

## Del cálculo vectorial a algunos aspectos de la geometría moderna

**From vector calculus to some aspects of modern geometry**

LEONARDO A. CANO GARCÍA

Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia

RESUMEN. En este texto ofrecemos una breve introducción a diferentes temas y resultados de la geometría moderna usando para ello preguntas intuitivas motivadas por un primer curso de cálculo vectorial.

*Key words and phrases.* vector fields, Lie bracket, Frobenius theorem, divergence, De Rham cohomology,

ABSTRACT. In this text we offer a brief introduction to various themes and results in modern geometry by using some intuitive questions motivated from a basic level vector calculus class.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification.* 51-01, 53-01, 58-01.

Nuestro objetivo en este artículo es señalar la naturaleza intuitiva de ciertos conceptos geométricos modernos, mostrando a su vez la claridad, las perspectivas y las preguntas que abre la formalización matemática de los mismos. Si bien hay múltiples textos que introducen cada uno de los conceptos tratados en este artículo, creemos que nuestro aporte está en que, dado que no estamos escribiendo un libro de texto, podemos enfatizar en la naturalidad de los conceptos. De hecho, a lo largo del texto enfatizamos más en las preguntas intuitivas alrededor de los temas, que en las respuestas formales que da la matemática: la pregunta misma parece muchas veces sugerir su respuesta, aún cuando ésta no haya sido sometida al escrutinio analítico o formal. Consideramos que muchos libros de texto oscurecen esta aproximación y que este artículo corto y más intuitivo podría ser motivador para estudiantes jóvenes, que a su vez encontrarían en él una guía para acercarse a la literatura específica y más formal, o a textos intuitivos que tratan los temas de una manera similar a la nuestra. Por otro lado en este artículo integramos de manera intuitiva temas que muchas

veces aparecen separados en la literatura, o si bien están integrados, no lo están al nivel de una primera aproximación a los temas, o no lo están todos a la vez.

El movimiento ha fascinado a la humanidad desde la antigüedad. El desarrollo del cálculo, atribuido básicamente a LEIBNIZ y NEWTON, permitió una mejor comprensión de los fenómenos dinámicos. Los *sistemas dinámicos*, que entendemos como cualquier objeto de observación sujeto a cambio, son estudiados en casi todas las ramas de la ciencia porque una pregunta fundamental es cómo cambian las cosas que están siendo observadas. En este texto mostramos cómo la formalización matemática de los *campos de fuerzas*, o *campos de velocidades*, en *campos vectoriales* está intimamente relacionada con los conceptos de *coordenada*, *rotacional*, *divergencia* y *distribución diferencial* que a su vez son herramientas naturales para entender el cambio y por ende la naturaleza.

El estudio de los conceptos antes mencionados genera preguntas naturales acerca del movimiento y el espacio y cuya respuesta muestra la mágica interacción entre geometría, análisis, física e incluso álgebra. Como veremos estos conceptos son fundamentales en geometría diferencial y análisis y a partir de ellos podemos empezar a vislumbrar las motivaciones que subyacen a ciertas ramas de la geometría contemporánea como la geometría diferencial, la topología diferencial y el control geométrico.

Durante este artículo haremos lo posible por introducir intuitivamente cada uno de los conceptos que usemos, sin asumir del lector más que el conocimiento de un curso básico de análisis vectorial; sin embargo, hacemos un ligero uso de *formas diferenciales* en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (ver [18]) y de algunos resultados de análisis matemático como el *teorema de la función implícita* (ver [4]).

Durante el texto introducimos una serie de preguntas intuitivas que consideramos guías naturales para cualquier persona que quiera adentrarse en el estudio de la geometría contemporánea, en el sentido que cada pregunta motiva la definición de nuevos conceptos o la formulación de un teorema clásico. En la Sección 1 recordamos los campos vectoriales en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y a partir de la interacción natural entre sus flujos motivamos la definición de *coordenada* o *carta local* en geometría diferencial, la introducción del *corchete de Lie* entre campos vectoriales y la definición de *variedad diferencial encajada* en  $\mathbb{R}^n$ ; finalmente mostramos la maravillosa conexión entre estos 3 conceptos: localmente los flujos de una colección de campos vectoriales linealmente independientes conforman una colección de coordenadas y por tanto una variedad diferencial. Para facilitar la intuición, en el caso de 2 campos vectoriales linealmente independientes en  $\mathbb{R}^3$ , caminar sobre sus flujos da lugar localmente a una superficie. Intuitivamente esperaríamos que el espacio tangente de dicha superficie coincidiera con el plano generado por los 2 campos vectoriales. Sin embargo esto no es así y el corchete de Lie nos muestra cómo caminar por los flujos nos podría arrastrar fuera de dichos planos. Para que los planos tangentes de la superficie coincidan con el plano generado por los campos vectoriales, es necesario que sus corchetes de Lie permanezcan en dicho plano como lo afirma el

*teorema de Frobenius* que formulamos en la Sección 2. La Sección 3, al igual que las anteriores, está fuertemente relacionada con la *teoría de control geométrico* (ver [1] [21]). En esta sección nos preguntamos qué tan lejos podemos llegar caminando por flujos asociados a campos vectoriales fijos con anterioridad; en control geométrico esta pregunta está relacionada con el alcance de un sistema de control. Por supuesto la respuesta a esta pregunta depende de cuáles son los caminos que consideramos asociados a una cierta colección de campos vectoriales (sistema de control) y tal vez la mejor respuesta a la misma sea el *teorema de Chow-Raschevsky* (ver teorema 2). En la Sección 4, dado un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  nos preguntamos qué campos vectoriales de  $U$  provienen de un potencial (pregunta 6). Antes de dar respuesta a esta pregunta, en la Sección 4.1 introducimos el rotacional y la divergencia, enfatizando su significado geométrico y terminamos dando el *teorema de Stokes* como un teorema que sintetiza los teoremas de integración asociados a divergencias y rotacionales. En la Sección 4.2 introducimos la *cohomología de De Rham* que es la herramienta con la que respondemos a cuándo un campo vectorial proviene del gradiente de una función, respuesta que no depende tanto del campo vectorial suave como de la topología del abierto  $U$ , cosas que son precisadas en esta sección.

Para abiertos de  $\mathbb{R}^3$  el complejo de De Rham es isomorfo al complejo dado por el gradiente, el rotacional y la divergencia. Para generalizar la noción de rotacional y divergencia a variedades diferenciales, es importante notar que la definición de los mismos en la Sección 4.1 usa más estructura que la netamente diferencial. Las variedades diferenciales encajadas en  $\mathbb{R}^n$  heredan la topología, la estructura diferencial, la métrica riemanniana y la orientación del mismo  $\mathbb{R}^n$ , lo que dificulta distinguir el rol que están jugando estas estructuras geométricas en la definición del gradiente, el rotacional y la divergencia en estas variedades. Es por ésto que en la Sección 5 introducimos *variedades abstractas* que, desde nuestro punto de vista, permiten una mejor distinción entre las diferentes estructuras que posee o puede poseer una variedad diferencial: topológica, diferencial, orientación, riemanniana, simpléctica, de Poisson, etc. Tal vez una definición de diccionario pequeño podría decir que gran parte de la geometría moderna estudia la interacción entre las estructuras geométricas de las variedades diferenciales y a lo largo del artículo hacemos lo posible por hacer explícitas varias estructuras geométricas y diferentes facetas de interacción entre ellas.

En nuestra última Sección 6 damos algunas perspectivas que podrían complementar los temas tratados en el artículo y que sin embargo no son tratadas en profundidad.

### 1. Campos vectoriales, coordenadas y corchete de Lie

Las nociones de *punto* e *instante* son fundamentales en el desarrollo de la formalización del movimiento usando las herramientas del cálculo (límites, derivadas, continuidad). La noción de *infinitesimal* puede ser considerada el vórtice a partir del cual se construyeron las ideas de *continuidad*, *derivada* y que pareció ser resuelto con la formalización del concepto de *límite* con epsilons y deltas. Resulta paradójico que las nociones de punto, instante e infinitesimal parezcan no tener correspondencia en el mundo físico, pues en principio no es posible capturar experimentalmente un punto en el espacio o un instante en el tiempo. Esto sin contar con que el comportamiento de la materia a escalas muy pequeñas pareciera mostrar otro tipo de geometría del espacio asociada a los fenómenos cuánticos y que la relatividad de EINSTEIN, asociada al estudio de distancias muy grandes en el espacio, indica que no puede haber una noción de espacio o tiempo absolutos. De hecho no existe todavía una teoría que unifique estas dos teorías físicas: la de lo muy cercano y la de lo muy lejano. En este artículo no nos adentraremos en este tipo de problemas, sino que asumiremos la verdad de nuestra intuición inmediata.

Intuitivamente podemos pensar un campo vectorial como una *dirección infinitesimal* para cada punto e instante de tiempo. Físicamente esta dirección infinitesimal podría entenderse como una velocidad instantánea o una fuerza que se aplica en ese instante y punto determinados. Una manera de aclarar geoméricamente lo que queremos decir con dirección infinitesimal es introducir el concepto de *espacio tangente*.

El espacio tangente de una superficie en un punto es la formalización de la idea del plano que mejor la aproxima en ese punto. Dada una superficie suave  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es posible capturar esta intuición diciendo que el espacio tangente en un punto  $p \in S$  es la colección de todos los vectores tangentes  $\frac{d}{dt}(\alpha)(0)$  a curvas suaves  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  que pasan por  $p$  en  $t = 0$ , es decir tales que  $\alpha(0) = p$ . Si cambiamos la superficie  $S$  por un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , el espacio tangente de  $\mathbb{R}^3$  en un punto  $p \in \mathbb{R}^3$  estaría dado por todo  $\mathbb{R}^3$ . Esto no es del todo correcto, geoméricamente un punto no es lo mismo que un vector tangente y debemos distinguir entre estos dos objetos. Por esta razón interpretamos cada vector tangente como la *derivada direccional* que genera. Explícitamente, cada curva suave  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  que pasa por  $U$ , genera una derivación en  $C^\infty(U)$  dada por  $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$  para  $f \in C^\infty(U)$ . Usando regla de la cadena es fácil ver que

$$\frac{d}{dt}f(\alpha)(0) = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(f) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(f) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}(f),$$

donde  $\frac{d}{dt}\alpha(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Así que el espacio tangente  $T_p U$  es el espacio vectorial 3-dimensional generado por las derivaciones  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\}$ . Similarmente para un abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $T_p U$  es el espacio  $n$ -dimensional generado por las derivaciones  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ .

**Definición 1.** Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Un campo vectorial sobre  $U$  es una función  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Usando lo dicho más arriba, dado un campo vectorial  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  podemos interpretar  $X(x, t) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$  como un elemento del espacio tangente de  $T_x \mathbb{R}^n$  de la siguiente forma  $X(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Los campos vectoriales han sido herramientas fundamentales para la comprensión de las fuerzas electromagnéticas que están presentes en casi todos los fenómenos de la naturaleza estudiados por la ciencia. Con ellos fue posible mejorar nuestra comprensión de la llamada *acción a distancia*, es decir el hecho que los fenómenos electromagnéticos o gravitacionales parecieran producirse sin una mediación material entre ellos (ver [14, capítulo II]). De hecho uno puede usar electrostática para entender las técnicas de cálculo vectorial como lo hace el libro [24].

Dado un campo vectorial suave  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  podemos pensar que si nos paramos en un punto  $p_0 \in U$  en el instante  $t = 0$ ,  $X$  nos provee de las *instrucciones infinitesimales* para movernos en cada instante de tiempo  $t > 0$ . Más específicamente nuestra intuición nos dice que para todo punto  $p_0 \in U$  existe una única curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  tal que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = X(\alpha(t)) \quad \text{y} \quad \alpha(0) = p_0. \quad (1)$$

El *teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias* nos dice que nuestra intuición es cierta por lo menos localmente. Este teorema tiene fuertes consecuencias filosóficas pues pareciera estar sugiriendo la idea de destino, el determinismo en el sentido del *espíritu de Laplace*: si existiera un espíritu capaz de conocer las condiciones iniciales de todo lo que existe, así como conocer el campo vectorial que domina su evolución, tal espíritu conocería todo el pasado y todo el futuro (ver por ejemplo [14, capítulo VI]).

La existencia y unicidad local de soluciones para el sistema (1) se puede obtener como consecuencia del *teorema de la función de contracción* (también conocido como *teorema del punto fijo*) para espacios métricos y una referencia que ilustre el análisis envuelto es por ejemplo [16, IV.1].

Observamos también que un razonamiento ingenuo podría llevarnos a pensar que las *curvas* (las soluciones de (1)) están definidas para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . Sin embargo ésto es falso como puede comprobarse con el siguiente ejemplo que nos muestra que un campo vectorial puede, en un cierto sentido, sacar la partícula del espacio en que se le permitiría moverse.

**Ejemplo 1.** Las curvas integrales del campo vectorial  $X(x, t) := x^2 \frac{d}{dx}$  en  $\mathbb{R}$  no están definidas para todo tiempo  $t$  pues sus soluciones son de la forma  $x(t) := \frac{-1}{t-c}$ . En otras palabras la partícula llega a infinito en tiempo finito.

Salvo que se diga lo contrario, a partir de ahora los campos vectoriales que usemos en el artículo serán suaves y completos, es decir tendrán flujos que están definidos para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para introducir algo más de libre albedrío, quisiéramos saber qué pasa si en lugar de tener un sólo campo vectorial sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tenemos una familia finita de campos vectoriales  $X_1, \dots, X_d$ . Podríamos suponer que esto significa que una partícula en un punto no tiene sólo una dirección infinitesimal en la cual moverse, sino varias opciones para elegir. Este tipo de estructura aparece de manera natural en el modelamiento del movimiento de objetos con algún tipo de restricción. Por ejemplo, una nave espacial que haya sufrido una avería podría ver su libertad de movimiento restringida a moverse a través de los flujos de ciertos campos vectoriales  $X_1, \dots, X_d$ .

Los flujos de algunos campos vectoriales están fuertemente relacionados con coordenadas del espacio. Por ejemplo, los campos vectoriales  $X_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}$  y  $X_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}$  definen las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^2$ . Específicamente tenemos que las coordenadas  $(t, s)$  definen el punto obtenido como  $\Psi_s^{(2)}\left(\Psi_t^{(1)}((0, 0))\right)$  donde  $\Psi_t^{(i)}(p)$  denota el flujo que pasa por  $p$  en  $t = 0$  del campo vectorial  $X_i$ . A continuación damos un ejemplo un tanto más geométrico de esta manera de obtener coordenadas.

**Ejemplo 2.** *Considere los campos vectoriales  $X_1 := \frac{\partial}{\partial \theta}$  y  $X_2 := \frac{\partial}{\partial \varphi}$  asociados a las coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$ . En coordenadas cartesianas  $X_1$  y  $X_2$  están dados por*

$$X_1(p) := (-r_0 \sin(\varphi) \sin(\theta), r_0 \sin(\varphi) \cos(\theta), 0)$$

$$X_2(p) := (r_0 \cos(\varphi) \cos(\theta), r_0 \cos(\varphi) \sin(\theta), -r_0 \sin(\varphi)).$$

*Estos vectores son vectores tangentes a la esfera  $S$  de radio  $r_0$  centrada en  $(0, 0, 0)$  en el punto  $p = (r_0 \sin(\varphi_0) \cos(\theta_0), r_0 \sin(\varphi_0) \sin(\theta_0), r_0 \cos(\varphi_0))$ . Los flujos de  $X_1$  y  $X_2$  definen coordenadas locales  $\Phi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S$  de la esfera  $S$  de radio  $r_0$  alrededor de  $p$  del siguiente modo  $\Phi(\varphi, \theta) = \Psi_\theta^{(2)}(\Psi_\varphi^{(1)}(p))$  donde  $\Psi^{(1)}$  y  $\Psi^{(2)}$  son los flujos asociados a los campos vectoriales  $X_1$  y  $X_2$ .*

Si  $X_1$  y  $X_2$  son dos campos vectoriales linealmente independientes en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$  y  $p \in U$  es un punto en el abierto, la intuición podría indicarnos que la imagen de la función  $\Phi(s, t) := \Psi_t^{(2)}(\Psi_s^{(1)}(p))$  sería precisamente una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Como veremos esta intuición no es del todo correcta. Dados un abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_1, \dots, X_k$  campos vectoriales suaves linealmente independientes definidos sobre el abierto  $U$ , y  $p \in U$ , hemos motivado la pregunta:

**Pregunta 1.** ¿Existe un abierto  $V \subset \mathbb{R}^k$  conteniendo el  $0 \in \mathbb{R}^k$  tal que la función  $\Phi : V \rightarrow U$ ,  $\Phi(t_1, \dots, t_k) = \Psi_{t_k}^{(k)}(\Psi_{t_{k-1}}^{(k-1)}(\dots \Psi_{t_1}^{(1)}(p)))$  es una carta local?

Por *coordenadas* o *cartas locales* queremos decir que  $\Phi$  es una función suave tal que:

- i)  $\Phi$  es inyectiva.
- ii) Su derivada  $d\Phi_{(t_1, \dots, t_k)}$  es inyectiva en todo punto  $(t_1, \dots, t_k) \in V$ .
- iii)  $\Phi^{-1} : \Phi(V) \rightarrow V$  es una función continua.

Las funciones  $\Phi$  que satisfacen i), ii) y iii) formalizan matemáticamente, añadiendo algunos ingredientes técnicos que el lector puede ignorar por el momento, lo que hacemos con los mapas o cartas en cartografía: asignamos a una región del planeta un pedazo de plano al que denominamos mapa, como si a cada punto del mapa correspondiera un único punto en la región del planeta. Podemos extrapolar esta noción a dimensiones superiores y pensar que así como las superficies en  $\mathbb{R}^3$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  a los que en todo punto podemos dotar de cartas, hay subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que también pueden ser descritos por cartas, conjuntos que serían como superficies sumergidas en  $\mathbb{R}^n$ . Esta formalización hace parte de lo que en matemática se denomina *geometría diferencial* y admite que hayan cartas de dimensiones superiores. Así podríamos entender subconjuntos en  $\mathbb{R}^n$  que ya no se parecen localmente a una región de un plano ( $\mathbb{R}^2$ ) sino a una región de  $\mathbb{R}^k$ . Tales subconjuntos reciben el nombre de *k-subvariedades diferenciales* de  $\mathbb{R}^n$  (ver [5, Chapter 11]).

Usando estas nociones podemos por ejemplo generalizar la noción de *esfera* a más dimensiones. Es posible mostrar que la ecuación  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r$  para  $r > 0$  define una subvariedad  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  que de hecho pensamos como la esfera  $(n-1)$ -dimensional de radio  $r$ . Podemos probar ésto usando el teorema de la función implícita que nos dice que si tenemos una función suave  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $q \in \mathbb{R}^n$  un valor regular de  $F$  entonces  $F^{-1}(q)$  es una  $m$ -subvariedad diferencial de  $\mathbb{R}^{n+m}$  (ver [5, Theorem 11.18]). El teorema de la función implícita es de hecho una buena herramienta para encontrar muchos otros ejemplos importantes de variedades diferenciales. En particular, cuando la función  $F$  es polinomial,  $F^{-1}(q)$  es también un objeto de estudio de la geometría algebraica que usa en sus fundamentos muchos conceptos provenientes de la geometría diferencial (ver [22]).

Dadas  $M$  una  $k$ -subvariedad diferencial de  $\mathbb{R}^m$  y  $N$  una  $l$ -subvariedad diferencial de  $\mathbb{R}^n$ , una función  $f : M \rightarrow N$  es suave si para todo punto  $p \in M$  existe un abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$  y una función  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  suave tal que  $\tilde{f}|_U = f$ . Podemos definir el *espacio tangente*  $T_q M$  en un punto  $q \in M$  como la colección de vectores  $\frac{d}{dt}\alpha(0)$  donde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , es cualquier curva suave tal que  $\alpha(0) = q$  y, como en el caso de superficies, cada una estas curvas  $\alpha$  es también una derivación. El espacio tangente  $T_q M$  tiene una estructura natural

de espacio vectorial. La derivada de  $f$  en el punto  $q \in M$  es una transformación lineal  $df_q : T_q M \rightarrow T_{f(q)} N$  definida por  $df_q(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$  (Figura 1).

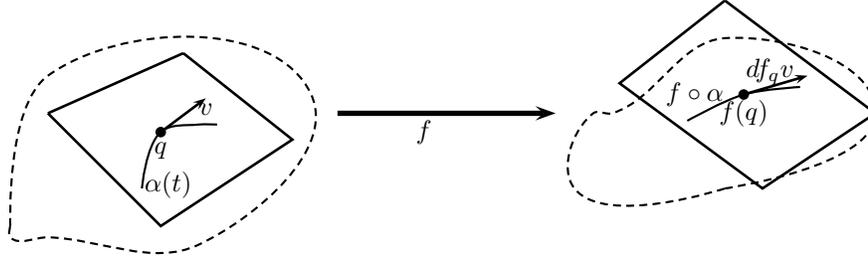


Figura 1. La derivada de una función.

Es fácil ver que la definición anterior depende tan sólo del vector  $v = \alpha'(0)$  y no de la curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ . En particular, para cada carta local dada  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , cada coordenada  $t_i$  determina un campo vectorial en  $\Phi(U) \subset M$  definido por  $d\Phi_{(x_1, \dots, x_k)}(\frac{\partial}{\partial t_i})$  que es el vector tangente a la curva  $t \mapsto \Phi(x_1, \dots, x_i + te_i, \dots, x_k)$  en el punto  $\Phi(x_1, \dots, x_k)$  en  $M$ .

Para responder la pregunta 1, nos concentraremos en el caso de 2 campos vectoriales, es decir  $\Phi(s, t) := \psi_2(\psi_1(p, t), s)$ , el caso general se puede tratar similarmente. Observamos que si  $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$  denota el flujo de un campo vectorial  $X$  sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $d\Psi_{(0,p)}$  es la matriz de bloques dada por  $(Id_p \ X_p)$  para todo  $p \in U$  (ver [16, Theorem 1.11]). Tenemos que,

$$d\Phi_{(0,0)} = d\psi_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_i} \psi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (Id_p \ X_{2,p}) \cdot \begin{pmatrix} X_{1,p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (X_{1,p} \ X_{2,p}).$$

Como los vectores  $X_{1,p}$  y  $X_{2,p}$  son linealmente independientes, el teorema de la función implícita (ver [5, Theorem 11.18]) nos garantiza que de hecho  $\Phi$  es una carta local de una 2-variedad diferencial alrededor de  $p$ . Sin embargo, en general los campos vectoriales inducidos por las coordenadas  $t_1, \dots, t_k$  no coinciden con los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$ , es decir  $d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_i})$  no es igual a  $X_i$ . De hecho en general el espacio tangente de la subvariedad definida localmente alrededor de  $p$  a través de  $\Phi$  no coincide con el generado por los vectores  $d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_1}), \dots, d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_k})$  como veremos más adelante. Estas consideraciones generan la siguiente pregunta y motivan la pregunta 3 de la siguiente sección.

**Pregunta 2.** ¿Bajo qué condiciones la función  $\Phi$  de la Pregunta 1 satisface  $d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_i$ ?

Para responder a la pregunta 2, introduciremos el concepto de *corchete de Lie* (ver [3] o [27]). Sean  $X_1$  y  $X_2$  campos vectoriales en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$

y sus flujos  $\Psi^{(1)}$  y  $\Psi^{(2)}$ . Estamos interesados en ver qué pasa si hacemos un cuadrado con los flujos, es decir queremos estudiar la curva  $\Psi_t^{(2)}\Psi_{-t}^{(1)}\Psi_t^{(2)}\Psi_t^{(1)}(p)$  (ver Figura 2).

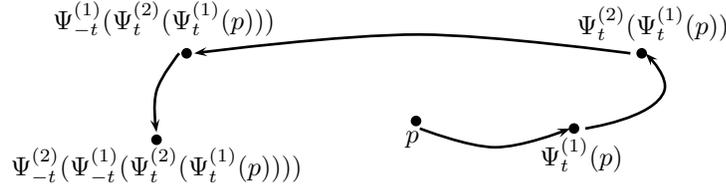


Figura 2. Un rectángulo de flujos no siempre da una curva cerrada.

Podríamos pensar que  $\Psi_t^{(2)}\Psi_{-t}^{(1)}\Psi_t^{(2)}\Psi_t^{(1)}(p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Ésto no pasa en general, ni siquiera localmente, y una obstrucción natural está dada por el corchete de Lie definido como el siguiente límite:

$$[X_1, X_2](p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^{(2)}\Psi_{-t}^{(1)}\Psi_t^{(2)}\Psi_t^{(1)}(p) - p}{t^2}.$$

Es posible mostrar que la función  $[X_1, X_2] : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial, de hecho si  $X_1 := \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$  y  $X_2 := \sum_{l=1}^n g_l(x) \frac{\partial}{\partial x_l}$  entonces

$$[X_1, X_2](x) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left( f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (g_l(x)) \frac{\partial}{\partial x_l} - g_l(x) \frac{\partial}{\partial x_l} (f_k(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

como puede verse por ejemplo en [21, Proposition 1.1.10]. Así que  $[\cdot, \cdot]$  es una operación en los campos vectoriales. Los campos vectoriales con la operación  $[\cdot, \cdot]$  satisfacen ciertas propiedades que los constituyen en un *álgebra de Lie*. Las álgebras de Lie juegan un rol muy importante en la geometría moderna pues constituyen versiones infinitesimales de simetría. Existen clasificaciones de las álgebras de Lie finito dimensionales debidas a CARTAN y las álgebras de Lie infinito dimensionales juegan un rol importante en teoría cuántica de campos.

Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $k$ -subvariedad diferencial en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  una carta de  $M$ . El espacio tangente  $T_q M$  al punto  $q \in M$  definido previamente como la colección de vectores  $\frac{d}{dt} \alpha(0)$  para alguna curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  coincide con  $d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(\mathbb{R}^k)$ . Si  $X_1, X_2 : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  son campos vectoriales del abierto  $V \subset \mathbb{R}^k$ , la función  $\tilde{X}_i(q) := d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(X_i) \in T_q M$  escoge un vector tangente en cada punto  $q \in M$  y es de hecho un campo vectorial suave de  $M$ . Para los campos vectoriales  $\tilde{X}_i : \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , inducidos por la carta  $\varphi$ , existen campos suaves  $Y_i : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $W$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  conteniendo  $\varphi(V)$  y  $Y_i|_{\varphi(V)} = \tilde{X}_i$ . Es posible mostrar

$$[Y_1, Y_2](q) = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2](q) = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}[X_1, X_2]_{\varphi^{-1}(q)}. \quad (2)$$

Ahora bien si consideramos los campos vectoriales  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$  en el abierto  $V$ , tenemos que  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ . La ecuación (2) nos muestra que para que los flujos de campos vectoriales de  $X_1, \dots, X_k$  de un abierto en  $\mathbb{R}^n$  satisfagan  $d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_i$  debe tenerse  $[X_i, X_j] = 0$ . [19, Proposition 2.1] implica que si  $[X_i, X_j] = 0$ , entonces  $d\Phi(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_i$ .

Otra interpretación del corchete de Lie es

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Psi_{(p,t)}^{-1}(Y_{\Psi(p,t)}) - Y_{p,t}}{t},$$

donde  $X, Y$  son campos vectoriales sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi$  es el flujo de  $X$  y  $p$  es un punto en  $U$  (ver [27]). En esta interpretación  $[X, Y]$  nos dice qué tanto deriva  $Y$  sobre el flujo de  $X$ . Para campos vectoriales asociados a coordenadas  $x_1, \dots, x_k$ , no hay derivación del campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  con respecto al flujo de otro campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ .

### 2. Teorema de Frobenius

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto y sean  $X_1, \dots, X_k$  campos vectoriales suaves de  $U$  linealmente independientes. Observe que los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  generan en cada punto  $p \in U$  un subespacio vectorial de dimensión  $k$  del espacio tangente  $T_p U$ .

**Pregunta 3.** ¿Dado  $p \in U$  existirá una  $k$ -variedad diferencial  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $p \in M$  cuyo espacio tangente  $T_q M$  es precisamente  $\langle X_1|_q, \dots, X_k|_q \rangle$ , el generado por los vectores  $X_1|_q, \dots, X_k|_q$  para todo  $q \in M$ ?

En realidad la pregunta 3 usa tan sólo el hecho de que los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  generan en cada punto  $q$  en el abierto  $U$  un subespacio  $\mathcal{D}_q$  del espacio tangente  $T_q U$ . Ésto motiva la siguiente definición (ver Figura 3).

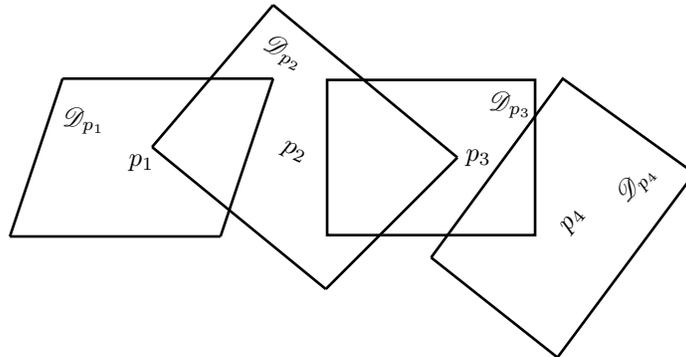


Figura 3. La distribución  $\mathcal{D}$  en los puntos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ .

**Definición 2.** Sea  $1 \leq k \leq n$ . Llamamos  $k$ -distribución de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  a una familia de espacios vectoriales  $\mathcal{D} := \{\mathcal{D}_q\}_{q \in U}$  donde  $\mathcal{D}_q \subseteq T_q U$  y  $\dim(\mathcal{D}_q) = k$  para todo  $q \in U$ .

Una  $k$ -distribución es entonces una escogencia para cada  $q \in U$  de un  $k$ -subespacio vectorial  $\mathcal{D}_q$  de  $T_q U$ . Una 2-distribución en  $\mathbb{R}^3$  sería la escogencia de un plano  $\mathcal{D}_q$  que contuviera a  $q$  para cada  $q \in \mathbb{R}^3$ . La siguiente definición formaliza la noción de suavidad para una distribución.

**Definición 3.** Sea  $\mathcal{D}$  una  $k$ -distribución de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\mathcal{D}$  es suave si y sólo si para todo  $p \in U$  existen campos vectoriales suaves  $X_1, \dots, X_k$  definidos en un cierto abierto  $V$  de  $U$  conteniendo a  $p$  tales que el subespacio generado por los vectores tangentes  $X_1|_q, \dots, X_k|_q$  es precisamente  $\mathcal{D}_q$  para todo  $q \in V$ .

Si el abierto  $V = \mathbb{R}^n$ , entonces para toda distribución suave  $\mathcal{D}$  de  $U$  es posible encontrar campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  tales que el subespacio generado por los vectores tangentes  $X_1|_q, \dots, X_k|_q$  es precisamente  $\mathcal{D}_q$  para todo  $q \in U$  (ver [21, Proposition 1.1.6.]).

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto y sea  $\mathcal{D}$  una  $k$ -distribución suave de  $U$ . Ahora podemos hacer una ligera reformulación de la pregunta 3.

**Pregunta 4.** ¿Dado  $p \in U$  existirá una  $k$ -variedad diferencial  $M$  dentro del abierto  $U$  con  $p \in M$  cuyo espacio tangente  $T_q M$  es precisamente  $\mathcal{D}_q$  para todo  $q \in M$ ?

La respuesta a esta pregunta está nuevamente relacionada con el corchete de Lie y es el famoso teorema de Frobenius. En su formulación hacemos uso de la siguiente definición.

**Definición 4.** Una  $k$ -distribución suave  $\mathcal{D}$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es involutiva si y sólo si para toda pareja de campos vectoriales  $X_1, X_2$  de  $U$  tales que  $X_1|_q, X_2|_q \in \mathcal{D}_q$  para todo  $q \in U$  se tiene que  $[X_1, X_2]|_q \in \mathcal{D}_q$ .

**Teorema 1.** (c.f [27, Theorem 1.60] Teorema de Frobenius) Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto y  $\mathcal{D}$  una  $k$ -distribución suave de  $U$ . Para todo  $p \in U$  existe una  $k$ -variedad diferencial  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $p \in M$  tal que el espacio tangente  $T_q M$  es precisamente  $\mathcal{D}_q$  para todo  $q \in M$  si y sólo si la distribución es involutiva.

Hemos visto en la sección 1 que caminar por los flujos de campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  linealmente independientes da lugar localmente a una  $k$ -variedad diferencial y que el espacio tangente de ésta puede no coincidir con el generado por los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$ . De hecho, el corchete de Lie entre parejas de los  $X_1, \dots, X_k$  nos puede mostrar cómo caminar por los flujos para escapar del generado por  $X_1, \dots, X_k$ .

**Ejemplo 3.** *Los campos vectoriales  $X_1 := \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$  y  $X_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}$  en  $\mathbb{R}^3$  generan una distribución suave no involutiva, es decir no hay una superficie en  $\mathbb{R}^3$  cuyos planos tangentes sean generados por los campos vectoriales  $X_1$  y  $X_2$ .*

### 3. El alcance en los sistemas de control

Sea  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^m$  y sean  $X_1, \dots, X_k$  campos vectoriales suaves cuyos flujos están definidos para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . Nuestro siguiente objetivo es formalizar matemáticamente la pregunta:

**Pregunta 5.** *¿Qué tan lejos podemos llegar caminando por los caminos que nos ofrecen los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$ ?*

Primeramente por un *camino* podemos entender cierta concatenación de los flujos  $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(k)}$  asociados a los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  como explicamos a continuación. Sean  $(c_0, \dots, c_n) \in \{1, \dots, k\}^n$  y  $(s_0, \dots, s_n) \in [0, \infty)^n$ , suponemos que  $c_i \neq c_{i+1}$  para todo  $0 \leq i \leq n - 1$ . Dado un punto inicial  $p_0 \in U$ , intuitivamente la  $(n + 1)$ -tupla  $(c_0, \dots, c_n)$  indica sobre qué flujo caminará una partícula en cada paso y la  $(n + 1)$ -tupla  $(s_0, \dots, s_n)$  los tiempos que caminará sobre el flujo en cada paso. Así, en el paso 0 escogeremos el flujo asociado al campo vectorial  $X_{c_0}$  y caminaremos un tiempo  $s_0$ , luego en el punto  $p_1 := \Psi^{(c_0)}(p_0, s_0)$  continuaremos caminando sobre el flujo  $\Psi^{(c_1)}(p_1, s_1)$  un tiempo  $s_1$  hasta el punto  $p_2 := \Psi^{(c_2)}(p_1, s_1)$  y así sucesivamente. De este modo podemos definir un camino

$$\Psi_{c,s}(p_0, \cdot) : [0, s_1 + \dots + s_n] \simeq [0, s_0] \bigsqcup_{s_0,0} \dots \bigsqcup_{s_{n-1},0} [0, s_n] \longrightarrow U$$

definido por

$$\Psi_{c,s}|_{[0,s_i]}(p_0, r) = \Psi^{(c_i)}(p_i, r) \quad \text{para todo } r \in [0, s_i],$$

donde estamos identificando  $[0, a] \bigsqcup_{a,0} [0, b]$  con el intervalo  $[0, a + b]$  (Figura 4).

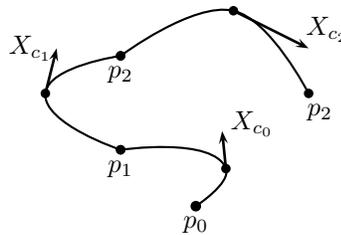


Figura 4. Camino de configuración  $(c_0, c_1, c_2)$  con tiempos  $(s_0, s_1, s_2)$ .

Observamos que las parejas  $(c, s)$  están definiendo patrones de movimiento asociados a los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$ .

Dados los caminos subindizados por los patrones de movimiento  $(c, s)$  y un punto  $p_0 \in U$ , el alcance de  $p_0$  a través de los caminos  $\varphi_{c,s}$  en el tiempo  $t$  estaría dado por el conjunto

$$\bigcup_{(c,s)} \{\varphi_{c,s}(p_0, t) : 0 \leq t \leq \bar{s}\}$$

donde  $\bar{s} = s_0 + \dots + s_n$ . Podemos definir similarmente el alcance de un subconjunto  $A$  de  $U$ . Estos conceptos fueron usados en [9] para dar sentido a la intuición de un grafo continuo (variedad dirigida) y adaptar la noción de influencias indirectas de grafos discretos a variedades dirigidas.

**Ejemplo 4.** Si  $U := \mathbb{R}^3$ ,  $X_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $X_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}$ . El alcance de un punto  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  está dado por

$$\{(x, y, a_3) : x \geq a_1 \text{ y } y \geq a_2\}.$$

Podemos escoger otras colecciones de caminos asociados a  $X_1, \dots, X_k$ . Por ejemplo, los caminos  $\varphi_{c,s}$  que escogimos previamente tenían la restricción que la  $(n+1)$ -tupla  $s$  estuviera compuesta de elementos positivos. Podemos relajar esta condición, admitiendo que algunos o todos los  $s_i$  de la  $(n+1)$ -tupla  $s$  sean negativos.

Los caminos admitidos por la configuración  $(c, s)$  podrían resultar muy restrictivos. Para una mayor generalidad es posible considerar cualquier camino  $\alpha : [0, T] \rightarrow U$  tal que sus velocidades  $\alpha'(t)$  están en el plano generado por los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$ . En fórmulas quisiéramos que para todo  $t \in [0, T]$  existieran  $a_1(t), \dots, a_k(t) \in \mathbb{R}$  tales que

$$\alpha'(t) = a_1(t)X_1(\alpha(t)) + \dots + a_k(t)X_k(\alpha(t)). \quad (3)$$

La anterior formulación no es del todo precisa, por ejemplo no hemos dicho nada acerca de la regularidad que pedimos a  $\alpha$  o qué condiciones pedimos a las funciones  $a_1(t), \dots, a_k(t)$ . La precisión o formalización que bosquejamos a continuación necesitaría que nos adentráramos aún más en el análisis matemático, ya que usa herramientas de teoría de la medida y análisis funcional que se escapan a esta primera introducción a los temas. En todo caso consideramos que el bosquejo de estas ideas puede ayudar a que se empiece a intuir cómo se usan las herramientas del análisis matemático en este contexto.

Consideraremos caminos  $\alpha : [0, T] \rightarrow U$  que satisfacen la ecuación (3) para  $a \in L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$ . A continuación describiremos el espacio de funciones  $L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$ . Este espacio es obtenido al completar  $C_c^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ , el conjunto de todas las funciones suaves de  $U$  a  $\mathbb{R}^k$  con soporte compacto. Por completar entendemos un procedimiento similar al que se hace con los números racionales para obtener los reales. Más precisamente tomamos todas las *sucesiones de*

*Cauchy* y les asignamos un punto al cual convergen. Para definir sucesión de Cauchy necesitamos por supuesto una métrica, en el caso de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$  esta métrica está dada por la norma  $\|f\|^2 := \int_U |f|^2(x) dx$  que como se puede ver está bien definida para  $f \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ . Siendo más formales  $L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$  no es un espacio de funciones, sino un espacio construido a través de límites de funciones. También podría decirse que es un espacio de funciones medibles que se consideran iguales si coinciden salvo posiblemente en un conjunto de medida cero. Para aprender más sobre este tipo de construcciones y su importancia en la solución de ecuaciones diferenciales de la física matemática véase [11] y [20].

Dada una función  $a \in L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$  quisiéramos asegurar que siempre existe una función  $\alpha$  satisfaciendo la ecuación (3). Si bien no podemos afirmar esto para toda  $a \in L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$ , sí podemos decir que para todo  $x \in U$  existe un abierto  $\mathcal{U}_{x,T}$  en  $L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$  tal que para toda función  $a \in \mathcal{U}_{x,T}$  existe un único camino  $\alpha : [0, T] \rightarrow U$  que satisface (3) y tal que  $\alpha_a(0) = x$  (ver [21, Proposition 1.2.2]). Es posible tomar el abierto  $\mathcal{U}_{x,T}$  de modo que haya una correspondencia biunívoca entre los caminos absolutamente continuos con  $\alpha(0) = x$ , cuya derivada es tangente a la distribución generada por los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  y tales  $\int_0^T |\alpha'(t)| dt < \infty$  y los caminos obtenidos como solución de (3) para alguna  $a \in L^2([0, T], \mathbb{R}^k)$  (ver [21]Section 1.2). Estos últimos caminos reciben el nombre de **caminos horizontales**.

El alcance de los caminos horizontales comenzando en un punto  $x \in U$ , está relacionado con la *función punto final*  $E : \mathcal{U}_{x,T} \rightarrow U$  definida por  $E(a) := \alpha_a(T)$  donde  $\alpha_a$  es el camino satisfaciendo (3) y  $\alpha(0) = x$ . Es posible demostrar que la imagen de  $E$  es abierta siempre que la distribución asociada a los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  es no involutiva (ver [21, Proposition 1.4.1]). De este hecho se puede deducir el siguiente teorema.

**Teorema 2.** (c.f [21, Theorem 1.4.] Teorema de Chow-Rashevsky) *Si los campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  definidos sobre el abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  generan una distribución no involutiva y el abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es conexo, entonces para todo  $T > 0$  y para todo  $x, y \in U$  existe  $a \in \mathcal{U}_x$  tal que  $E(a) = \alpha_a(T) = y$ .*

El teorema no sólo nos dice que es posible llegar de un punto a otro del abierto  $U$  a través de caminos horizontales, sino que dados  $x, y \in U$  y un tiempo  $T > 0$  podemos encontrar caminos horizontales asociados a la distribución del ejemplo 3 que los unan en exactamente dicho tiempo  $T > 0$ .

#### 4. Campos vectoriales y potenciales

Una herramienta para entender campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$  son las *integrales de línea*. Si interpretamos el campo vectorial  $X$  como un campo de velocidades, intuitivamente una integral de línea sobre una curva dada  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  nos dice qué tanto de las velocidades dadas por el campo vectorial es usado al recorrer la curva parametrizada  $\alpha$ . Si interpretamos el campo vectorial  $X$  como

un campo de fuerzas, la integral de línea sobre  $\alpha$  nos da el trabajo ejercido por la trayectoria  $\alpha$ , que nos diría qué tanto de la fuerza ayudó o se opuso a recorrer la curva parametrizada  $\alpha$ . Matemáticamente una integral de línea del campo vectorial  $X$  sobre la curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  está dada por la integral  $\int_a^b \langle \alpha'(t), X_{\alpha(t)} \rangle dt$ . En física juegan un rol importante los campos vectoriales que son gradientes de alguna función a la que se le llama potencial.

**Ejemplo 5.** *El campo gravitacional asociado a una densidad de masa dada por una función  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$  está dado por menos el gradiente del potencial  $-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{G}{|x-r|} \rho(x) dx$ , donde  $G$  es la constante gravitacional. En electrostática el campo eléctrico asociado a una cierta distribución de carga  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por el gradiente del potencial  $\Phi(r) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{|r-r'|} \frac{dr}{4\pi\epsilon_0}$ .*

Parte de la importancia de los campos vectoriales  $X$  que satisfacen  $\nabla(f) = X$  para alguna función  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está dada porque sus integrales de línea no dependen de los caminos sobre los que se integran sino tan sólo dependen de sus puntos iniciales y finales, como se puede ver de la siguiente aplicación de la regla de la cadena:

$$\int_a^b \langle \alpha'(t), X_{\alpha(t)} \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Como consecuencia de estas consideraciones el trabajo del campo gravitacional o el campo eléctrico del ejemplo 5 no depende de la trayectoria sino tan sólo de evaluar sus puntos iniciales y finales en sus respectivos potenciales.

**Pregunta 6.** *¿Dado un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y un campo vectorial  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe una función potencial, es decir existe  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla(f)(x) = X_x$  para todo  $x \in U$ ?*

Asombrosamente la respuesta a la pregunta anterior no depende del campo vectorial  $X$  sino de la topología del abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y antes de decir algo más acerca de esto en la siguiente sección recordaremos brevemente el rotacional y la divergencia, funciones naturales de los campos vectoriales.

**4.1. Rotacional y divergencia.** El *rotacional* de un campo vectorial como su nombre lo indica mide en promedio qué tanto rotaría infinitesimalmente una partícula debido al campo vectorial. Por su parte la divergencia mide en promedio qué tanto del flujo escapa de una región que se hace cada vez más pequeña.

Sea  $\gamma(t) := (x, y) + r(\cos(\frac{t}{r}), \sin(\frac{t}{r}))$  una parametrización por longitud de arco de la circunferencia centrada en  $(x, y)$  y de radio  $r$ . Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial suave en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que el rotacional  $\text{rot}(X)$  está definido por

$$\text{rot}(X)(x, y) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \langle \gamma'(t), X_{\gamma(t)} \rangle dt.$$

Observamos que el producto interno  $\langle \gamma'(t), X_{\gamma(t)} \rangle$  mide la proyección del vector  $X_{\gamma(t)}$  en la dirección  $\gamma'(t)$ , así que la integral de esta cantidad nos dice qué tanto del campo vectorial  $X$  gira con la circunferencia  $\gamma$  en razón del área encerrada por la circunferencia  $\gamma$ . El signo de  $\text{rot}(X)$  está relacionado con la orientación de la curva  $\gamma$ . Un buen ejercicio es probar que si  $X := a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  entonces

$$\text{rot}(X)(x) := \frac{\partial}{\partial y} a_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} a_2(x, y).$$

En realidad, usando el teorema de diferenciación de Lebesgue (ver [11, Theorem 3.21]), es posible considerar familias de curvas cerradas  $\gamma(t, r) : [a_r, b_r] \rightarrow U$  más generales en cuyo interior esté el punto  $(x, y)$  y tales que el área  $A_r$  que encierran tienda a 0 cuando  $r$  tiende a 0, y satisfagan

$$\text{rot}(X)(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|A_r|} \int_{a_r}^{b_r} \langle \gamma'(t), X_{\gamma(t)} \rangle dt.$$

Es importante notar que en la definición del rotacional tan sólo usamos la orientación del plano  $\mathbb{R}^2$  (expresada en la orientación de las curvas  $\gamma$ ) y el producto interno de  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  un abierto y sea  $X$  un campo vectorial en  $U$ . Sea  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que pensaremos como un punto fijo. Dado un vector unitario  $n \in \mathbb{R}^3$ , el campo vectorial  $X$  genera un campo vectorial  $\tilde{X}$  sobre el plano  $\Pi$  que pasa por  $(x, y, z)$  y tiene vector normal  $n$ . Podemos dotar a  $\Pi$  de la orientación, entendida como una clase de equivalencia de las bases, que junto con el vector normal  $n$  conforma una base compatible con la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Como el plano  $\Pi$  hereda un producto interno de  $\mathbb{R}^3$ , el rotacional de  $\tilde{X}$  está bien definido. El rotacional de este campo vectorial sobre el plano ortogonal a  $X$  está dado por el producto punto  $\text{rot}(X)(x, y, z) \cdot n$ . De este modo podemos interpretar  $\text{rot}(X)(x, y, z)$  como un vector en  $\mathbb{R}^3$  cuya dirección es una normal al plano  $\Pi$  en donde el campo vectorial  $\tilde{X}$  (la proyección de  $X$ ) tiene un rotacional máximo y su magnitud es precisamente la magnitud del rotacional de este  $\tilde{X}$ . Más aún el vector  $\text{rot}(X)(x, y, z)$  codifica todos los rotacionales posibles de los planos que contienen al punto  $(x, y, z)$  que podemos rescatar haciendo el producto punto de  $\text{rot}(X)(x, y, z)$  por la normal del plano (orientado) en cuestión. Como sabemos de nuestros cursos de cálculo vectorial dicho vector se puede calcular como

$$\text{rot}(X) = \nabla \times X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

donde  $X(x, y, z) = F_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + F_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + F_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ .

La *divergencia* de un campo vectorial  $X$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$  está dada por

$$\text{div}(X)(x, y) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \langle n_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)} \rangle dt$$

donde  $\gamma$  es la parametrización por longitud de arco de la circunferencia centrada en  $(x, y)$  de radio  $r$  y  $n_{\gamma(t)}$  es la normal a dicha circunferencia en el punto  $\gamma(t)$ .

Es un buen ejercicio probar que si  $X = a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$

$$\operatorname{div}(X)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} a_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} a_2(x, y).$$

Similarmente si  $X$  es un campo vectorial en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$\operatorname{div}(X)(x, y, z) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_r(x, y, z))} \int_{S_r(x, y, z)} \langle n, X \rangle dA \quad (4)$$

donde  $B_r(x, y, z)$  es la bola cerrada de radio  $r$  centrada en  $(x, y, z)$ ,  $S_r(x, y, z)$  su frontera (la esfera de radio  $r$ ) y  $dA$  la forma de área de  $S_r(x, y, z)$ . Si  $X_{(x, y, z)} = \sum_{i=1}^3 a_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces

$$\operatorname{div}(X)(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y, z).$$

La divergencia y el rotacional tienen los siguientes teoremas de integración que generalizan el teorema fundamental del cálculo. Sea  $C$  una curva suave, cerrada, simple y positivamente orientada en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\Omega$  la región encerrada por  $C$ . Si  $X$  un campo vectorial suave definido sobre  $\Omega$ , el *teorema de Green* nos dice

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(X) dx dy = \oint_C X(s) ds.$$

Hablando de manera un tanto informal, la integral de los rotacionales infinitesimales del campo vectorial  $X$  en la región  $\Omega$  es igual al rotacional total de  $X$  en la curva cerrada  $C$  que encierra dicha región. Similarmente tenemos una versión del teorema de la divergencia en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dx dy = \int_C X(s) \cdot n(s) ds$$

donde  $n(s)$  es el vector normal a la curva  $s$  que apunta hacia afuera de la región  $\Omega$ . Nuevamente tenemos que la integral de la cantidad de flujo de  $X$  que está escapando infinitesimalmente en la región  $\Omega$  es igual a la cantidad de flujo de  $X$  que escapa en la curva cerrada  $C$ .

Si  $V$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  encerrado por una superficie compacta suave  $S$  entonces el teorema de la divergencia, también conocido como *teorema de Gauss*, nos garantiza que

$$\int_V \operatorname{div}(X) dx dy dz = \int_S X(w) \cdot n(w) dA(w)$$

donde  $dA$  denota el diferencial de área de la superficie  $S$  y  $n(w)$  el vector normal apuntando hacia fuera del volumen  $V$ . Similarmente si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una

superficie con frontera  $\partial S$ , una curva suave,

$$\int_S \text{rot}(X)dA = \oint_{\partial S} X(s)ds,$$

donde hemos dejado de lado algunos tecnicismos importantes respecto a las orientaciones de  $S$  y  $\partial S$ , sin embargo básicamente la ecuación anterior quiere decir que la integración de los rotacionales infinitesimales del campo vectorial  $X$  sobre una superficie  $S$  son iguales a la cantidad que rota  $X$  sobre la curva frontera  $\partial S$ .

El lenguaje de formas diferenciales, del cual damos un rápido resumen en el Apéndice A, nos permite ver todos los teoremas de integración anteriores como un caso particular de un sólo teorema, el *teorema de Stokes*. A continuación damos una versión rápida de los ingredientes del enunciado del teorema de Stokes. Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$  con frontera que sin formalizar demasiado es una variedad diferencial cuyas cartas tienen como dominio subconjuntos de  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n : x_n \geq 0)\}$  (ver [5, Chapter 11]). En la figura 4 se bosqueja una variedad de dimensión 2 con frontera.

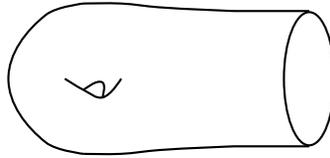


Figura 4. Una superficie con frontera.

Una  $k$ -forma diferencial  $\omega(p)$  es una función multilineal alternante de  $T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  para todo  $p \in M$ . Existe un operador diferencial  $d$  llamado *derivada exterior* que envía  $k$ -formas diferenciales en  $(k+1)$ -formas diferenciales. Es posible integrar  $n$ -formas diferenciales de  $n$ -variedades diferenciales. Si  $\omega$  es una  $(n-1)$ -forma de  $M$ , la siguiente igualdad es conocida como el teorema de Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

donde  $\partial M$ , la frontera de  $M$ , es una  $(n-1)$ -variedad diferencial. En el Apéndice A explicamos un poco más cuidadosamente los ingredientes del teorema de Stokes.

**4.2. Cohomología de De Rham.** Para responder la pregunta 6 empezamos por observar que si un campo vectorial  $X$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  es el gradiente de una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $\text{rot}(f) = 0$ . Ésto se tiene pues en el caso que  $f$  es suave  $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f$ . Así que todo campo  $X = \nabla(f)$  tiene rotacional 0 y hemos encontrado una condición necesaria para dar una respuesta afirmativa a la pregunta 6.

Si denotamos por  $\text{Ker}(\text{rot})$  la colección de campos suaves  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que  $\text{rot}(X) = 0$ , es fácil ver que  $\text{Ker}(\text{rot})$  es un espacio vectorial. Denotaremos  $\text{Im}(\nabla)$  a la colección de todos los campos vectoriales  $X$  tales que existe una función potencial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir tal que  $\nabla f = X$ . Una reformulación natural de la pregunta 6 es:

**Pregunta 7.** ¿Es  $\frac{\text{Ker}(\text{rot})}{\text{Im}(\nabla)} \neq 0$  para un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ ?

En la pregunta 7 asumimos que el lector está familiarizado con el cociente de un espacio vectorial  $V$  por un subespacio  $W \subseteq V$ . Además denotaremos  $H^1(U) := \frac{\text{Ker}(\text{rot})}{\text{Im}(\nabla)}$ . Si  $H^1(U) = 0$ , entonces todo campo vectorial  $X$  de  $U$  con rotacional 0, es igual a  $\nabla(f)$  para alguna  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

El espacio vectorial  $H^1(U)$  resulta ser un invariante topológico en el sentido que si  $U$  y  $V$  son abiertos de  $\mathbb{R}^2$  los cuales se pueden deformar el uno en el otro de manera continua y sin rompimientos, entonces  $H^1(U) = H^1(V)$ . Es en este sentido que la respuesta a la pregunta 6 depende de la topología del abierto  $U$  en cuestión.

Para formalizar la noción de dos abiertos deformables sin rompimientos, introducimos el concepto de *homotopía entre funciones*. Sea  $f : U \rightarrow V$  y  $g : U \rightarrow V$  decimos que  $f$  es homotópica a  $g$  si existe  $F : U \times [0, 1] \rightarrow V$  continua tal que  $F(u, 0) = f(u)$  y  $F(u, 1) = g(u)$ . Decimos que el abierto  $U$  es homotópico al abierto  $V$  si existen  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow U$  tales que  $f \circ g$  es homotópica a  $\text{id}_V$  y  $g \circ f$  es homotópica a  $\text{id}_U$ . La noción de abiertos homotópicos es una relación de equivalencia que formaliza la noción de dos abiertos deformables sin rompimientos.

Para responder a la pregunta 7, podemos observar que si  $U := \mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$  es el abierto obtenido de restar a  $\mathbb{R}^2$   $n$ -puntos, entonces  $H^1(U) \cong \mathbb{R}^n$ . El lector interesado puede consultar técnicas para calcular la cohomología de De Rham en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y variedades en [18].

En el caso que  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , si tenemos un campo vectorial suave  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\nabla(f) = X$  para alguna  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  suave, entonces  $\text{rot}\nabla(f) = 0$  y nuevamente podemos definir  $H^1(U) := \frac{\text{Ker}(\text{rot})}{\text{Im}(\nabla)}$ . Es posible mostrar que si un campo vectorial  $X$  es el rotacional de otro  $Y$ , entonces  $\text{div}(X) = 0$  en otras palabras  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$  y podemos definir  $H^2(U) := \frac{\text{Ker}(\text{div})}{\text{Im}(\text{rot})}$ . Tenemos que  $H^1(U)$  y  $H^2(U)$  son invariantes homotópicos en el mismo sentido que  $H^1(U)$  en el caso bidimensional. Además de  $H^1(U)$  y  $H^2(U)$  podemos definir  $H^0(U) := \text{Ker}(\nabla)$  (lo que también aplica en el caso bidimensional) que también es un invariante homotópico cuya dimensión como espacio vectorial cuenta el número de componentes conexas del abierto  $U$ . Observamos además que  $H^2(U)$  nos dice cuándo un campo vectorial es el rotacional de otro campo vectorial.

**Pregunta 8.** ¿Es posible generalizar las nociones de rotacional y divergencia a dimensiones mayores que 3?

La respuesta que daremos a continuación usa nuevamente el lenguaje de formas diferenciales (ver *Ápndice A*) que usamos al generalizar los teoremas de integración (mencionados al final de la *Sección 4.1*) en el teorema de Stokes.

Denotemos por  $\Omega^k(U)$  todas las  $k$ -formas suaves del abierto  $U$  para  $k \geq 1$  y  $\Omega^0(U) := C^\infty(U)$ . En el *Ápndice A* definimos el operador *derivada exterior*  $d^{(k)} : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ . En el caso que  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , el operador  $d^{(1)} : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  es isomorfo al gradiente  $\nabla : \Omega^0(U) \rightarrow \Gamma(TU)$  donde  $\Gamma(TU)$  denota todos los campos vectoriales de  $U$ . Observe que los elementos de  $\Gamma(TU)$  son funciones  $X : U \rightarrow TU$  tales que  $X_x \in T_xU$ , mientras que los elementos de  $\Omega^1(U)$  son funciones  $\omega : U \rightarrow T^*U$  tales que  $\omega_x \in T_x^*U$  donde  $T_x^*U$  es el dual del espacio vectorial  $T_xU$ , es decir la colección de funciones lineales  $\alpha : T_xU \rightarrow \mathbb{R}$ . Los espacios vectoriales  $T_xU$  y  $T_x^*U$  son isomorfos via un isomorfismo inducido por el producto bilineal de  $\mathbb{R}^2$  que a su vez induce un isomorfismo entre  $d^{(1)}$  y  $\nabla$ , en el sentido que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) \\ \downarrow id & & \downarrow i_\# \\ C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(TU) \end{array}$$

donde  $\Gamma(TU)$  denota la colección de todos los campos vectoriales suaves. Dado un espacio vectorial  $V$  con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , el isomorfismo  $i_b : V \rightarrow V^*$  definido por  $i_b(v) := \langle \cdot, v \rangle$  es inverso al isomorfismo  $i_\#$  que induce el isomorfismo  $i_\# : \Omega^1(U) \rightarrow \Gamma(TU)$  que usamos en el diagrama. Específicamente en nuestro caso  $\nabla(f) = i_\# \circ d(f)$  es el campo vectorial  $X_f$  tal que  $df(Y) = \langle X_f, Y \rangle$  para todo campo vectorial  $Y$  de  $U$ .  $i_b$  e  $i_\#$  se conocen como *isomorfismos musicales*.

La forma  $dx_1 \wedge dx_2$ , conocida como *forma volumen*, es un generador del espacio 1-dimensional  $\Lambda^2 T_xU$  para todo  $x \in U$ . Este hecho nos da un isomorfismo  $i : \Omega^2(U) \rightarrow C^\infty(U)$  del cual deducimos que  $\text{div}$  y  $d^{(1)}$  son isomorfas en el sentido que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(U) & \xrightarrow{d^{(1)}} & \Omega^2(U) \\ \downarrow id & & \downarrow i \\ \Gamma(TU) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \end{array}$$

Cuando  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d^{(1)}} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d^{(2)}} & \Omega^3(U) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow id & & \downarrow i_\# & & \downarrow j & & \downarrow i & & \\
0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(TU) & \xrightarrow{\text{rot}} & \Gamma(TU) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde los isomorfismos verticales  $i_\#$  e  $i$  se generalizan fácilmente del caso 2-dimensional y debemos decir algo acerca del isomorfismo  $j$  entre  $\Omega^2(U)$  y  $\Gamma(TU)$ . El producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  y el producto cruz  $\times$  entre vectores definen el isomorfismo  $\tilde{j} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$  como  $\tilde{j}(v)(w_1, w_2) := \langle w_1 \times w_2, v \rangle$ , cuyo inverso denotaremos por  $j$ , que induce el isomorfismo  $j : \Omega^2(U) \rightarrow \Gamma(TU)$ . Así que, dada una 1-forma  $\omega$ , su derivada exterior  $d\omega$  puede entenderse como el rotacional del campo vectorial  $X_\omega := i_\#(\omega)$  en el sentido que el vector  $j(d\omega)$  es el vector  $Y_{d\omega}$  tal que  $j(d\omega)(Z_1, Z_2) = \langle Z_1 \times Z_2, Y_{d\omega} \rangle$  para toda pareja de campos vectoriales  $Z_1$  y  $Z_2$ , y se tiene  $\text{rot}(X_\omega) = Y_{d\omega}$ .

Es posible mostrar que el operador derivada exterior definido sobre formas de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  satisface  $d^2 := d^{(k+1)}d^{(k)} = 0$ , lo que implica que la cadena de homomorfismos

$$0 \rightarrow \Omega^0(U) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^k(U) \xrightarrow{d^{(k)}} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d^{(k+1)}} \dots \xrightarrow{d^{(n-1)}} \Omega^n(U) \rightarrow 0$$

es un *complejo de cadenas* (ver [18]). Este tipo de complejos son el objeto de estudio del álgebra homológica. En particular a cualquier complejo de cadenas podemos asociarle una homología, que en nuestro caso está dada por  $H^k(U) := \frac{\text{Ker}(d^{(k)})}{\text{Im}(d^{(k)})}$  y se conoce como la *cohomología de De Rham* que también resulta ser un invariante homotópico dentro de la categoría de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Para  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ , las 1-formas  $\Omega^1(U)$  siguen siendo isomorfas a los campos vectoriales  $\Gamma(TU)$  a través del isomorfismo  $i_\#$ , y el gradiente de una función  $f$  satisface  $\nabla(f) = i_\#(df)$ . El complejo de cadenas de las formas diferenciales del abierto  $U$  resuelve la pregunta 8 en cuanto nos dice, al nivel de las formas diferenciales, quiénes deberían ser los operadores diferenciales que generalizarían o remplazarían al rotacional y la divergencia. Sin embargo, cabría señalar que esta respuesta no hace patente de manera directa la interpretación geométrica que tienen el rotacional y la divergencia en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  y que subyace a las mismas definiciones de estos operadores dadas en la sección 4.1.

A continuación rescatamos un poco de la interpretación geométrica del rotacional en abiertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  para  $n \geq 3$ . Si  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^3$ , dado un campo vectorial de  $U$  y un punto  $p \in U$ , sobre cada plano orientado  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$  conteniendo al punto  $p$ , proyectábamos el campo vectorial  $X$  sobre  $\Pi$  obteniendo un campo vectorial  $\tilde{X}$  sobre el plano  $\Pi$ . Entonces podíamos calcular el rotacional de  $\tilde{X}$  en  $p$  y teníamos la igualdad  $\text{rot}(\tilde{X}) = \langle n, \text{rot}(X)_p \rangle$ . Donde observamos que el término de la izquierda es un número porque  $\tilde{X}$  es

un campo vectorial de un plano. Esta última igualdad nos sirve de motivación para extender la noción de rotacional a dimensiones mayores que 3.

Considere a  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 3$  y  $X$  un campo vectorial en  $U$ . Sean  $p \in U$  y  $\Pi$  un plano orientado en  $\mathbb{R}^n$  conteniendo a  $p$ . Recordamos que por un plano en  $\mathbb{R}^n$  entendemos la colección de puntos  $q \in \mathbb{R}^n$  que podemos obtener como  $q = p + tu + sv$  donde  $u$  y  $v$  son vectores fijos en  $\mathbb{R}^n$  y  $t$  y  $s$  son parámetros reales. Podemos proceder como en el caso 3 dimensional y proyectar el campo vectorial  $X$  sobre  $\Pi$  obteniendo un campo vectorial  $\tilde{X}$ . En la sección 4.1 vimos que para definir el rotacional de campos vectoriales sobre abiertos en  $\mathbb{R}^2$  sólo se usa el producto interno y la orientación, como  $\Pi$  tiene un producto interno y orientación, entonces podemos calcular  $\text{rot}(\tilde{X})$ . Así que el rotacional debería ser una función que a un plano orientado  $\Pi$  le asigna el número  $\text{rot}(\tilde{X})$ . Observamos que si  $w_1$  y  $w_2$  vectores en  $\Pi$  conforman una base ortonormal del plano  $\Pi$  y denotamos  $\frac{\partial}{\partial y_1}$  y  $\frac{\partial}{\partial y_2}$  sus derivadas direccionales en cada punto, entonces

$$\tilde{X} = \langle X, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle \frac{\partial}{\partial y_1} + \langle X, \frac{\partial}{\partial y_2} \rangle \frac{\partial}{\partial y_2} \quad \text{y} \quad \text{rot}(\tilde{X}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \langle X, \frac{\partial}{\partial y_2} \rangle - \frac{\partial}{\partial y_2} \langle X, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle.$$

Motivados por este razonamiento, podemos pensar el rotacional del campo vectorial  $X$  como la 2-forma diferencial definida por

$$\text{rot}(X)(Y_1, Y_2) = \langle Y_2(X), Y_1 \rangle - \langle Y_1(X), Y_2 \rangle.$$

Observamos que en el caso que  $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$  y  $Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}$  son las derivadas direccionales de una base ortonormal de un plano orientado  $\Pi$ , se tiene que

$$\text{rot}(X)(Y_1, Y_2) = \text{rot}(\tilde{X}).$$

La siguiente pregunta que podríamos hacer es

**Pregunta 9.** *¿Es posible extender las nociones de gradiente, rotacional y divergencia a variedades diferenciales?*

Las formas diferenciales y el complejo de De Rham se pueden definir de manera natural en variedades diferenciales y el complejo de De Rham continúa siendo un invariante homotópico en la categoría de las variedades diferenciales (ver [18]). Sin embargo si se quiere mantener una cierta interpretación geométrica para el gradiente, el rotacional y la divergencia es necesario distinguir entre las diferentes estructuras que entran en juego en su definición. En nuestra opinión esta distinción es más clara sobre las *variedades diferenciales abstractas* que introducimos a continuación y sobre las cuales posteriormente aproximaremos una respuesta a la pregunta 9.

## 5. Variedades diferenciales abstractas

Las variedades diferenciales que definimos en la sección 1 eran subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  a los cuales podíamos asociar cartas para su descripción. En esta sección

vamos a abstraer aún más la noción de variedad y de carta, permitiendo que las variedades diferenciales sean ahora conjuntos arbitrarios  $M$  a los que podamos cubrir con cartas.

Queremos que para todo punto  $p$  en el conjunto  $M$  exista un abierto  $U \subset \mathbb{R}^k$  y una función inyectiva  $\phi : U \rightarrow M$  y que podemos pensar como una carta de dimensión  $k$  del mundo que representa el conjunto  $M$ . Cada punto  $x \in U$  describiría un punto  $\phi_p(x)$  en el mundo  $M$ . Para poder tener una noción de diferenciabilidad exigimos la siguiente noción de compatibilidad entre dos cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow M$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow M$  tales que  $W := \phi_1(U_1) \cap \phi_2(U_2) \neq \emptyset$ . Primero pedimos que  $\phi_i^{-1}(W)$  sea un abierto de  $\mathbb{R}^k$  para  $i = 1, 2$  y que  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2 : \phi_2^{-1}(W) \rightarrow \phi_1^{-1}(W)$  y  $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(W) \rightarrow \phi_2^{-1}(W)$  sean funciones suaves (ver Figura 5).

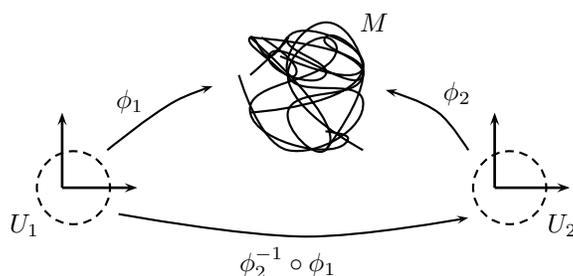


Figura 5. Compatibilidad de las cartas en una variedad abstracta.

Una colección de cartas  $\{\phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M\}_{i \in I}$ , donde  $I$  es un conjunto contable de índices, que satisfagan las condiciones de compatibilidad y tales que  $\bigcup U_i = M$  se denomina *atlas*. Un conjunto con un atlas es una *variedad diferencial de dimensión  $k$* .

Un atlas sobre  $M$  induce una *estructura topológica* sobre  $M$  (ver [10]). Las estructuras topológicas provienen de abstraer lo que necesitamos para extrapolar la noción de continuidad en un conjunto. Ésto es la noción de *abierto* pues una función de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua si y sólo si la preimagen  $f^{-1}(V)$  de todo abierto  $V \subset \mathbb{R}^m$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Los abiertos satisfacen que todo el espacio es abierto, que uniones arbitrarias de abiertos son abiertos, que intersecciones finitas de abiertos son abiertos. Una *topología* sobre un conjunto  $M$  es una colección de subconjuntos de  $M$  que satisface las mismas propiedades que los abiertos. Es posible extrapolar todas las definiciones que podemos hacer con abiertos en  $\mathbb{R}^n$  a espacios topológicos, la noción de cerrado, conexidad, compacto, etc. En particular muchas de las intuiciones de las funciones continuas entre espacios topológicos se extienden: la imagen de un conjunto compacto bajo una función continua es un conjunto compacto, o la imagen de un conexo bajo una función continua es un conjunto conexo.

La geometría moderna estudia, entre otras muchas cosas, la interacción entre estas dos estructuras de la variedad diferencial: su estructura diferencial (su atlas) y su topología. Como vimos para definir la cohomología de De Rham para abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , hicimos uso de la estructura diferencial en cuanto usamos derivadas. El teorema de De Rham nos muestra que de hecho es posible capturar la cohomología de De Rham de cualquier variedad sin usar la estructura diferencial, usando tan sólo su topología subyacente, como se puede de hecho hacer usando homología singular (ver [4][18][27]).

**5.1. Cálculo vectorial en variedades.** Si  $M$  y  $N$  son variedades diferenciales de dimensiones  $m$  y  $n$  podemos definir sobre ellas las nociones de diferenciabilidad, espacio tangente y derivada.  $f : M \rightarrow N$  es una *función diferenciable* si para toda pareja de cartas  $\phi : U \rightarrow M$  y  $\psi : V \rightarrow N$ , si  $f(\phi(U)) \cap \psi(V) \neq \emptyset$  entonces  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$  definida sobre el respectivo abierto de  $\mathbb{R}^m$  es suave. Las cartas locales  $\phi : U \rightarrow M$  establecen una equivalencia entre el abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  y el abierto  $\phi(U)$  de  $M$ . Así la función  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$  es equivalente localmente a la función  $f$  y por ésto podemos transportar la noción de diferenciabilidad de la función  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$  a la función  $f$ .

Similarmente, el espacio tangente  $T_p U$  bien definido para cada  $p$  en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , puede ser trasladado a través de una carta  $\phi : U \rightarrow M$  a un espacio tangente en el punto  $\phi(p)$  de la variedad. Para ello, recordemos que el espacio tangente  $T_p U$  es la colección de todos los vectores tangentes a  $p$ , es decir la colección de los vectores  $\frac{d}{dt}\alpha(0)$  para las curvas suaves  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  tales que  $\alpha(0) = p$ . Podemos definir el *espacio tangente* a  $q := \phi(p)$  como la clase de equivalencia de las curvas suaves  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tales que  $\alpha(0) = q$ , con la relación de equivalencia  $\alpha \sim_q \beta$  si y sólo si  $\frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ \beta)(0)$ . Es fácil ver que con esta relación de equivalencia el espacio tangente  $T_q M$  es un espacio vectorial y de hecho es independiente de la carta  $\phi$  que usamos en su definición. Las curvas  $\alpha_i(t) := \phi(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_m)$  definen los vectores tangentes  $[\alpha_i]$  que se denotan  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  y que conforman una base del espacio vectorial  $T_q M$  (ver [27]).

La *derivada* de una función diferenciable  $f : M \rightarrow N$  es la transformación lineal  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  definida por  $df_p[\alpha] = [f \circ \alpha]$  (ver Figura 1). Como dijimos antes  $f$  es equivalente a la función  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$  modulo las cartas  $\phi$  y  $\psi$ , así el *jacobiano*  $d(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)$  es precisamente la matriz de  $df_p$  en las bases  $\{[\phi(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_m)]\}_{i=1}^m$  y  $\{[\psi(q_1, \dots, q_i + t, \dots, q_n)]\}_{i=1}^n$ .

Hemos mostrado que en el caso de variedades abstractas, el atlas nos da una noción natural de jacobiano que de hecho generaliza el jacobiano que aprendemos en los cursos de cálculo diferencial. Podemos ahora volver a la pregunta 9. La respuesta a esta pregunta es relevante porque gran parte de las ecuaciones de la física matemática como las ecuaciones del electromagnetismo, la ecuación del calor, la ecuación de onda, la *ecuación de Schrödinger* o las *ecuaciones de Navier-Stokes*, usan gradientes, rotacionales y divergencias en su formulación

y podríamos generalizar su estudio a variedades diferenciales. Dichas generalizaciones permiten un flujo de técnicas e intuiciones de la física a la geometría y viceversa. Por ejemplo, en el contexto de variedades diferenciales la ecuación del calor es estudiada en [13], la ecuación de Schrödinger en [7][8] y [9] tiene ciertas conexiones con *integrales de Feynman* (mecánica cuántica).

La respuesta que dimos a la pregunta 8 en la sección 4.2 sigue siendo válida, pues podemos definir formas diferenciales y el complejo de De Rham en variedades diferenciales. Sin embargo las definiciones que dimos en esa sección del rotacional y la divergencia usan más estructura de la que disponemos en el caso de variedades diferenciales abstractas. En particular usamos el producto interno de  $\mathbb{R}^n$  que equivale en el caso de una variedad diferencial  $M$  a tener un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en cada espacio tangente  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . A este tipo de estructura se le conoce como *métrica riemanniana*. En coordenadas locales dicho producto toma la forma  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p = g_{ij}(p)$  donde  $g_{ij}$  es una función definida en el abierto  $\phi(U)$  para la carta  $\phi : U \rightarrow M$  que induce los campos vectoriales  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ . En el caso de  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto tenemos una carta global  $id : U \rightarrow U$  y el producto riemanniano está dado por  $g_{ij} := \delta_{ij}$ .

Dada una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , disponiendo de una métrica riemanniana, podemos generalizar la noción de gradiente  $\nabla f$  usando la derivada exterior  $d$ .  $\nabla f$  es el campo vectorial  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\langle X, Y \rangle_p = df_p(Y)$  para todo campo vectorial  $Y$  de  $TM$ .

Para definir el rotacional y la divergencia de un campo vectorial también es necesario usar otra estructura geométrica, la orientación. Recordemos que un *espacio vectorial orientado* es un espacio vectorial dotado de una clase de equivalencia de sus bases, donde la relación de equivalencia entre éstas es que el determinante de la matriz cambio de base sea positiva. En un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  con producto interno, una *orientación* dota de orientación a cada plano tangente de  $V$ . Una variedad es orientable si existe un recubrimiento por cartas cuya orientación es compatible en el sentido que el cambio de base de una carta a otra tenga derivada de determinante positivo. Ejemplos famosos de superficies no orientables son la *botella de Klein* y la *cinta de Moebius*.

Si  $S$  es una 2-variedad diferencial orientada y con una estructura riemanniana, podemos definir el *rotacional* de un campo vectorial sobre  $S$  como el límite de lo que rota alrededor de circunferencias cuyo radio se va haciendo más pequeño, de manera análoga a lo hecho en la sección 4.1 para campos vectoriales en abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Para  $M$  variedad riemanniana orientada de dimensión mayor que 2, intuitivamente cada espacio vectorial  $P$  de dimensión 2 adentro de  $T_p M$  genera localmente una superficie para la cual es posible calcular el rotacional. Así, el rotacional sería una función que a cada plano de  $T_p M$  le asigna un número y, como en el caso de abiertos en  $\mathbb{R}^n$  analizado en la Sección 4.1,

dicha función induce una 2-forma diferencial. En [6] se dan múltiples fórmulas que relacionan esta noción de rotacional con otras estructuras geométricas importantes como la *conexión Levi-Civita*.

Para definir la divergencia de un campo vectorial nuevamente necesitamos una noción de orientación y una métrica riemanniana. Con ellas es posible tomar bolas cada vez más pequeñas alrededor de un punto y calcular la cantidad de flujo que escapa de las mismas, generalizando la ecuación (4).

## 6. Perspectivas

En esta sección damos dos perspectivas que no desarrollaremos en el artículo pero que están relacionadas con los contenidos. Esperamos sirvan de guía al lector interesado en continuar el estudio de los temas.

En la sección 3 nos preguntamos qué tan lejos podríamos llegar caminando sobre los caminos asociados a una familia finita de campos vectoriales o a una distribución diferencial. Una pregunta natural sería dentro de los caminos que escogiésemos cuál sería el mejor camino. Una posible respuesta podría llevarnos a estudiar la formulación lagrangiana y hamiltoniana de las teorías físicas (ver [23]). De hecho los sistemas de control, que juegan un papel importante en las primeras secciones de este artículo, están directamente relacionados con *sistemas no holonómicos* o *sistemas con ligadura* en física. En un cierto sentido las variedades diferenciales podrían entenderse también como una generalización abstracta de estos sistemas. Siguiendo este mismo camino uno podría motivar estructuras geométricas como las *estructuras simplécticas*, las *estructuras de Poisson* o las *estructuras de Dirac*, como abstracciones geométricas de las formulaciones lagrangianas y hamiltonianas de la física matemática.

Una segunda perspectiva está relacionada con una visión de la geometría moderna como un diálogo entre diferentes estructuras geométricas. El artículo introdujo diferentes estructuras geométricas como la topología, la estructura diferencial, la orientación y la métrica riemanniana. Mencionó algunos teoremas que relacionan estas estructuras, como el teorema de De Rham que relaciona la estructura topológica con la diferencial, en el sentido que permite calcular la cohomología de De Rham, que usa la estructura diferencial, usando solamente la topología. Tal vez el teorema más importante en cuanto a relacionar estructuras geométricas se refiere, es el *teorema de Gauss-Bonnet*, que relaciona la *característica de Euler* (invariante topológico), con la *integral de una forma* (estructura diferencial) obtenida como un polinomio del *tensor de curvatura* y sus derivadas (estructura riemanniana). La *curvatura* es un tema de interés que no fue tocado en este artículo y que como se puede apreciar en el teorema de Gauss-Bonnet relaciona las diferentes estructuras geométricas de una variedad diferencial.

Otro ingrediente importante en el estudio de la geometría diferencial son las conexiones con las cuales se atrapa la intuición de trasladar vectores paralelamente en variedades. Las conexiones están por supuesto relacionadas con la curvatura, pues el tensor de curvatura es obtenido con la conexión Levi-Civita asociada a la métrica riemanniana.

Hay otros temas más avanzados relacionados con el estudio de las estructuras geométricas, como el hecho que  $\mathbb{R}^4$  pueda tener 2 estructuras diferenciales que no son difeomorfas o las estructuras diferenciales exóticas en las esferas estudiadas por MILNOR. También la clasificación de las métricas riemannianas módulo equivalencia conforme en superficies, que da lugar a los *espacios moduli* con todas sus conexiones con geometría algebraica y aritmética. Estos temas pueden servir de motivación o de gran meta para continuar adentrándose en el estudio de la geometría.

## APÉNDICE A. Formas Diferenciales

En este apéndice damos una breve introducción a las formas diferenciales. Comenzamos con formas lineales sobre espacios vectoriales que podrían considerarse como formas diferenciales sobre un punto.

**A.1. Formas lineales.** Dado un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $V$  una  $k$ -forma lineal  $\alpha$  es una función multilinear alternante sobre el  $k$ -producto cartesiano del espacio vectorial  $V$ . Una función  $\alpha : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es multilinear si

$$\alpha(v_1, \dots, u + \lambda w, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, u, \dots, v_k) + \lambda \alpha(v_1, \dots, w, \dots, v_k),$$

y es alternante si

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

para  $(v_1, \dots, v_k) \in V \times \cdots \times V$ ,  $u, w \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Denotamos el conjunto de todas las  $k$ -formas lineales de  $V$  por  $\Lambda^k V$ . Es fácil ver que  $\Lambda^k V$  tiene una estructura natural de espacio vectorial.

**Proposición 1.** Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base de  $V$ . Dadas constantes  $a_I \in \mathbb{R}$  para cada  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , existe una única  $k$ -forma lineal  $\alpha$  tal que

$$\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = a_I = a_{i_1 \dots i_k}$$

donde  $I := \{i_1, \dots, i_k\}$  y estamos suponiendo  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ .

*Demostración.* Dada una  $k$ -forma lineal  $\alpha$  satisfaciendo las hipótesis de la proposición y  $v_l := \sum_{i_l=1}^n b_{i_l} e_{i_l} \in V$  para  $l = 1, \dots, k$ , usando la multilinealidad

y alternancia de  $\alpha$  tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, v_k) &= \alpha\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n b_{i_k} e_{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n b_{i_1} \cdots b_{i_k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\sigma \in S(k)} \text{sign}(\sigma) b_{i_{\sigma(1)}} \cdots b_{i_{\sigma(k)}} a_{i_1 \dots i_k} \end{aligned}$$

donde  $S(k)$  denota el grupo de permutaciones de  $\{1, \dots, k\}$  y para  $\sigma \in S(k)$   $\text{sign}(\sigma)$  denota el signo de la permutación  $\sigma$ . Es fácil deducir del cálculo anterior la existencia y unicidad de la forma  $\alpha$ .  $\square$

Dado un conjunto ordenado  $J = \{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$  denotaremos  $\varepsilon_J$  a la  $k$ -forma lineal de la Proposición 1 tal que  $a_I = 0$  si  $I \neq J$  y  $a_I = 1$  si  $I = J$ .

**Corolario 1.** *Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base del espacio vectorial  $V$ . El conjunto de  $k$ -formas lineales  $\{\varepsilon_J : J = \{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}\}$  es una base de las  $k$ -formas lineales de  $V$ .*

El corolario anterior implica que si el espacio vectorial  $V$  es de dimensión  $n$  entonces  $\Lambda^k V$  tiene dimensión  $\binom{n}{k}$ .  $\Lambda^1 V$  es el dual del espacio vectorial  $V$  y la base  $\{\varepsilon_J : J = \{1 \leq j \leq n\}\}$  es la base dual  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  asociada a la base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ .

Definimos el espacio vectorial  $\Lambda^* V := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V$ . Este espacio vectorial resulta ser un álgebra con el producto  $\wedge$  que a la  $k$ -forma  $\alpha$  y la  $l$ -forma  $\beta$  les asigna la  $(k+l)$ -forma

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) := \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sign}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

donde

$$S(k, l) := \{\sigma \in S(k+l) : \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \text{ y } \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)\}$$

es el conjunto de *embarajamientos* (en inglés *shuffles*) dentro del grupo de permutaciones  $S(k+l)$ . Es un buen ejercicio mostrar que  $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}$  donde  $I = \{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ . Una propiedad importante del producto cuña es que si  $\alpha$  es una  $k$ -forma y  $\beta$  una  $l$ -forma entonces  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{lk} \beta \wedge \alpha$ .

Si  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales y  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, ésta induce una transformación lineal  $T : \Lambda^k W \rightarrow \Lambda^k V$  definida por

$$T^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k).$$

Si  $S : W \rightarrow R$  es otra transformación lineal, es fácil ver que  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ . La transformación lineal  $T^*$  es llamada *pullback* en inglés y una posible traducción de este término al español podría ser jalonamiento.

**A.2. Formas diferenciales en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .** Si  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , una  $k$ -forma diferencial es una función  $\alpha : U \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\alpha$  es suave si  $\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x) \varepsilon_{i_1 \dots i_k}$  donde  $a_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  es suave. Denotaremos el espacio de todas las  $k$ -formas diferenciales suaves del abierto  $U$  por  $\Omega^k(U)$ .

Recordemos que dado  $x \in U$ , las derivaciones  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_x$  conforman una base del espacio tangente  $T_x U$ . La base dual del espacio cotangente  $T_x^* U$  está dada por las 1-formas  $dx_i(x) = \varepsilon_i$  con las cuales podremos construir las  $k$ -formas  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  que al evaluarlas en  $x$  podemos interpretar como una base de  $\Lambda^k T_x U$ , las  $k$ -formas lineales del espacio tangente  $T_x U$ .

Sea  $V \subset \mathbb{R}^m$  un abierto y sea  $f : U \rightarrow V$  una función suave.  $f$  induce también un jalonamiento  $f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$  definido por

$$f^*(\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_x(df_x v_1, \dots, df_x v_k)$$

donde  $v_1, \dots, v_k \in T_x V$ .

Observando que si  $\omega \in \Omega^n(U)$  entonces  $\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , para  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  función suave, podemos definir la integral de  $n$ -formas en el abierto  $U$  de la siguiente forma:

$$\int \omega = \int f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Esta integral de  $n$ -formas es independiente de las coordenadas en las que se definió. Específicamente, si  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  que preserve la orientación,

$$\int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \omega, \quad (5)$$

para toda  $\omega \in \Omega(V)$  con soporte compacto. Esta igualdad es consecuencia del teorema de cambio de variable en cálculo vectorial y del hecho que, si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión  $n$ , entonces el jalonamiento de una  $n$ -forma  $T^* \omega = \text{adet}(T) \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$  donde  $\omega = a \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$ .

Dada una  $k$ -forma diferencial

$$\omega(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

definimos su derivada exterior

$$d^{(k)} := d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} (a_{i_1 \dots i_k})(x) dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (6)$$

La derivada exterior satisface que  $d^2 = d^{(k+1)} \circ d^{(k)} = 0$ , propiedad que es muy importante para definir el complejo de De Rham en la Sección 4.2. Sea  $V \subset \mathbb{R}^m$  un abierto y  $f : U \rightarrow V$  una función suave, entonces el jalonamiento de  $f$  y la derivada exterior satisfacen  $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$ . La compatibilidad de la derivada exterior con la integral de  $n$ -formas queda mejor formulada entendiendo formas diferenciales en variedades diferenciales, cosa que hacemos en la siguiente sección.

**A.3. Formas diferenciales en variedades.** Sea  $M$  una variedad diferencial en el sentido de la sección 5. Definimos el haz de  $k$ -formas diferenciales  $\Lambda^k TM := \bigcup_{x \in M} \Lambda^k T_x M$ . Entonces una  $k$ -forma diferencial es una función  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k TM$  tal que  $\omega(x) \in \Lambda^k T_x M$ . Así que una  $k$ -forma diferencial de la variedad  $M$  es una escogencia de una  $k$ -forma lineal en cada uno de sus espacios tangentes.

Las cartas locales  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{U} \subset M$  inducen a través del jalonamiento identificaciones de  $\Lambda^k \mathbb{R}^n$  con  $\Lambda^k \tilde{U}$ . Más explícitamente, a través del jalonamiento  $\varphi_x^* : \Lambda^k T_{\varphi(x)} M \rightarrow \Lambda^k T_x U \cong \Lambda^k \mathbb{R}^n$ . Diremos que  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k TM$  es una  $k$ -forma diferencial suave si la función  $x \mapsto \varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)})$  es una  $k$ -forma diferencial suave en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Denotamos las  $k$ -formas diferenciales suaves de  $M$  por  $\Omega^k(M)$ . Funciones suaves  $F : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciales también inducen jalonamientos  $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ .

Si la variedad  $M$  es orientada, por medio de la ecuación de cambio de variable (5) y particiones de la unidad podemos definir una integral  $\int : \Omega^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  (ver por ejemplo [18]). La definición (6) de derivada exterior es independiente de las coordenadas por tanto podemos definir una derivada exterior  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  sobre formas diferenciales suaves de la variedad  $M$ . Dada una función suave  $F : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciales la compatibilidad del jalonamiento y la derivada exterior que mencionamos en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  sigue siendo válida, es decir  $F^*(d\omega) = dF^*(\omega)$  para  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Esta propiedad induce un jalonamiento  $F^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  a nivel de las cohomologías de De Rham definidas en la Sección 4.2.

La fórmula de cambio de coordenadas (5) también es válida para difeomorfismos, que preservan la orientación, entre variedades diferenciales. La compatibilidad de la derivada exterior y la integral está dada por el teorema de Stokes que afirma que si  $M$  es una variedad con frontera  $\delta M$  y  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\delta M} \omega.$$

El jalonamiento  $F^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  asociado a una función suave  $F : M \rightarrow N$ , es independiente de la clase de homotopía suave de la función  $F$ . Pero usando que cada clase de equivalencia homotópica de funciones entre variedades tiene un representante suave, y que si dos funciones suaves son homotópicas con una homotopía continua entonces existe una homotopía suave entre ellas,

podemos extender el jalonamiento a funciones continuas y mostrar que éste es independiente de las homotopías (continuas) de dichas funciones. Este es un camino para obtener la invarianza homotópica de la cohomología de De Rham y es descrito en [18].

### Referencias

- [1] A. A. AGRACHEV & Y.L. SACHKOV, *Control theory from the geometric viewpoint: Control Theory and Optimization, II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 87, Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [2] V.I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, volume 60, New York: Springer-Verlag, 1989.
- [3] W.M. BOOTHBY, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, volume 120, Orlando: Academic Press, Inc., 1986.
- [4] G.E. BREDON, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, volume 139, New York: Springer-Verlag, 1997. (Corrected third printing of the 1993 original)
- [5] A. BROWDER, *Mathematical analysis: an introduction*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1996.
- [6] O. CALIN & D. CHANG, *Geometric mechanics on Riemannian manifolds*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 2005.
- [7] L. CANO, *Time dependent quantum scattering theory on complete manifolds with a corner of codimension 2*, Revista Colombiana de Matemática, (A ser publicada).
- [8] L.A. CANO GARCÍA, *Mourre estimates for compatible Laplacians on complete manifolds with corners of codimension 2*, Ann. Global Anal. Geom. **43**(1) (2013), 75-97.
- [9] L. CANO & R. DÍAZ, *Indirect Influences on Directed Manifolds*, <http://arxiv.org/abs/1507.01017>, 2015.
- [10] M. P. DO CARMO, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1992. (Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.)
- [11] G.B. FOLLAND, *Real analysis: Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics (New York), New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [12] V. GUILLEMIN & A. POLLACK, *Differential topology*, Providence: AMS Chelsea Publishing, 2010. Reprint of the 1974 original)
- [13] A. GRIGOR'YAN *Heat kernels on weighted manifolds and applications: The ubiquitous heat kernel*, Contemp. Math. Volume 398, 93-191, Providence: Amer. Math. Soc., 2006.
- [14] P. JORDAN, *La física del siglo XX*, Segunda edición, Fondo de Cultura Económica, México-Buenos Aires, 1953.
- [15] V. JURDJEVIC, *Geometric control theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, volume 52, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [16] S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Second Edition, Universitext, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [17] S. LANG, *Fundamentals of differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, volume 191, New York: Springer-Verlag, 1999.
- [18] I. MADSEN & J. TORNEHAVE, *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [19] S. MORITA, *Geometry of differential forms*, Translations of Mathematical Monographs, volume 201, Providence: American Mathematical Society, 2001. (Translated from the two-volume Japanese original (1997, 1998) by Teruko Nagase and Katsumi Nomizu, Iwanami Series in Modern Mathematics)

- [20] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*, Second edition, New York: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1980.
- [21] L. RIFFORD, *Sub-Riemannian geometry and optimal transport*, Springer Briefs in Mathematics, Cham: Springer, 2014.
- [22] I.R. SHAFAREVICH, *Basic algebraic geometry*, Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977. (Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974.)
- [23] F. SCHECK, *Mechanics: From Newton's laws to deterministic chaos*, Graduate Texts in Physics, Heidelberg: Springer, 2010.
- [24] H. M. SCHEY, *div grad curl and all that*, W.W. Norton and Company, 1992.
- [25] B. SIMON, *Functional integration and quantum physics*, Second edition, Providence: AMS Chelsea Publishing, 2005.
- [26] E.D. SONTAG, *Mathematical control theory: Deterministic finite-dimensional systems*, Texts in Applied Mathematics, volume 6, Second Edition, New York: Springer-Verlag, 1998.
- [27] F.W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, volume 94, New York-Berlin: Springer-Verlag, 1983. (Corrected reprint of the 1971 edition)
- [28] J. ZABCZYK, *Mathematical control theory: an introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1992.
- [29] J. ZINN-JUSTIN, *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford Graduate Texts, Oxford: Oxford University Press, 2010. (Corrected paperback edition of the 2005 original)

Recibido en septiembre de 2015. Aceptado para publicación en octubre de 2015

LEONARDO A. CANO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA, BOGOTÁ, COLOMBIA  
*e-mail*: lnrdcano@gmail.com