Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 13–20

Avances en la teoría de grupos en las últimas dos décadas

Mauricio Gutiérrez
Tufts University, Somerville MA, EE. UU. AA.

Abstract. In this note we give a succinct account of some advances in group theory in the last two decades of the 20th Century, hoping it will be useful to readers interested in the subject.

Key words and phrases. Group theory, Hyperbolic groups.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 20F55, 20F67.

Resumen. En esta nota daremos un sucinto recuento de los avances en la teoría de grupos en las dos últimas décadas del siglo XX, esperando que sea útil para los lectores interesados en este tema.

En esta nota daremos un sucinto recuento de los avances en la teoría de grupos en las dos últimas décadas del siglo XX, esperando que sea útil para los lectores interesados en este tema.

Tras un período muy fructífero, empujado por Max Dehn y Jakob Nielsen en las primeras décadas del siglo XX, la teoría de grupos paulatinamente comenzó a abandonar la geometría en favor del álgebra. A pesar de que la teoría de grupos **es** álgebra, desde sus orígenes se inspiró en la geometría. Pero en los años 40 y 50 del siglo pasado las demostraciones "geométricas" que a Nielsen y a otros como Oskar Schreier les requerían tres líneas, ahora se hacían algebraicamente, en varias páginas y con triples inducciones. Estos fueron efectivamente años obscuros para la teoría de grupos.

En 1967 apareció un libro, destinado según el autor a estudiantes de pregrado, intitulado *Algebraic Topology: An Introduction*, por William Massey. En él, Massey revivió las viejas técnicas de los años 20 y 30 utilizando las ideas de un joven de inmenso talento: John Stallings. Así, por ejemplo, Massey demostró, a nivel elemental, los siguientes teoremas:

Teorema de Kurosh. *Si* $(G_n)_{n\in I}$ *es una familia de grupos, entonces todo subgrupo* H *del producto libre* $G = \prod^* G_n$ *de los* G_n *es el producto libre de conjugados de subgrupos de los* G_n *y de un grupo libre* L*, es decir,*

$$H \cong \prod^* (w_i U_i w_i^{-1}) * L,$$

donde U_i *es un subgrupo de* $G_{n(i)}$*,* $w_i \in G$ *y* L *es libre.*

Teorema de Grushko. *Si* f *es una aplicación de un grupo libre* L *sobre un producto libre de grupos* G_n*, entonces* L *se descompone como un producto libre de grupos libres* L_n*, subgrupos de* L*, tales que* $f(L_n) = G_n$*, para todo índice* $n \in I$*.*

STALLINGS pasó de este tipo de nuevas demostraciones de viejos teoremas a cosas mucho más profundas gracias a la resurrección de dos viejas ideas: los grafos de Cayley y las ideas de NIELSEN, *inter alia*, sobre acciones de grupos sobre espacios topológicos. Veamos cómo:

Sean G un grupo y S un conjunto de generadores de G. El grafo de Cayley $C(G;S)$ de G tiene como vértices a los elementos de G. Dos vértices g y h están unidos por una arista a (en dirección de g a h), a la cual le asignamos la etiqueta $s \in S$, cuando $h = gs$. La arista $\widehat{a}$ de h a g tiene etiqueta s^{-1}, y, en efecto, $g = hs^{-1}$. De hecho, pensamos a a y a $\widehat{a}$ como una misma arista, pero en distintas direcciones.

Aunque el grafo de Cayley de un grupo es en general infinito, si S es finito el grafo tiene *valencia* $|S|$, la cardinalidad de S. El hecho de que S genere a G implica entonces que $C(G;S)$ sea un *grafo conexo.*

Si S es un conjunto de generadores s, sea S^{-1} el conjunto $\{s^{-1} \mid s \in S\}$. Entonces todo elemento $g \in G$ se puede escribir como un producto $s_1 \dots s_n$ con $s_i \in S \cup S^{-1}$. Esto corresponde al hecho que existe un epimorfismo $\pi : F(S) \to G$, donde $F(S)$ es el grupo libre con base S y, para todo $s \in S$, $\pi(s) = s$. Si comenzamos en el vértice que corresponde al elemento identidad de G, podemos trazar un camino en $C(G;S)$ cuyo primer segmento está etiquetado por s_1 y que une los vértices 1 y s_1. Del vértice s_1 trazamos una arista de etiqueta s_2 que une s_1 con el vértice etiquetado s_1s_2 y de s_1s_2 trazamos una arista con etiqueta s_3 que termina en $s_1s_2s_3$ etc. Cada camino en $C(G;S)$ que comienza en el vértice 1 corresponde a una factorización del elemento que corresponde al punto final del camino. En particular, el camino es cerrado (esto es, comienza y termina en 1) precisamente cuando la expresión $s_1s_2 \dots s_n$ representa el elemento identidad de G. Tales expresiones se llaman las *relaciones* de G con generadores S. En general, las relaciones forman un subgrupo normal infinito $R = \ker \pi$ del grupo libre $F(S)$ y $F/R \simeq G$.

Una *acción* de un grupo G sobre un espacio topológico X es un homomorfismo $G \to \mathrm{Homeo}(X)$, donde $\mathrm{Homeo}(X)$ designa al grupo de los homeomorfismos de X en sí mismo.

El ejemplo más elemental de una acción es la de un grupo G sobre su grafo de Cayley $C(G;S)$: en efecto, si g et gs están unidos por una arista a, y si $x \in G$, entonces xg y xgs también están unidos por una arista que llamamos xa. Esto define una acción de G sobre $C(G;S)$, la cual es libre en el sentido de que la acción de un elemento g de G no tiene puntos fijos a menos que $g = 1$.

El grafo de Cayley permite definir la noción de *extremo* de un grupo, así: a un espacio topológico X le hacemos corresponde el conjunto $\mathrm{End}(X)$ que no es otra cosa que el límite inverso de los $X \setminus K$, donde K recorre los subconjuntos compactos de X. La cardinalidad de $\mathrm{End}(X)$ se dice ahora el *número de extremos de X*.

Ejemplo. La recta real $\mathbf{R}$ tiene dos extremos pues los intervalos $[-n, n]$ forman un conjunto cofinal de compactos y $\mathbf{R} \setminus [-n, n]$ siempre tiene dos componentes.

El número de extremos del grafo de Cayley $C(G;S)$ de un grupo G es independiente de S y se llama el número de extremos de G.

Ejemplos. Si los enteros $\mathbf{Z}$ se consideran generados por $+1$, su grafo de Cayley es una recta construida pegando intervalos $[n, n+1]$, todos con la etiqueta "$+1$". Por lo tanto $\mathbf{Z}$ tiene dos extremos. De otro lado (ver más abajo) el grafo de Cayley de $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ tiene un solo extremo y aquel del grupo libre con base $\{a, b\}$ tiene un numero infinito de extremos.

Con estas técnicas Stallings demostró el siguiente resultado:

Teorema. *Si un grupo finitamente generado (de tipo finito) tiene dimensión cohomológica* 1 *entonces es un grupo libre.*

Pero el giro más decisivo en la teoría de grupos del siglo XX lo hizo Mijail Gromov a principios de la década de los 80: la observación más banal es que si F es un grupo libre con base $B = \{a, b\}$, entonces hay un diferencia crucial entre $C(F;B)$ y $C(A;B)$, donde $A = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ es el grupo **abeliano** libre con la misma base. De hecho, es fácil ver que $C(A;B)$ está conformado por las rectas en el plano euclídeo E^2 de ecuaciones $x = n$ y $y = m$, donde n y m son enteros. El punto está en que el grafo de Cayley es euclídeo.

Esto es definitivamente falso en el caso de un grupo F cuyo grafo de Cayley no se puede encajar **isométricamente** en el plano pero que **sí** se puede encajar en el plano hiperbólico H^2. Por ejemplo, los grupos libres son hiperbólicos como lo son también todos los grupos de las superficies orientables cerradas que tienen como revestimiento universal, de la superficie, al plano hiperbólico.

La cosa importante en estas observaciones es que aunque E^2 y H^2 son homeomorfos sus **geometrías** son diferentes.

Ejemplo. El grupo libre abeliano $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ actúa sobre E^2 por translación y el cociente es un toro T con grupo $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$. Por lo tanto, el dominio fundamental de esta acción, el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, tesela al plano E^2 en baldosines de tamaño 1 por 1 que se tocan solo en los bordes: el grafo $C(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}; \{(1, 0), (0, 1)\})$.

Pero si uno intenta lo mismo con una superficie de género dos, esta superficie es el resultado de pegar los lados de un octógono y es imposible teselar el plano euclídeo con octógonos regulares. **¡Pero H^2 sí se puede teselar axialmente!**

Es difícil explicar la novedad de este método de ataque: ni NIELSEN ni DEHN, ni el gran WHITEHEAD, habían utilizado la geometría (distinta de la topología) como instrumento de ataque.

Definición. Sea X un espacio métrico con métrica d. Se dice que X es *geodésico* si para toda pareja de puntos x, y de X con $d(x, y) = d$, existe una isometría $g : [0, d] \to X$ tal que $g(0) = x$ et $g(d) = y$. Si $\varepsilon \geq 0$, se dice que X es $\varepsilon-$hiperbólico si

(a) X es un espacio métrico geodésico y
(b) si A, B y C son tres puntos cualquiera de X y ABC es un triángulo geodésico, entonces todo punto de AC dista menos de ε de un punto de la unión $AB \cup AC$.

Con otras palabras, la vecindad de radio ε alrededor de $AB \cup AC$ contiene al lado AC. Esto es claramente falso, por ejemplo, en E^2 donde en un triángulo recto isósceles la distancia de la hipotenusa a la unión de los catetos $\to \infty$ con la longitud de los catetos.

Ahora bien, todo grafo es un espacio geodésico. Si este grafo es un árbol (es decir, no tiene circuitos no-triviales) las geodésicas son únicas.

Entonces decimos que un grupo es *hiperbólico* si, para algún conjunto **finito** de generadores S, el grafo $C(G; S)$ es $\varepsilon-$hiperbólico para algún $\varepsilon \geq 0$.

Naturalmente, la pregunta "¿y qué pasa si cambiamos el sistema de generadores S?" es la primera que nos hacemos ante semejante definición. GROMOV tuvo entonces su segunda idea:

Definición. Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos. Un encaje *cuasi isométrico* es una función $f : X \to Y$ que satisface la siguiente fórmula para un $\lambda \geq 1$ y un $\delta \geq 0$:

$$\lambda^{-1} d(x, y) - \delta \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \delta.$$

Observemos que si $\delta > 0$ la función ni siquiera es necesariamente continua. Si, adicionalmente, existe una constante $C \geq 0$ tal que la imagen de f tiene diámetro C en Y, entonces decimos que f es una *cuasi isometría*.

Subsisten entonces las siguientes proposiciones:

Proposición. *Si S y T son dos sistemas finitos de generadores de un grupo G, entonces $C(G; S)$ y $C(G; T)$ son cuasi isométricos.*

Proposición. *Si X es un espacio $\varepsilon-$hiperbólico y $f : X \to Y$ es una cuasi isometría, entonces Y también es $\varepsilon'-$hiperbólico (ε' depende de ε, λ y δ).*

Un corolario inmediato de las anteriores proposiciones es que un grupo de tipo finito (finitamente generado) es hiperbólico o no, independientemente del sistema (finito) de generadores escogido. Por ejemplo para el grupo libre F con base B (véase arriba) $C(F;B)$ es un árbol, y todo árbol es $0-$hiperbólico.

Lema. *Si (X,d) es $\varepsilon-$hiperbólico y ABC es un triángulo geodésico donde $|AC| = 1$, AB está descrito por la geodésica α y BC por la geodésica β, entonces $d(\alpha(t),\beta(t)) \leq 2\varepsilon + 2$, para todo real t.*

Demostración: El punto $\alpha(t)$ está a una distancia $\leq \varepsilon$ de un punto $\beta(s)$ de BC o de un punto P de AC. En el segundo caso $\alpha(t)$ está a una distancia $\leq \varepsilon + 1$ del punto final B de β. En conclusión, para todo t existe s tal que $d(\alpha(t),\beta(s)) \leq \varepsilon + 1$. Pero recordemos que α y β son geodésicas, por lo tanto la desigualdad del triángulo aplicada al triángulo $A\alpha(t)\beta(s)$ nos da $d(\beta(t),\beta(s)) = |t-s| = |d(A,\alpha(t)) - d(A,\beta(s))| \leq d(\alpha(t),\beta(s)) \leq \varepsilon + 1$. Por lo tanto $d(\alpha(t),\beta(t)) \leq d(\alpha(t),\beta(s)) + d(\beta(s),\beta(t)) \leq 2\varepsilon + 2$. ☑

Recordemos que si G es un grupo con un conjunto finito de generadores S entonces existe un epimorfismo $\pi : F(S) \to G$, donde $F(S)$ es el grupo libre con base S. Sea $R = \ker\pi$; entonces R es un subgrupo normal de $F(S)$. Si existe un subconjunto finito $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ tal que los elementos de $\mathcal{R}$ y *todos sus conjugados* por elementos de $F(S)$ generan el subgrupo R, decimos que G tiene la presentación finita $\langle S \mid \mathcal{R}\rangle$ o que G *admite una presentación finita*.

Teorema. *Todo grupo hiperbólico G admite una presentación finita.*

Demostración. Con la notación precedente, sea $w = s_1 \ldots s_n$, $s_i \in S \cup S^{-1}$ un elemento de R. A ésta expresión corresponde un camino cerrado γ en el grafo de Cayley $C = C(G;S)$ con etiquetas $s_1, \ldots s_n$. Sean $p_0 = 1$, S un sistema finito de generadores de G (que existe por definición) y sea F el grupo libre con base S. Entonces hay un epimorfismo $F \to G$. Sea C el grafo $C(G;S)$. El grafo C es $\varepsilon-$hiperbólico por hipótesis. Si w es una expresión (palabra) en F, $w = s_1 s_2 \cdots s_n$, $s_i \in S \cup S^{-1}$, que representa la unidad en G, entonces, comenzando con el vértice 1 de C podemos describir un camino γ que comienza con el lado a_1 (o $\widehat{a}_1$) de C con punto inicial 1 y etiqueta s_1. Partiendo de s_1, concatenamos la arista a_2, o $\widehat{a}_2$, que saliendo de s_1 termina en $s_1 s_2$ y que tiene etiqueta s_2. Esto define un camino $\gamma = a_1 a_2 \cdots a_n$ en C cuyas aristas tienen etiquetas s_1, s_2, $\ldots$y, como w es trivial en G, este camino es cerrado, esto es, termina en 1. Sean $p_0 = 1$, p_1, p_2,$\ldots$,$p_n = 1$ los puntos terminales de las aristas de este camino y sean σ_1,$\ldots$, σ_{n-1} geodésicas de 1 a p_1,$\ldots$, ${}_{n-1}$. Entonces tenemos una serie de triángulos con lados σ_i, σ_{i+1} y un lado de la forma a_i, o $\widehat{a}_i$, de longitud uno en el camino γ. La longitud de las geodésicas es siempre $\leq n$. Por el Lema, en estos triángulos la distancia entre $\sigma_i(t)$ y $\sigma_{i+1}(t)$ no es nunca mayor que $2\varepsilon + 2$. Usando valores enteros para t, $1 \leq t \leq n$, podemos dividir estos triángulos en cuadriláteros de lado 1 sobre cada σ_i, de $\sigma_i(k)$ a $\sigma_i(k+1)$, y de $\sigma_{i+1}(k)$ a $\sigma_{i+1}(k+1)$. Los otros dos lados, de $\sigma_i(k)$ a $\sigma_{i+1}(k)$ y de $\sigma_i(k+1)$ a $\sigma_{i+1}(k+1)$, son de longitud $2\varepsilon + 2$. En total este cuadrilátero, que llamamos c_{ik}, tiene una longitud menor que $2(2\varepsilon + 2) + 2$. Ahora bien, podemos representar la expresión w por medio de un producto

$w = \Pi u_{ik} c_{ik} u_{ik}^{-1}$, donde $u_{ik} = \sigma_i \big| [0, k]$. Las expresiones u tienen longitud $\leq n$ y las c tienen longitud $\leq 4\varepsilon + 6$. Pero en el grupo F con base S existe solo un número finito de expresiones de longitud $\leq 4\varepsilon + 6$, por lo tanto el número de relaciones de G debe ser finito. ☑

He dado una prueba de manera completa para dar una idea de cómo se usa la geometría para hacer una demostración algebraica. Es más, esta demostración y algunos detalles adicionales demuestran dos teoremas importantes (aquí F es el grupo libre definido en la demostración anterior).

Teorema. *Existe un algoritmo finito para decidir si una expresión w de F representa un elemento trivial de G o no.* (Otra manera de expresar este resultado es decir que el problema de la identidad es resoluble.)

Demostración. Si, como anteriormente, w es el producto de n símbolos, entonces w tiene que ser un producto de menos de n^2 factores de longitudes acotadas superiormente. De esos productos existe solo un número finito y basta verificarlos todos a mano. ☑

Con un poco más de trabajo se demuestra el siguiente teorema:

Teorema. *Existe un algoritmo finito para decidir si dos expresiones w y w' de F representan elementos conjugados en G.* (o también podemos decir que el problema de la conjugación es resoluble).

Los grupos hiperbólicos gozan de muchas otras propiedades: son bi automáticos (es decir, un autómata no determinante da una factorización de todos los elementos del grupo y pequeños cambios en el elemento no cambian mucho la respuesta del autómata). Usando un teorema de Elie Cartan que dice que en toda variedad hiperbólica un conjunto finito tiene centro, se puede demostrar que los subgrupos finitos de un grupo hiperbólico se agrupan en un número finito de clases de conjugación.

Después de los grupos hiperbólicos, Gromov, Thurston, Cannon y otros definieron la noción CAT(0). La idea es la siguiente: hiperbólico quiere decir curvatura negativa. ¿Qué quiere decir curvatura κ en un espacio geodésico?

Sea $M(\kappa)$ el modelo estándar de una variedad de curvatura constante igual a κ. Por ejemplo. para $\kappa = -1$ este modelo es H^2; para $\kappa = 0$ el modelo es E^2 y para $\kappa = 1$ el modelo es la esfera.

Definición. Un espacio geodésico (X, d) es CAT(κ) si para todo triángulo geodésico ABC en X con lados de longitud $|AB|$, $|BC|$ y $|AC|$, respectivamente, el triángulo geodésico $A'B'C'$ de $M(\kappa)$, de las mismas longitudes, $|AB| = |A'B'|$, etc., satisface la siguiente desigualdad: si P es un punto en AB y Q un punto en BC, sean P' y Q' puntos en $A'B'$ y en $B'C'$ tales que $|AP| = |A'P'|$ y $|BQ| = |B'Q'|$, entonces

$$|PQ| \leq |P'Q'|\,. \tag{CAT(κ)}$$

A primera vista esta definición parece inocua pero, por ejemplo CAT(0) implica que X tiene geodésicas únicas: la existencia de un dígono geodésico (que es un triángulo con tercer lado 0) viola la desigualdad CAT(0) puesto que en E^2 las dos geodésicas se superimponen y la distancia $|P'Q'| = 0$. Podemos retraer a lo largo de esas geodésicas únicas y esto muestra que X es homotópico a un punto (es decir, es contráctil o contraíble).

Un grupo G actúa sobre un espacio métrico (X, d) por medio de isometrías si tenemos un homomorfismo $\iota : X \to \mathrm{Homeo}\, X$ tal que, para todo $x, y \in X$ y $g \in G$ tenemos,

$$d(x, y) = d(\iota(g)(x), \iota(g)(y)).$$

La acción es *propia* si para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta V tal que el número de elementos $g \in G$ tales que $V \cap gV \neq \emptyset$ es finito. En la práctica, eso quiere decir que la aplicación $X \to X/G$ es un revestimiento con singularidades. Finalmente, una acción es *cocompacta* si X/G es compacto. Una acción por isometrías, propia y cocompacta se llama *geométrica*.

Proposición *Si G actúa geométricamente sobre un espacio conexo, entonces G es finitamente generado.*

Demostración. Como la acción es cocompacta, existe un compacto $K \subset X$ tal que $G \cdot K =: \bigcup_{g \in G} g \cdot K = X$. Como la acción es propia, podemos hallar una cubierta finita $\{V_\alpha\}$ de K tal que cada $S_\alpha = \{s \in G \mid V_\alpha \cap s \cdot V_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito. Sean $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ y $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$. Entonces S es el conjunto (finito) de los elementos s de G tales que $V \cap s \cdot V \neq \emptyset$. Si H el subgrupo de G generado por S, entonces $X = H \cdot V \cup (G \setminus H) \cdot V$, que son ambos abiertos puesto que son uniones de abiertos de la forma $s \cdot V$; el primero de ellos no es vacío puesto que contiene V. Si $H \cdot V \cap (G \setminus H) \cdot V \neq \emptyset$ entonces $hv = gw$, $h \in H$, $v, w \in V$ y $g \in G \setminus H$. Entonces $g^{-1}hv = w$ lo que dice que $g^{-1}h \cdot V \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto $g^{-1}h \in S$ de donde $g \in H$. Esa contradicción muestra que $H \cdot V \cap (G \setminus H) \cdot V = \emptyset$. Como X es conexo, uno de los dos conjuntos (a fuerza, $(G \setminus H) \cdot V$) es vacío y $H = G$. ☑

Definición. Un grupo G (no necesariamente de tipo finito) es CAT(0) si actúa geométricamente sobre un espacio CAT(0).

Estos grupos tienen casi todas las propiedades de los grupos hiperbólicos, pero la relación exacta entre estos tipos de grupos es desconocida. Por ejemplo, todo grupo de Coxeter es CAT(0) y es hiperbólico si y solamente si no contiene una copia de $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$.

Concluimos esta nota con una lista de propiedades de los grupos CAT(0). Casi todas las pruebas de estas propiedades, en espíritu, son como la que dimos más arriba:

Si un grupo G es CAT(0) entonces G es de presentación finita (este es un bellísimo resultado que precede a toda la teoría y data de 1957).

Los problemas de la identidad y de conjugación son resolubles.

G tiene solo un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos.

Todo subgrupo abeliano de G es de tipo finito.

Personalmente nos dedicamos en estos días a los grupos de Coxeter con ángulos rectos, que están codificados por un grafo Γ con vértices S y aristas A. Una presentación de tales grupos es

$$< S \mid s^2 = 1, s \in S, st = ts \quad \text{si} \quad [s,t] \in A > \ .$$

Recientemente hemos comenzado a estudiar grupos cuya presentación es como arriba, pero cuyos generadores tienen orden $m \geq 2$. Estos grupos casi seguramente, creemos, son CAT(0).

Bibliografía

La mejor referencia sobre estos temas es el libro *Metric Spaces of Non-positive Curvature* de M. BRIDSON y A. HAEFLIGER (Springer). No solo es un libro magniífico por sí mismo, sino que contiene una valiosísima bibliografía. El material contenido en este libro existe en forma de sumario en las actas de *Groups: St. Andrews*, London Math. Soc., 1997. Otro gran libro es *Trees* de J. P. SERRE (Springer) (traducción del original francés *Arbres, ammalgames et SL_2* (Astérisque)).

Existen también innumerables trabajos expositivos. Uno, en forma de libro, es *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* de E. GHYS y P. DE LA HARPE (Birkhäuser).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS A&S
TUFTS UNIVERSITY
SOMERVILLE MA, USA
e-mail: mauricio.gutierrez@tufts.edu