

## Índice de capacidad para una tolerancia posicional: Caso de estudio

Anna Patricia Rodríguez Picón<sup>1</sup>, Luis A. Rodríguez Picón<sup>2</sup>,  
Manuel A. Rodríguez Medina<sup>1</sup>, Sanjuana Rodríguez Picón<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez.

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Industrial y Manufactura, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

### Resumen

Un proceso de manufactura está sometido a distintos factores de carácter aleatorio que hacen imposible fabricar productos exactamente iguales, se han desarrollado herramientas estadísticas para afirmar que éste se encuentra bajo control. Una de las principales herramientas para realizar un análisis y determinar si el proceso es apto para cumplir con los requerimientos del cliente es el análisis de capacidad, el cual habitualmente se evalúa con una sola variable de interés, pero estudios recientes demuestran que múltiples variables de interés afectan la calidad de un producto. Cuando se perforan agujeros, los centros de los agujeros no coincidirán exactamente con la posición objetivo especificada para los diferentes productos fabricados, pero serán distribuidos en un área alrededor de un centro. Este artículo desarrolla y propone un par de índices de capacidad para características de posición a partir del índice PCp, considerando que la variación de las componentes que definen el centro no son iguales.

**Palabras Clave:** Índice de capacidad, posiciones verdaderas, tolerancia posicional, región de tolerancia, región de desempeño.

### Introducción

La calidad de un producto es juzgada por una serie de factores: desempeño, confiabilidad, durabilidad y hasta cierto punto la reputación del fabricante. Pero, ¿cómo sabemos que el proceso va a generar productos y servicios que cumplan con las especificaciones del cliente? Dentro de las etapas del proceso productivo se pueden presentar una serie de factores aleatorios

que hacen imposible fabricar dos productos exactamente iguales, es decir, las características críticas del producto no son uniformes y presentan variación. Esta variación es indeseable y se requiere minimizarla lo más posible o mantenerla dentro de los límites de especificación. Uno de los principales indicadores para saber si el proceso está

---

<sup>1</sup> Departamento de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez.

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Industrial y Manufactura, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

fabricando productos de calidad es el índice de capacidad de procesos el cual fue diseñado para medir la magnitud de la variación del proceso global con relación a la tolerancia de fabricación, y es usado para los procesos basados en datos normales, independientes y en control estadístico (Pearn & Kotz, 2006).

La clave del éxito en las industrias es fabricar productos de alta calidad, para ello, es necesario conocer si sus procesos cuentan con la capacidad de cumplir con las especificaciones establecidas por el cliente, es decir, comparar el desempeño actual del proceso contra los requerimientos del cliente.

## Índices de Capacidad Univariados

Las técnicas estadísticas pueden ser útiles en todo el ciclo de un producto, desde el desarrollo del mismo antes de la fabricación, en la variabilidad del proceso donde se manufactura, en el análisis de esa variabilidad con respecto a las especificaciones y en la eliminación o reducción en gran medida de esta misma (Montgomery, 2009). A esto se le conoce como análisis de capacidad de proceso, el cual se refiere a la habilidad inherente de un proceso para producir piezas similares durante un periodo sostenido de tiempo bajo un conjunto dado de condiciones cuando operan en un estado de control estadístico (Zahid & Sultana, 2008).

El índice Cp genera una evaluación de lo bueno que es el proceso con respecto a la variabilidad permitida. La figura 1 muestra múltiples valores que puede adquirir el Cp, entre más grande sea la curtosis de la normal mayor será el índice de capacidad, no necesariamente estarán centrados en la media.

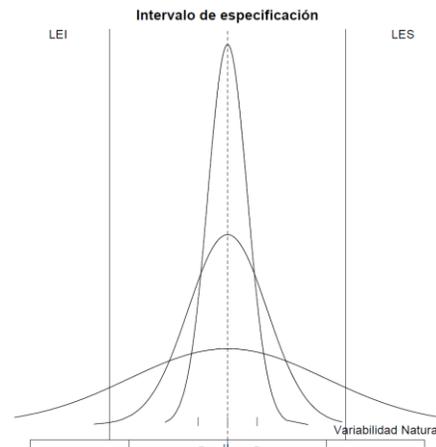


Figura 1. Índice de Capacidad, Cp

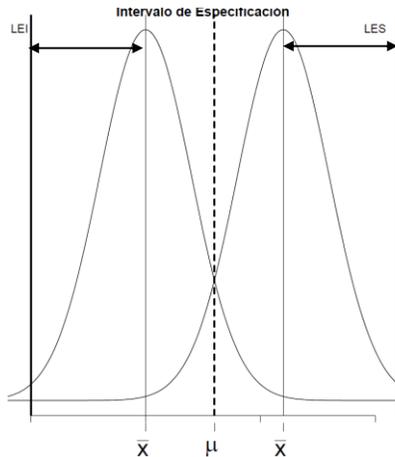
Para poder realizar el cálculo del índice de capacidad es necesario conocer los límites de especificación señalados por el cliente y conocer la variación del proceso a evaluar, el cual se denota de la siguiente manera:

$$Cp = \frac{LES - LEI}{6\sigma} \quad (1)$$

En donde LES se refiere al límite de especificación superior, LEI representa el límite de especificación inferior y  $\sigma$  es la desviación estándar.

La relación del índice de capacidad Cp, no tiene en cuenta la media del proceso con respecto a los límites de especificación. Es por eso que se desarrolló un índice de capacidad llamado Cpk, donde el factor k mide el nivel de desviación de la media del proceso al objetivo especificado (Bass, 2007). El Cpk es la relación de la distancia entre el centro del proceso y el

límite de especificación más cercano a la mitad de la variabilidad del proceso ( $3\sigma$ ). En la figura 2 muestra gráficamente la medición que realiza el Cpk.



**Figura 2.** Índice de Capacidad, Cpk

La estimación del Cpk es definida como,

$$C_{pk} = \min\left(\frac{LES - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LEI}{3\sigma}\right) \quad (2)$$

Se dice que un proceso es capaz cuando está en control y cumple con un conjunto dado de especificaciones; e índices tales como Cp y Cpk son usados para medir el grado de tal capacidad en los procesos (Krishnamoorthi, 1990).

Los índices de capacidad Cp y Cpk, son apropiados para medir el progreso de los paradigmas en la mejora de calidad en el cual la reducción de variabilidad es la guía principal y el rendimiento del proceso es la primer medida de éxito (Pearn & Kotz, 2006). Sin embargo, la mayoría de los estudios de capacidad habituales tratan a los productos como si solo tuvieran una sola característica crítica, no obstante, en la realidad se tienen múltiples características críticas que son de interés en un producto.

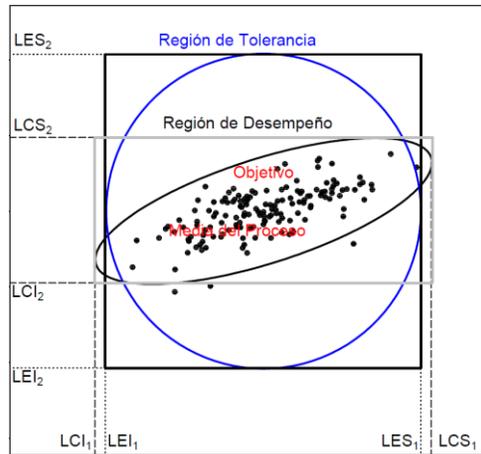
## Índices de Capacidad Multivariados

Los índices de capacidad multivariados surgieron cuando los fabricantes se dieron cuenta que una sola característica de calidad no podía representar la calidad total del producto. Usando un análisis multivariante, las variables pueden ser examinadas simultáneamente con la finalidad de acceder a las características clave del proceso que las produjo (Rencher, 2002).

Los índices de capacidad de proceso multivariable se pueden obtener a partir de la relación de una región de tolerancia a una región de proceso, la probabilidad de que el producto

no conforme y otros enfoques que utilizan funciones de pérdida o representación vectorial (Wang, et al., 2000), la mayoría de ellos asume un proceso estable y datos normalmente distribuidos (Foster, et al. 2014).

Generalmente las propuestas coinciden en que debe definirse una región de especificación que represente lo que el cliente desea y otra región de variación del proceso que muestre el desempeño que tiene el proceso como lo muestra la figura 3.

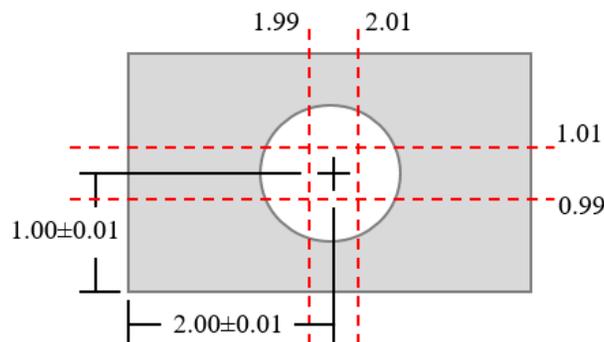


**Figura 3.** Región de proceso y región de desempeño

### Índice de Capacidad para una Posición

El dimensionamiento Geométrico y Tolerancias (GD&T, por sus siglas en inglés) es un estándar de ingeniería que proporciona una terminología unificada y metodología para describir tanto la geometría de las características del producto y sus tolerancias asociadas (Bothe, 2006). Una tolerancia posicional define la zona dentro de la cual el centro, eje o plano central de una característica de tamaño se permite variar desde una posición verdadera; la cual se define como la ubicación teóricamente exacta de una característica establecida por dimensiones básicas.

En un proceso en donde un agujero tiene que ser perforado o un perno tiene que estar situado en una posición dada, los diseñadores proporcionan una región de tolerancia, por lo general un círculo alrededor de la posición objetivo, para permitir la variabilidad en la localización del agujero o perno en la fabricación real. La figura 4 muestra una pieza producida donde se mide el punto medio de un agujero perforado con sus respectivas tolerancias posicionales.



**Figura 4.** Tolerancia de una Posición

Con el objetivo de medir la capacidad de un proceso para ubicar el centro de una perforación; los diseñadores proporcionan una región de tolerancia circular circunscrita en una zona de tolerancia cuadrada (ver figura 5).

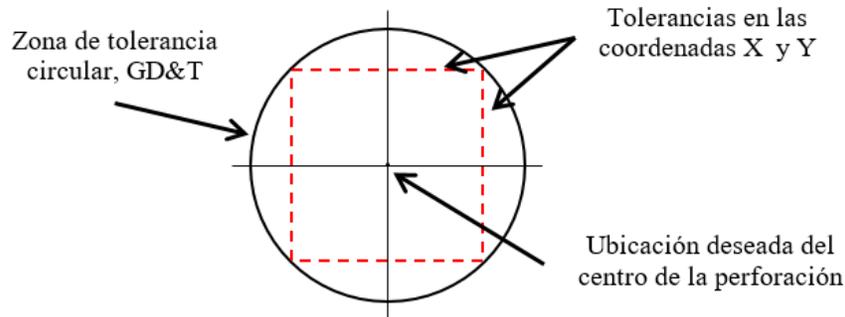


Figura 5. Región de tolerancia circular (Bothe, 2006)

## Metodología

Con la finalidad de medir el desempeño de estos procesos se han desarrollado diferentes índices de capacidad para una posición. Krishnamoorthi (1990) dedujo que podría ser apropiado comparar el área del círculo de tolerancia y el área del círculo de la variabilidad natural para obtener una medida de capacidad, al cual nombró PCp.

El índice PCp es definido por,

$$PCp = \frac{(\pi/4)D^2}{9\pi\sigma^2} = \frac{D^2}{36\sigma^2} \quad (3)$$

En donde  $D$  es el diámetro de la región de tolerancia y  $\sigma$  es la desviación estándar del

proceso. Cuando  $PCp = 1$  la variabilidad natural es igual a la variabilidad en la tolerancia. Incrementar el valor de PCp indicaría mejora en las condiciones del proceso.

Para hacer valido este índice de capacidad se asume que las desviaciones estándar de las componentes X y Y son iguales y no están correlacionadas. En la figura 6 se observa la interpretación gráfica donde se asume que la variación para los dos componentes es igual y que el centro de los centros coincide con la posición objetivo. Por lo tanto, se obtiene un círculo por región de desempeño y otro por la región de tolerancia.

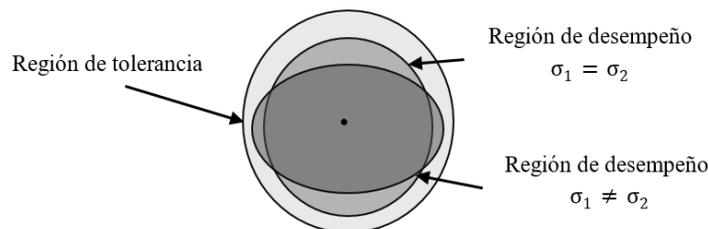


Figura 6. Interpretación grafica del índice de Krishnamoorthi  $\sigma_1 = \sigma_2$  y propuesta  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

Sin embargo, esta medida de capacidad es inapropiada cuando existe más variación en alguno de los componentes. Como se puede observar en la figura 6 en el caso en donde las desviaciones estándar son diferentes, ambos lados de la región de desempeño tienden a acercarse y alejarse de la región de tolerancia, lo que no ocurre cuando  $\sigma_1 = \sigma_2$ . La razón de esto radica en que, si las desviaciones estándar son diferentes, entonces en lugar de tener un círculo de desempeño, se tiene una elipse de desempeño.

En este artículo se proponen dos índices de capacidad considerando que las desviaciones estándar de los componentes de una posición son diferentes. Para el primer índice propuesto se considera en el comportamiento marginal de los componentes de la posición como se muestra en la figura 7. De tal manera que para el componente X el radio del desempeño está determinado por  $3\sigma_1$ . De la misma manera, para el componente Y el radio del desempeño está determinado por  $3\sigma_2$ .

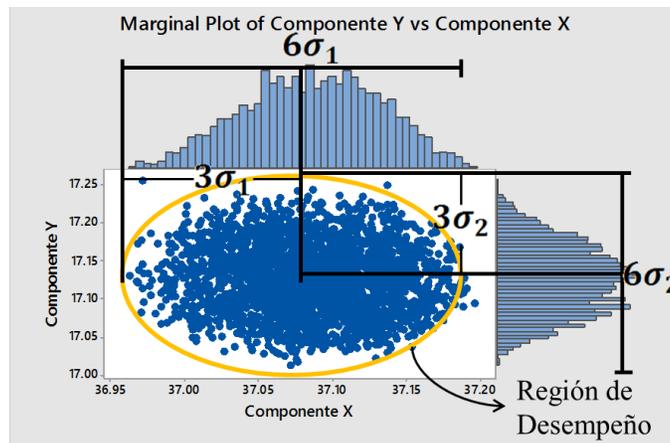


Figura 7. Representación para  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  en el primer índice propuesto

Considerando los radios marginales, entonces el área de la región de desempeño (RD) está definida como,

$$\text{Área}_{RD} = 3\sigma_1 \times 3\sigma_2 \times \pi \quad (4)$$

Considerando que el área de la región de tolerancia (RT) está expresada como  $\text{Área}_{RT} = \pi R^2$ . En donde  $R$  representa el radio de la especificación de la región de tolerancia. Entonces, el primer índice propuesto está definido de la siguiente manera,

$$ACp = \frac{\text{Área}_{RT}}{\text{Área}_{RD}}$$

Entonces,

$$ACp = \frac{\pi R^2}{3\sigma_1 \times 3\sigma_2 \times \pi} = \frac{R^2}{3\sigma_1 \times 3\sigma_2} \quad (5)$$

Un índice diferente al propuesto en (5) se puede desarrollar si se considera la desviación estándar ponderada. Esta desviación es la variación promedio de todos los puntos de datos sobre la media de su grupo (no la media general). Es un promedio ponderado de la desviación estándar de cada grupo. De manera general, desviación estándar ponderada de  $\sigma_p$ , es definida como,

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (6)$$

Considerando la desviación en (6) como una ponderación de las desviaciones estándar de los componentes de una posición. Entonces un segundo índice puede ser obtenido de la siguiente manera,

$$APCp = \frac{\pi R^2}{9\pi\sigma_p^2} = \frac{R^2}{9\sigma_p^2} \quad (7)$$

### Caso de Estudio

Para llevar a cabo el desarrollo y aplicación de los índices de capacidad para una posición propuestos anteriormente se realizó un análisis en una pieza mecánica, en la cual dos componentes definen la posición de un pin (figura 7).

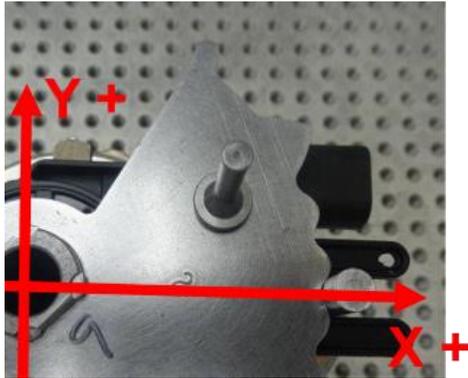


Figura 7. Pieza mecánica

De acuerdo al primer índice de capacidad propuesto (5) la región de tolerancia esta expresada como  $\text{Área}_{RT} = \pi R^2$ , la cual es definida como la posición verdadera representada por el diámetro del pin (figura 8):

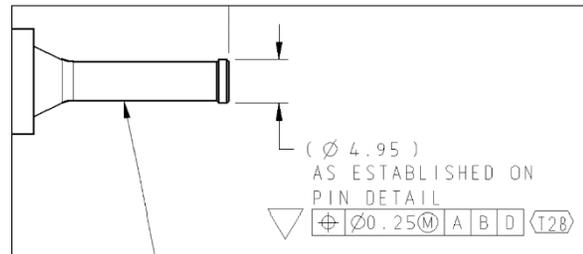


Figura 8. Región de tolerancia

Por otra parte, para definir la región de desempeño se tomaron 2,905 posiciones del pin definidas por las coordenadas X y Y, se analizaron los datos en minitab y los resultados se muestran en la tabla 1,

Variable	Total Count	Mean	SE Mean	StDev	Variance	Minimum	Median
X Component	2905	37.087	0.000845	0.0455	0.00207	36.964	37.087
Y Component	2905	17.126	0.000828	0.0446	0.00199	17.013	17.127

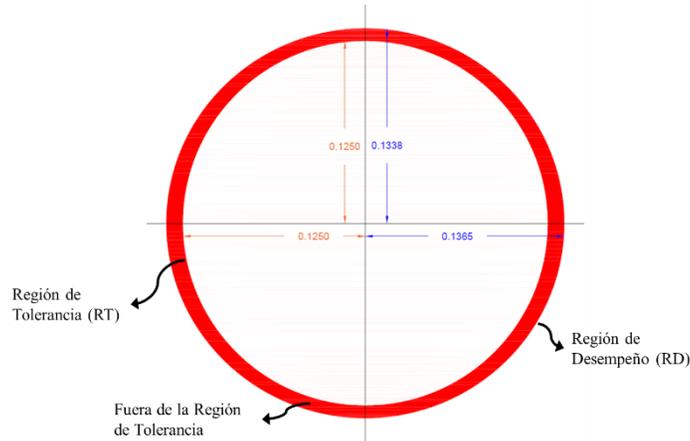
Tabla 1. Datos de caso de estudio

Estimando  $\sigma_1 = 0.0455$  para la coordenada X y  $\sigma_2 = 0.0446$  para la coordenada Y se puede determinar el índice de capacidad ACp como sigue:

$$ACp = \frac{\pi R^2}{3\sigma_1 \times 3\sigma_2 \times \pi} = \frac{\pi(0.125)^2}{3(0.0455) \times 3(0.0446) \times \pi} \therefore ACp = 0.8555$$

El índice de capacidad  $ACp = 0.8555$ , lo cual indica que la variabilidad de la región de desempeño es grande comparada con la región

de tolerancia, por consiguiente, se tiene un proceso no capaz. En la figura 9 se muestra gráficamente la interpretación del este índice.



**Figura 9.** Interpretación gráfica del índice de capacidad  $ACp$

Considerando la desviación estándar ponderada (6) en los datos anteriormente mencionados, se tiene:

$$\sigma_p = 0.0451$$

A partir de esto, se obtiene que el índice  $APCp$  (7),

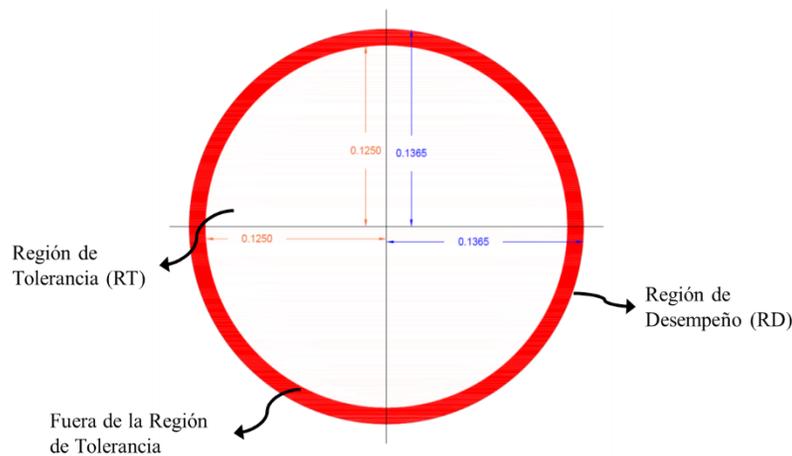
$$APCp = \frac{\pi(0.125)^2}{9\pi(0.0451)^2} \therefore APCp = \mathbf{0.8554}$$

Al igual que el índice  $ACp$ , la capacidad del proceso en el índice  $APCp$  indica que la variabilidad en la región de desempeño es mayor que la tolerancia permitida, es decir, que no todos los centros están dentro de la región de tolerancia.

De acuerdo al índice de capacidad  $PCp$  propuesto por Krishnamoorthi se considera la desviación estándar más grande de los componentes de la posición que es  $\sigma = 0.0455$ , entonces se tiene como resultado,

$$PCp = \frac{(0.25)^2}{36(0.0455)^2} \therefore PCp = \mathbf{0.8386}$$

En la figura 10 se muestra gráficamente la interpretación del índice de capacidad de Krishnamoorthi, donde se asume que el centro de los centros coincide con la posición objetivo, al mismo tiempo que la variación de las dos componentes es igual. Además que el proceso no es capaz debido a que existen centros fuera de la región de tolerancia.



**Figura 10.** Interpretación gráfica del índice de capacidad PCp (Krishnamoorthi)

## Conclusiones

Basado en el índice de capacidad PCp creado por Krishnamoorthi donde se asume que igualdad de variabilidad en las coordenadas X y Y, se proponen un par de índices de capacidad donde se considera que las desviaciones estándar de las componentes que definen el centro de una perforación no son iguales. Siempre y cuando la posición objetivo y la media de los centros coincida y que las variaciones de las coordenadas sean iguales da como resultado un círculo como región de desempeño, en caso contrario generaría un

elipse, lo cual da una comparación más correcta. También se asume que los datos obtenidos del proceso son normales y están en control estadístico. En la mayoría de los casos, la posición objetivo y la media de los centros no coincidirá y por lo tanto este índice no será capaz de detectar tales situaciones. Por lo que resulta necesario desarrollar un índice en el que se tome en cuenta el comportamiento heterogéneo de las desviaciones estándar de los componentes de la posición.

## Agradecimientos

El presente trabajo de investigación fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y

Tecnología (CONACyT).

## Referencias

Bass, I. (2007). Six Sigma Statistics with Excel and Minitab. United States of America: McGraw-Hill Companies, Inc. doi:10.1036/007148969X

Bothe, D. (2006). Assessing Capability for Hole Location. Quality Engineering, 18:325-331.

Deming, W. (1989). Productividad y Competitividad. La salida de la crisis. Cambridge University Press.

Foster, E., Barton, R., Gautam, N., Truss, L., & Tew, J. (2014, November 19). The Process-Oriented Multivariate Capability Index. International Journal of

Production Research, 37 - 41.  
doi:10.1080/00207540412331530158

Krishnamoorthi, K. (1990). Capability Indices for Processes Subject to Unilateral and Positional Tolerances. *Quality Engineering*, 2(4), 10.

Montgomery, D. (2009). *Introduction to statistical quality control* (Sixth ed.). United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Pearn, W., & Kotz, S. (2006). *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices. A Comprehensive Exposition of Quality Control Measures* (Vol. 12). Danvers, Massachusetts, USA: Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Rencher, A. C. (2002). *Methods of multivariate analysis* (Second ed.). United States of America: Wiley-Interscience.

Wang, F. K., Hubele, N. F., Lawrence, F. P., Miskulin, J. D., & Shahriari, H. (2000). Comparison of three multivariate process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 32(3), 263-275.

Zahid, M., & Sultana, A. (2008, June). Assessment and comparison on multivariate process capability indices in ceramic industry. *Journal of Mechanical Engineering*, ME39(1), 18-25.