36	6	2275

Figura 3. Tablas y cálculos de la suma de las cuartas potencias

$$\sum_{1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{3n^2+3n-1}{5} = \sum_{1}^{n} i^2 \cdot \frac{3n^2+3n-1}{5}$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones tenemos que *S(n)=*

$$\sum_{1}^{n} i^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} =$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \frac{2n^2+2n-1}{3} = \sum_{1}^{n} i^3 \cdot \frac{2n^2+2n-1}{3} = \left(\sum_{0}^{n} i\right)^2 \cdot \frac{2n^2+2n-1}{3}$$

N	N^5	S(N^5)	1A DIF	2A DIF	3A DIF	4a DIF	5a DIF	6a DIF
0	0	0						
1	1	1	1					
2	32	33	32	31				
3	243	276	243	211	180			
4	1024	1300	1024	781	570	390		
5	3125	4425	3125	2101	1320	750	360	
6	7776	12201	7776	4651	2550	1230	480	120
7	16807	29008	16807	9031	4380	1830	600	120
8	32768	61776	32768	15961	6930	2550	720	120
								6o. Grado

1	1	1	1	1	1	1	1
64	32	16	8	4	2	1	33
729	243	81	27	9	3	1	276
4096	1024	256	64	16	4	1	1300
15625	3125	625	125	25	5	1	4425
46656	7776	1296	216	36	6	1	12201
117649	16807	2401	343	49	7	1	29008
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
-2E+07	-4E+06	-1E+07	-1E+07	-0.0002	2073600	-0.0005	0.00021
	A	B	C	D	E	F	G
	0.16667	0.5	0.41667	8.2E-12	-0.0833	2.1E-11	-9E-12
	6	2	2.4	1.2E+11	-12	4.9E+10	-1E+11

1	1	1	1	1	1	1
33	32	16	8	4	2	1
276	243	81	27	9	3	1
1300	1024	256	64	16	4	1
4425	3125	625	125	25	5	1
12201	7776	1296	216	36	6	1
29008	16807	2401	343	49	7	1

1	1	1	1	1	1	1
64	33	16	8	4	2	1
729	276	81	27	9	3	1
4096	1300	256	64	16	4	1
15625	4425	625	125	25	5	1
46656	12201	1296	216	36	6	1
117649	29008	2401	343	49	7	1

1	1	1	1	1	1	1
64	32	33	8	4	2	1
729	243	276	27	9	3	1
4096	1024	1300	64	16	4	1
15625	3125	4425	125	25	5	1
46656	7776	12201	216	36	6	1
117649	16807	29008	343	49	7	1

1	1	1	1	1	1	1
64	32	16	33	4	2	1
729	243	81	276	9	3	1
4096	1024	256	1300	16	4	1
15625	3125	625	4425	25	5	1
46656	7776	1296	12201	36	6	1
117649	16807	2401	29008	49	7	1

1	1	1	1	1	1	1
64	32	16	8	33	2	1
729	243	81	27	276	3	1
4096	1024	256	64	1300	4	1
15625	3125	625	125	4425	5	1
46656	7776	1296	216	12201	6	1
117649	16807	2401	343	29008	7	1

1	1	1	1	1	1	1
64	32	16	8	4	33	1
729	243	81	27	9	276	1
4096	1024	256	64	16	1300	1
15625	3125	625	125	25	4425	1
46656	7776	1296	216	36	12201	1
117649	16807	2401	343	49	29008	1

1	1	1	1	1	1	1
64	32	16	8	4	2	33
729	243	81	27	9	3	276
4096	1024	256	64	16	4	1300
15625	3125	625	125	25	5	4425
46656	7776	1296	216	36	6	12201
117649	16807	2401	343	49	7	29008

Figura 4. Tablas y cálculos de las sumas de las quintas potencias

Por último, obtenemos la expresión S(n) para los n primeros números elevados a la sexta potencia

$$\sum_{1}^{n} i^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} = \frac{6n^7 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + n}{42}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)}{42} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{3n^4 + 6n^3 - 3n + 1}{7} = \sum_{1}^{n} i^3 \cdot \frac{2n^2 + 2n - 1}{3}$$

$$= \sum_{0}^{n} i^2 \cdot \frac{3n^4 + 6n^3 - 3n + 1}{7}$$

N	N^6	S(N^5)	1A DIF	2A DIF	3A DIF	4a DIF	5a DIF	6a DIF	7a DIF
0	0	0							
1	1	1	1						
2	64	65	64	63					
3	729	794	729	665	602				
4	4096	4890	4096	3367	2702	2100			
5	15625	20515	15625	11529	8162	5460	3360		
6	46656	67171	46656	31031	19502	11340	5880	2520	
7	117649	184820	117649	70993	39962	20460	9120	3240	720
8	262144	446964	262144	144495	73502	33540	13080	3960	720

1	1	1	1	1	1	1	1	1
128	64	32	16	8	4	2	1	65
2187	729	243	81	27	9	3	1	794
16384	4096	1024	256	64	16	4	1	4890
78125	15625	3125	625	125	25	5	1	20515
279936	46656	7776	1296	216	36	6	1	67171
823543	117649	16807	2401	343	49	7	1	184820
2097152	262144	32768	4096	512	64	8	1	446964
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
1.3E+11	1.8E+10	6.3E+10	6.3E+10	-0.0544	-2E+10	-0.4023	3E+09	-0.1687
	A	B	C	D	E	F	G	H
	0.14286	0.5	0.5	-4E-13	-0.1667	-3E-12	0.02381	-1E-12
	7	2	2	-2E+12	-6	-3E+11	42	-7E+11

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
65	64	32	16	8	4	2	1	128	65	32	16	8	4	2	1	128	64	65	16	8	4	2
794	729	243	81	27	9	3	1	2187	794	243	81	27	9	3	1	2187	729	794	81	27	9	3
4890	4096	1024	256	64	16	4	1	16384	4890	1024	256	64	16	4	1	16384	4096	4890	256	64	16	4
20515	15625	3125	625	125	25	5	1	78125	20515	3125	625	125	25	5	1	78125	15625	20515	625	125	25	5
67171	46656	7776	1296	216	36	6	1	279936	67171	7776	1296	216	36	6	1	279936	46656	67171	1296	216	36	6
184820	117649	16807	2401	343	49	7	1	823543	184820	16807	2401	343	49	7	1	823543	117649	184820	2401	343	49	7
446964	262144	32768	4096	512	64	8	1	2097152	446964	32768	4096	512	64	8	1	2097152	262144	446964	4096	512	64	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
128	64	32	65	8	4	2	1	128	64	32	16	65	4	2	1	128	64	32	16	8	65	2
2187	729	243	794	27	9	3	1	2187	729	243	81	794	9	3	1	2187	729	243	81	27	794	3
16384	4096	1024	4890	64	16	4	1	16384	4096	1024	256	4890	16	4	1	16384	4096	1024	256	64	4890	4
78125	15625	3125	20515	125	25	5	1	78125	15625	3125	625	20515	25	5	1	78125	15625	3125	625	125	20515	5
279936	46656	7776	67171	216	36	6	1	279936	46656	7776	1296	67171	36	6	1	279936	46656	7776	1296	216	67171	6
823543	117649	16807	184820	343	49	7	1	823543	117649	16807	2401	184820	49	7	1	823543	117649	16807	2401	343	184820	7
2097152	262144	32768	446964	512	64	8	1	2097152	262144	32768	4096	446964	64	8	1	2097152	262144	32768	4096	512	446964	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
128	64	32	16	8	4	65	1	128	64	32	16	8	4	2	65							
2187	729	243	81	27	9	794	1	2187	729	243	81	27	9	3	794							
16384	4096	1024	256	64	16	4890	1	16384	4096	1024	256	64	16	4	4890							
78125	15625	3125	625	125	25	20515	1	78125	15625	3125	625	125	25	5	20515							
279936	46656	7776	1296	216	36	67171	1	279936	46656	7776	1296	216	36	6	67171							
823543	117649	16807	2401	343	49	184820	1	823543	117649	16807	2401	343	49	7	184820							
2097152	262144	32768	4096	512	64	446964	1	2097152	262144	32768	4096	512	64	8	446964							

Figura 5. Tablas y cálculos de las sumas de las sextas potencias

Conclusiones

A partir de esta serie de cálculos y actividades proponemos una alternativa para el inicio del curso de Cálculo integral, donde intentamos controlar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, se reconoce que el estudiante tiene serias dificultades para establecer relaciones de contexto y de apropiación. Apelamos a la tecnología para mediar la actividad docente y desarrollar un diseño didáctico adecuado de éste o cualquier otro problema.

Referencias

Cantoral, R.; Farfán, R.M. (1998): “Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis”. Epsilon 42, 353-369.

Dale, S.; Shedd, M. (1981): Diferencias Finitas: Una Técnica Para Resolver Problemas. Compañía Editorial, Continental, México, D.F.

Johnson Lee W, Introduction to Linear Algebra, 5ta Edición, Editorial Addison Wesley, páginas 24 y 25

Lara de las Fuentes Maximiliano, Una Alternativa Para la Determinación de las Fórmulas de Suma, Mosaicos Matemáticos No. 11, diciembre, 2003.

Muñoz Ortega, G. (2006). Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemologíala visualización en el aula.