Lecturas Matemáticas
Volumen **34** *(2) (2013), páginas 179–186*
ISSN 0120–1980

Invertibilidad de operadores pseudo-diferenciales definidos en $\mathbb{Z}^n$

Invertibility of pseudo–differential operators defined on $\mathbb{Z}^n$

Duván Cardona
Universidad del Valle, Cali, Colombia

Dedicado a mi Padre, José R. Cardona

Resumen. En este trabajo se establecen resultados con respecto a la composición e invertibilidad de operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{Z}^n$, se presenta una clase de símbolos para la cual el conjunto de operadores pseudo–diferenciales asociados constituye un álgebra; se investiga también la invertibilidad de un tipo de multiplicadores de Fourier.

Key words and phrases. Pseudo–differential operators, compactness of operators, Fourier transform, locally compact topological groups.

Abstract. In this paper some results on the composition and invertibility of pseudo–differential operators in $\mathbb{Z}^n$ are proved. Also a class of symbols for which the set of associated pseudo–differential operators becomes an algebra, is presented. The invertibility of a type of Fourier multipliers is also investigated.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 47G30, Secondary 65R10.

1. Introducción

La teoría de operadores pseudo–diferenciales definidos en $\mathbb{Z}$ con símbolos en $\mathbb{Z}\times\mathbb{T}$ tiene su inicio en el año 2009 cuando S. Molahajloo (véase [5]) establece condiciones necesarias para continuidad L^p y compacidad de tales operadores. Dicha teoría está motivada por el estudio de problemas en teoría de señales y wavelets como puede consultarse en Wong [9]. El estudio de operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{Z}^k$ es un caso particular pero no menos interesante en la teoría de operadores pseudo–diferenciales sobre grupos topológicos localmente compactos (véase [4]).

En el año 2011 aparecen dos trabajos que generalizan la noción de operador pseudo-diferencial en $\mathbb{Z}$. El primero de éstos trabajos es presentado por C. Rodríguez en el cual extiende la noción de operadores en $\mathbb{Z}$ a operadores en $\mathbb{Z}^n$ (véase [6]) abordando el problema de continuidad, continuidad débil y compacidad de los mismos; adicional a ésto, Rodríguez en su tesis de maestría introduce un cálculo simbólico para operadores pseudo–diferenciales definidos en $\mathbb{Z}^n$ (véase [7]). Un rasgo de esta generalización es la elección de los símbolos como funciones medibles definidas en $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n$, debido a que el grupo dual de $\mathbb{Z}^n$ puede ser identificado con el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. El segundo trabajo fue presentado por V. Catană (véase [3]) quien extiende la noción de $\mathbb{Z}$ a operadores pseudo–diferenciales multilineales sobre $\mathbb{Z}^n$ con símbolos en $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{T}^n)^m$; siguiendo los lineamientos de Molahajloo, Catană establece condiciones necesarias para continuidad y compacidad de tales operadores multilineales.

En este trabajo se obtienen resultados con respecto a la composición e invertibilidad de operadores pseudo-diferenciales definidos en $\mathbb{Z}^n$. Dichos resultados amplían la perspectiva propuesta por Molahajloo [5], y Rodríguez [6]. Se investigan esencialmente dos tipos de operadores; el primer tipo está constituído por operadores con símbolos integrables sobre $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k$, cuya invertibilidad se estudia usando la alternativa de Fredholm. El segundo tipo está caracterizado por operadores pseudo–diferenciales que actúan como multiplicadores de Fourier; los operadores considerados se invierten utilizando un método similar al empleado en la inversión de operadores pseudo–diferenciales en las clases $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (véase [8]).

2. Preliminares

Sea $a \in L^1(\mathbb{Z}^k)$, la transformada de Fourier $\widehat{a}$ de a viene definida por

$$\widehat{a}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} e^{-i\langle n,\theta\rangle} a(n),$$

con $\theta \in \mathbb{T}^k = [-\pi, \pi]^k$. La fórmula de inversión de Fourier expresa que

$$a(n) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \widehat{a}(\theta)\, d\theta.$$

Sea σ una función medible sobre $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k$, el operador pseudo–diferencial asociado a σ está definido por

$$T_\sigma a(n) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \sigma(n,\theta) \widehat{a}(\theta)\, d\theta,$$

con $a \in L^1(\mathbb{Z}^k)$, σ es llamado el símbolo del operador T_σ. Al emplear el Teorema de Fubinni y el Teorema de Tonelli, se obtiene

$$\begin{aligned} T_\sigma a(n) &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \sigma(n,\theta) \widehat{a}(\theta)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \sigma(n,\theta) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-i\langle m,\theta\rangle} a(m) \right) d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^k} \left(\int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n-m,\theta\rangle} \sigma(n,\theta)\, d\theta \right) a(m). \end{aligned}$$

Esta representación es más adecuada para los cálculos que se desarrollan posteriormente.

En este trabajo se utilizan conceptos básicos del análisis funcional, siendo nuestra principal referencia el libro de Brézis [1]. Mencionamos algunos de éstos conceptos a continuación. Si X y Y son espacios de Banach, el espacio de los operadores acotados de X en Y, $B(X,Y)$, es un espacio de Banach cuya norma está determinada por

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Un operador $T \in B(X,Y)$ es de Fredholm si su núcleo es de dimensión finita y su rango es cerrado y de codimensión finita. Si $T \in B(X,Y)$ es un operador compacto, $I+T$ es un ejemplo de operador de Fredholm. Un rasgo interesante de tales operadores es que son invertibles módulo operadores de rango finito. Este hecho será utilizado para estudiar la invertibilidad de un tipo de operadores en $\mathbb{Z}^k$ (véase el Teorema 4).

Por otro lado, si H un espacio de Hilbert separable, un operador $T : H \to H$ es un operador de Hilbert-Schmidt si para alguna base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, $\|T\|_{HS}^2 = \sum \|Te_n\|_H^2 < \infty$. Esta definición es independiente de la elección de la base, $\|\cdot\|_{HS}$ es una norma y además el operador T es compacto. Con respecto a la continuidad de operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{Z}^k$ usaremos posteriormente el siguiente resultado.

Teorema 1. *El operador pseudo–diferencial $T_\sigma : L^2(\mathbb{Z}^k) \to L^2(\mathbb{Z}^k)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si y sólo si $\sigma \in L^2(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k)$. En tal caso se satisface que $\|T_\sigma\|_{HS} = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \|\sigma\|_{L^2(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)}$.*

Demostración. Consultar ([5], pág. 214) para el caso $k = 1$. Una demostración para $k > 1$ es similar. ☑

3. Composición de operadores con símbolos integrables

El objetivo principal de ésta sección es demostrar que el conjunto de operadores pseudo–diferenciales definidos en $\mathbb{Z}^k$ con símbolos integrables en $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k$

conforman un álgebra de operadores compactos. Exhibir dicha clase de operadores garantiza la existencia de un tipo de operadores pseudo–diferenciales invertibles módulo operadores de rango finito como se apreciará en el Teorema 4.

Teorema 2. *Sean $\sigma(n,\theta),\tau(n,\theta)\in L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)$ símbolos. Entonces existe una función medible $\phi(n,\theta)\in L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)$ tal que $T_\sigma\circ T_\tau=T_\phi$.*

Demostración. Empleando el Teorema de Fubinni y el Teorema de Tonelli, se puede escribir

$$\begin{aligned}
&T_\sigma\circ T_\tau a(n)\\
&=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^k}e^{i\langle n-m,\theta\rangle}\sigma(n,\theta)\,d\theta\right)T_\tau a(m)\\
&=(2\pi)^{-k}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^k}e^{i\langle n-m,\theta\rangle}\sigma(n,\theta)\,d\theta\right)\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^k}e^{i\langle m-j,\lambda\rangle}\tau(m,\lambda)\,d\lambda\right)a(j)\\
&=(2\pi)^{-k}\sum_{j}\int_{\mathbb{T}^k}\left(\int_{\mathbb{T}^k}\sum_{m}e^{i\langle n-m,\theta\rangle+i\langle m-j,\lambda\rangle}\sigma(n,\theta)\tau(m,j)\,d\theta\right)a(j)\,d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\langle n-m,\theta\rangle+\langle m-j,\lambda\rangle-\langle n-j,\lambda\rangle=\langle n-m,\theta-\lambda\rangle$, se verifica

$$T_\sigma\circ T_\tau a(n)=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^k}e^{i\langle n-j,\lambda\rangle}\phi(n,\lambda)d\lambda\right)a(j)\,,$$

con

$$\phi(n,\lambda)=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\sum_{m}\int_{\mathbb{T}^k}e^{i\langle n-m,\theta-\lambda\rangle}\sigma(n,\theta)\tau(m,\lambda)\,d\theta.$$

Dado que

$$|\phi(n,\lambda)|\leq(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\sum_{m}\int_{\mathbb{T}^k}|\sigma(n,\theta)||\tau(m,\lambda)|\,d\theta\,,$$

se demuestra fácilmente que $\phi(n,\lambda)\in L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)$ y así, $T_\sigma\circ T_\tau=T_\phi$. ☑

Teorema 3. *Si $\sigma(n,\theta)\in L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)\cap L^\infty(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)$, entonces T_σ es un operador compacto de $L^2(\mathbb{Z}^k)$ sobre $L^2(\mathbb{Z}^k)$.*

Demostración. Tómese $\sigma(n,\theta)$ integrable sobre $\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k$, tal que

$$C=\|\sigma(n,\theta)\|_{L^\infty(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)}<\infty.$$

Se sigue que

$$\sum_{n}\int_{\mathbb{T}^k}|\sigma(n,\theta)|^2\,d\theta\leq C\sum_{n}\int_{\mathbb{T}^k}|\sigma(n,\theta)|\,d\theta,$$

y así $\sigma\in L^2(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)$. Empleando el Teorema 1, vemos que T_σ es un operador de Hilbert-Schmidt y, por tanto, compacto. ☑

Corolario 1. *Sean* $\Gamma(k) = L^1(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k) \cap L^\infty(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^k)$ *y* $\mathrm{O}\textsc{p}(\Gamma)(k)$ *la colección de operadores pseudo–diferenciales con símbolos en* $\Gamma(k)$*. Entonces* $(\mathrm{O}\textsc{p}(\Gamma)(k), +, \circ)$ *constituye un álgebra de operadores compactos.*

En el siguiente teorema se demuestra que el conjunto $I + \mathrm{O}\textsc{p}(\Gamma)(k)$ es una colección de operadores invertibles módulo operadores de rango finito.

Teorema 4. *Sea* $\sigma(n,\theta) \in \Gamma(k)$*. El operador* $I+T_\sigma = T_{1+\sigma}$ *es invertible módulo un operador de rango finito. Esto es, existen* $P, T, R, S \in B(L^2(\mathbb{Z}^k), L^2(\mathbb{Z}^k))$ *tales que* R *y* S *son de rango finito y*

$$T_{1+\sigma} \circ T - R = I = P \circ T_{1+\sigma} - S.$$

Demostración. Del Teorema 3 se sabe que T_σ es un operador compacto. El operador $T_{1+\sigma} = I + T_\sigma$ es un operador de Fredholm y por tanto invertible módulo un operador de rango finito. Con dicha observación se concluye la prueba. ☑

Observación. Cuando $\sigma(n,\theta)$ es integrable, se sabe que

$$\phi(n) = \int_{\mathbb{T}^k} |\sigma(n,\theta)|\, d\theta$$

satisface

$$\sum_n \phi(n) = \|\sigma(n,\theta)\|_{L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{T}^k)} < \infty.$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = 0$. Como consecuencia, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $|\phi(n)| < \epsilon$, por lo que el símbolo $1 + \sigma(n,\theta)$ no se anula para valores grandes de n y todo $\theta \in \mathbb{T}^k$. Este comportamiento es similar al concepto de elipticidad para operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{R}^k$, pues en principio los operadores con símbolos elípticos (se anulan en una bola de radio finito con centro en el origen) son invertibles módulo un término de error. En el caso de operadores en $\mathrm{O}\textsc{p}(\Gamma)(k)$, tal error lo constituyen operadores de rango finito.

4. Invertibilidad de operadores en $\mathbb{Z}^k$

Estamos interesados en invertir operadores pseudo–diferenciales sobre $\mathbb{Z}^k$ que actúan como un multiplicador de Fourier, es decir, operadores T_σ que satisfacen

$$\widehat{T_\sigma u}(\theta) = \sigma(\theta)\widehat{u}(\theta).$$

Para ello se construye un operador T^* de modo que $T^*T_\sigma = I$, con $\sigma \in L^\infty(\mathbb{T}^k)$. Sólo se considera $\sigma(\theta)$ de valor real. Los resultados que se obtienen son válidos aún cuando σ es una función de parte real nula (las demostraciones para este caso deben ser ligeramente adaptadas). El método empleado para la inversión de dichos operadores está fundamentado en la construcción de la paramétrix de operadores pseudo–diferenciales elípticos de tipo $S^m_{\rho,\delta}$ (véase [8]). Dicho método fue usado en Cardona [2], para investigar la invertibilidad de operadores no elípticos en las clases S^m. Avanzar con nuestro objetivo requiere la introducción del siguiente Lema, cuya demostración puede ser consultada en [9], pág. 36.

Lema 1. *Existe una aplicación* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $0 \leq \psi(\tau) \leq 1$ *para* $\tau \in \mathbb{R}$, $\psi(\tau) = 0$ *si* $|\tau| \leq 1$ *y* $\psi(\tau) = 1$ *si* $|\tau| \geq 2$. ☑

En adelante T_σ será un operador pseudo–diferencial con símbolo real en $L^\infty(\mathbb{T}^k)$. Sea ψ como en el lema 1 y considere, para $0 < a < 1$, la aplicación ψ_a definida por

$$\psi_a(\theta) = (1-a)\psi\left(\frac{\sigma(\theta)}{a}\right).$$

Claramente

1. $0 \leq \psi_a(\theta) \leq 1 - a$ para $\theta \in \mathbb{T}^k$.
2. $\psi_a(\theta) = 0$, si $|\sigma(\theta)| \leq a$.
3. $\psi_a(\theta) = 1 - a$, si $|\sigma(\theta)| \geq 2a$.

Teorema 5. *Existe una red de operadores* $\{T_a\}_{0<a<1}$ *que satisface*

$$\lim_{a\to 0} T_a T_\sigma u(n) = u(n), \quad u \in L^1(\mathbb{Z}^k).$$

Demostración. Sea $\psi_a(\theta)$ la aplicación definida previamente. Para cada $0 < a < 1$ considere el operador pseudo–diferencial T_a dado por

$$T_a u(n) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \tau_a(\theta)\widehat{u}(\theta)\, d\theta\,,$$

donde

$$\tau_a(\theta) = \frac{\psi_a(\theta)}{\sigma(\theta)}\,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_a T_\sigma u(n) &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \tau_a(\theta)\widehat{T_\sigma u}(\theta)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \tau_a(\theta)\sigma(\theta)\widehat{u}(\theta)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{T}^k} e^{i\langle n,\theta\rangle} \psi_a(\theta)\widehat{u}(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Empleando el Teorema de la Convergencia Dominada y la Fórmula de Inversión obtenemos

$$\lim_{a\to 0} T_a T_\sigma u(n) = u(n), \quad u \in L^1(\mathbb{Z}^k). \quad ☑$$

Se define a continuación la familia de espacios $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$ dependiendo del operador T_σ, donde el límite $T^* = \lim_{a\to 0} T_a$ pueda ser definido y acotado sobre $L^2(\mathbb{Z}^k)$.

Definición 1. *Para cada operador T_σ como en el Teorema* 5, *sea $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$ el espacio de funciones definido por*

$$\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k) = \left\{ u : \sigma(\theta)^{-1}\widehat{u}(\theta) \in L^2(\mathbb{T}^k) \right\}.$$

Nótese que $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k) \neq \emptyset$, ya que si $v \in L^1(\mathbb{Z}^k)$, entonces u, definida por la ecuación

$$\widehat{u} = \psi_a \sigma(\theta)\widehat{v}\,,$$

es un elemento de $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$. Por otro lado, la función

$$\|u\|_\sigma = \left\| \widehat{u}\sigma(\theta)^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^k)}$$

es una norma en $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$.

Proposición 1. $L^1(\mathbb{Z}^k) \cap \mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$ *es un subespacio denso de* $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$, entonces existe una sucesión $\{\widehat{v}_n\}_n$ en $L^1(\mathbb{T}^k)$ que converge a $\widehat{u}\sigma(\theta)^{-1}$ en $L^2(\mathbb{T}^k)$. La sucesión $\{u_n\}_n$ en $L^1(\mathbb{Z}^k)$ definida por $\widehat{u}_n = \sigma(\theta)\widehat{v}_n\psi_{n^{-1}}$ converge a u con respecto a la norma de $\mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k)$. En efecto

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_\sigma &= \|\mathcal{F}(u_n - u)\sigma(\theta)^{-1}\|_{L^2} \\ &= \|\widehat{v}_n\psi_{n^{-1}} - \widehat{u}\sigma(\theta)^{-1}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Aquí $\mathcal{F}(f)$ denota la transformada de Fourier de f. ☑

Teorema 6. *Sea $\{T_a\}_{0<a<1}$ la familia de operadores definida en el teorema 5. Entonces para cada red $T_a \in B(\mathbb{D}_\sigma, L^2)$ se tiene que esta red converge a algún operador $T^* \in B(\mathbb{D}_\sigma, L^2)$. Más aún, para cada $u \in L^1(\mathbb{Z}^k)$,*

$$T^* T_\sigma u = u.$$

En este sentido, T^* es un inverso de T_σ.

Demostración. En primer lugar, si $u \in \mathbb{D}_\sigma(\mathbb{Z}^k) \cap L^1(\mathbb{Z}^k)$, entonces

$$\begin{aligned} \|T_a u\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(\psi_a(\theta)\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u})\|_{L^2} \\ &= \|\psi_a(\theta)\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u}\|_{L^2} \\ &\leq (1-a)\|\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u}\|_{L^2} \leq \|u\|_\sigma. \end{aligned}$$

Por un argumento de densidad se puede concluir la continuidad de los T_a's. Además,

$$\begin{aligned} \|T_a u - T_b u\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}([\psi_a - \psi_b](\theta)\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u})\|_{L^2} \\ &= \|[\psi_a - \psi_b](\theta)\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u}\|_{L^2} \\ &\leq \|\psi_a - \psi_b\|_{L^\infty}\|\sigma(\theta)^{-1}\widehat{u}\|_{L^2} \\ &= \|\psi_a - \psi_b\|_{L^\infty}\|u\|_\sigma. \end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon > 0$; existe $0 < a_0 < 1$ de modo que

$$0 < a, b < a_0 \implies \|\psi_a - \psi_b\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Así, $\{T_a\}_{0<a<1}$ es una red de Cauchy sobre $B(\mathbb{D}_P, L^2)$ que converge a algún operador $T^* \in B(\mathbb{D}_\sigma, L^2)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\|T^*T_\sigma u - u\|_{L^2} &\leq \|(T^* - T_a)T_\sigma u\|_{L^2} + \|T_aT_\sigma u - u\|_{L^2}\\ &\leq \|T^* - T_a\|_{B(\mathbb{D}_\sigma, L^2)}\|T_\sigma u\|_\sigma + \|T_aT_\sigma u - u\|_{L^2}\\ &\leq \|T^* - T_a\|_{B(\mathbb{D}_\sigma, L^2)}\|u\|_{L^2} + \|T_aT_\sigma u - u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Cuando $a \to 0$, el primer término del lado derecho tiende a cero. Usando el teorema 5 y aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, $\|T_aT_\sigma u - u\|_{L^2} \to 0$. Se sigue que $\|T^*T_\sigma u - u\|_{L^2} \to 0$, y por tanto $T^*T_\sigma u = u$. ☑

Agradecimientos. El autor agradece a los profesores Julio Delgado y Guillermo Ortiz por sus útiles consejos.

Referencias

[1] Brézis, H., *Análisis Funcional* Alianza Editorial S.A. Madrid, 1984.

[2] Cardona, D., *Invertibilidad de operadores pseudo–diferenciales no elípticos.* Tesis de pregrado en Matemáticas. Universidad del Valle, 2013.

[3] Catană, V., *International conference on Fourier analysis and pseudo–differential operator.* pág. 17., 2012.

[4] Gröchenig, K., Strohmer, T., *Pseudodifferential Operators on locally compact abelian groups and Sjstrand's symbols class.* J. Reine Angew. Math. vol. 613 págs. 121-146. (2007).

[5] Molahajloo, S., *Pseudo-differential Operators on* $\mathbb{Z}$. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 205. págs. 213-221. Birkhäuser Verlag, Basel, (2009)

[6] Rodríguez, C., *Pseudo-differential Operators on* $\mathbb{Z}^n$. J. Pseudo-Differ. Appl., vol. 2. págs. 367–375. (2011).

[7] Rodríguez, C., *Operadores pseudo–diferenciales en* $\mathbb{Z}^n$. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad del Valle, 2011.

[8] Ruzhansky, M., Turunen, V.,*Pseudo–differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics* Birkhaüser-Verlag, Basel, 2010.

[9] Wong, M. W.,*Discrete Fourier Analysis* Birkhaüser: Germany, 2011.

(Recibido en mayo de 2013. Aceptado para publicación en agosto de 2013)

Duván Cardona
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia
Calle 13 No. 100–00
e-mail: duvan.cardona@correounivalle.edu.co, duvanc306@gmail.com