Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 175–183

Relaciones de equivalencia acotadas tipo-definibles y espacios métricos

Rodrigo Peláez
Universidad de Barcelona, España

Abstract. Given a first order complete theory T with monster model $\mathbb{C}$ and a type-definable bounded equivalence relation E in $\mathbb{C}^k$ for some $k \in \mathbb{N}$, we define a topology and a compatible metric in the space $\mathbb{C}/E$. Some results and special cases are presented.

Key words and phrases. Type-definable bounded equivalence relations.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 03C45.

Resumen. Dada una teoría completa T de primer orden con modelo monstruo $\mathbb{C}$ y una relación de equivalencia acotada E en $\mathbb{C}^k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, se definen una topología y una métrica compatibles en el espacio $\mathbb{C}/E$. Se discuten algunos resultados y casos especiales.

1. Introducción y preliminares

Las siguientes notas contienen los principales resultados expuestos en la charla *"Metric Spaces and Type-Definable Equivalence Relations"* que dí el jueves 12 de agosto de 2005 dentro del XV Congreso Nacional de Matemáticas. La mayoría de los resultados tienen sus pruebas escritas aquí, y en ciertos casos se da tan sólo la referencia donde el lector puede encontrar la prueba.

Se trabaja sobre una teoría completa T en el lenguaje $\mathcal{L}$ y con modelo monstruo $\mathbb{C}$. E denotará una relación de equivalencia en cierto $\mathbb{C}^k$ $(k \in \omega)$ acotada y tipo-definible sobre $\emptyset$. Por comodidad se escribirá $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{C}^k$. Se supondrá también que el tipo que define a E es numerable y viene dado de la siguiente manera:

$$E(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in\omega} \theta_n(x,y),$$

donde, usando compacidad, se asumirá que las θ_n's son fórmulas reflexivas, simétricas y que cumplen la siguiente propiedad:

$$\models \theta_{n+1}(x,y) \wedge \theta_{n+1}(y,z) \rightarrow \theta_n(x,z).$$

Se define una topología τ en $\mathbb{C}/E$ con una base de abiertos dada por

$$\mathcal{B} = \{[\varphi(x)] : \varphi(x) \in \mathcal{L}\},$$

donde $[\varphi(x)] = \{a/E : a/E \subseteq \varphi(\mathbb{C})\}$. Es fácil ver que una base de cerrados para τ viene dada por

$$\mathcal{B}' = \{\langle\varphi(x)\rangle : \varphi(x) \in \mathcal{L}\},$$

donde $\langle\varphi(x)\rangle = \{a/E : a/E \cap \phi(\mathbb{C}) \neq \emptyset\}$.

Observación 1.1. *Dado que E es acotada, $(\mathbb{C}/E, \tau)$ es compacto y Hausdorff.*

Demostración. Claramente el espacio es Hausdorff. Dado que E es acotada, $|\mathbb{C}/E| = \kappa$ para cierto cardinal κ. Supóngase que existe un recubrimiento abierto $\{[\varphi(x, a_i)] : i \in I\}$ ($|I| \leq 2^\kappa$) que no tiene subrecubrimiento finito. Entonces, el conjunto de fórmulas

$$\{\exists y(E(x,y) \wedge \neg\varphi_i(y, a_i)) : i \in I\}$$

es finitamente satisfactible. Por compacidad existe entonces $x/E \in \mathbb{C}/E$ que no está en el recubrimiento, lo cual genera una contradicción. ☑

Los abiertos asociados a las fórmulas que definen E están encadenados de la siguiente manera.

Observación 1.2. *Nótese que para cada $n \in \omega$ y cada $a \in \mathbb{C}$,*

$$\langle\theta_{n+1}(x,a)\rangle \subseteq [\theta_n(x,a)] \subseteq \langle\theta_n(x,a)\rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
b/E \in \langle\theta_{n+1}(x,a)\rangle \quad &\Rightarrow \quad b/E \cap \theta_{n+1}(\mathbb{C}, a) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \quad \exists b^* \in b/E \text{ tal que } \models \theta n + 1(b^*, a) \\
&\Rightarrow \quad \forall b^{**} \in b/E, \models \theta_{n+1}(b^{**}, b^*) \wedge \theta_{n+1}(b^*, a) \\
&\Rightarrow \quad \forall b^{**} \in b/E, \models \theta_n(b^{**}, a) \\
&\Rightarrow \quad b/E \subseteq \theta_n(\mathbb{C}, a) \\
&\Rightarrow \quad b/E \in [\theta_n(x,a)].
\end{aligned}$$

Claramente $[\theta_n(x,a)] \subseteq \langle\theta_n(x,a)\rangle$. ☑

2. El espacio métrico

Se define una distancia en $\mathbb{C}/E$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{C}/E\times\mathbb{C}/E & \to & \mathbb{R} \\ (a/E,b/E) & \mapsto & (1/2)^{\mu_{ab}}, \end{array}$$

donde

$$\mu_{ab}=\sup\left\{n:\mathbb{C}\models\theta_n(a^*,b^*)\forall a^*,b^*\in a/E,b/E\right\},$$

$$(1/2)^{\omega}:=0 \text{ y}$$

$$\sup\emptyset:=-1.$$

Para verificar que la anterior es efectivamente una métrica, basta comprobar la desigualdad triangular. Sean $a/E,b/E,c/E\in\mathbb{C}/E$. Supóngase que $d(a/E,b/E)=(1/2)^m$, $d(b/E,c/E)=(1/2)^n$ y $m\leq n$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $m\leq n$. Nótese que para cualesquiera $a^*,b^*,c^*\in a/E,b/E,c/E$,

$$\models\theta_m(a^*,b^*)\wedge\theta_m(b^*,c^*).$$

Así, para cualesquiera $a^*,c^*\in a/E,c/E$,

$$\models\theta_{m-1}(a^*,c^*),$$

con lo cual $\mu_{ac}\geq m-1$. De esta forma se tiene que

$$\begin{array}{rcl} d(a/E,c/E) & \leq & (1/2)^{m-1} \\ & = & (1/2)^m+(1/2)^m \\ & \leq & (1/2)^m+(1/2)^n \\ & = & d(a/E,b/E)+d(b/E,c/E)\,. \end{array}$$

Se hablará de *bolas abiertas* y *bolas cerradas* en $\mathbb{C}/E$ con respecto a esta métrica. Las bolas abiertas con centro en a/E y radio $(1/2)^n$ se denotarán por

$$B^{<}_{a/E,(1/2)^n}=\{b/E:d(b/E,a/E)<(1/2)^n\}$$

y análogamente las bolas cerradas con centro en a/E y radio $(1/2)^n$ se denotarán por

$$B^{\leq}_{a/E,(1/2)^n}=\{b/E:d(b/E,a/E)\leq(1/2)^n\}\,.$$

Proposición 2.1. *La topología inducida por la métrica coincide con la topología τ recién introducida.*

Demostración. Se verá que:

1. Para cada punto de un abierto básico de τ existe una bola abierta que contiene al punto y está incluida en el abierto.

Sea $[\varphi(x)]$ un abierto básico de τ y $a/E \in [\varphi(x)]$. Por compacidad, existe $n \in \omega$ tal que $a/E \in [\theta_n(x,a)] \subseteq [\varphi(x)]$. Para ver esto, supóngase que no es así. Sea $\overline{[\varphi(x)]}$ el complemento de $[\varphi(x)]$. Nótese que

$$a/E = \bigcap_{n\in\omega} \langle \theta_n(x,a) \rangle,$$

con lo cual, por hipótesis, la familia de cerrados

$$\left\{ \langle \theta_n(x,a) \rangle \cap \overline{[\varphi(x)]} : n \in \omega \right\}$$

tiene la propiedad de intersección finita. Por compacidad se tiene entonces que

$$\bigcap_{n\in\omega} \theta_n(x,a) \cap \overline{[\varphi(x)]} \neq \emptyset,$$

obteniéndose una contradicción.

Nótese que $B^{<}_{a/E,(1/2)^n} \subseteq [\theta_n(x,a)]$. Para ver esto obsérvese que

$$\begin{aligned} b/E \in B^{<}_{a/E,(1/2)^n} \quad &\Rightarrow \quad d(b/E,a/E) < (1/2)^n \\ &\Rightarrow \quad \models \theta_{n+1}(b/E,a/E) \\ &\Rightarrow \quad \forall b^* \in b/E, \models \theta_{n+1}(b^*,b) \wedge \theta_{n+1}(b,a) \\ &\Rightarrow \quad \forall b^* \in b/E, \models \theta_n(b^*,a) \\ &\Rightarrow \quad b/E \in [\theta_n(x,a)]\,. \end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$a/E \in B^{<}_{a/E,(1/2)^n} \subseteq [\theta_(x,a)] \subset [\varphi(x)],$$

como se quería mostrar.

2. Para cada punto de una bola abierta existe un abierto de τ que contiene al punto y está incluido en la bola.

   Sea $b/E \in B^{<}_{a/E,(1/2)^n}$. Supóngase que $d(b/E,a/E) = \varepsilon$. Sea $m \in \omega$ tal que $(1/2)^m = (1/2)^n - \varepsilon$. Usando la desigualdad triangular es fácil verificar que $B^{<}_{b/E,(1/2)^m} \subseteq B^{<}_{a/E,(1/2)^n}$. Finalmente, nótese que $[\theta_{m+2}(x,b)] \subset B^{<}_{b/E,(1/2)^m}$. Para ver esto, nótese que

$$\begin{aligned} c/E \in [\theta_{m+2}(x,b)] \quad &\Rightarrow \quad \forall c^* \in c/E \text{ y } \forall b^* \in b/E, \models \theta_{m+2}(c^*,b) \wedge \theta_{m+2}(b,b^*) \\ &\Rightarrow \quad \forall c^* \in c/E \text{ y } \forall b^* \in b/E, \models \theta_{m+1}(c^*,b^*) \\ &\Rightarrow \quad d(c/E,b/E) \le (1/2)^{m+1} < (1/2)^m\,. \qquad ☑ \end{aligned}$$

Proposición 2.2. *$(\mathbb{C}/E,d)$ es completo.*

Demostración. Al ser un espacio métrico compacto, $(\mathbb{C}/E,d)$ es completo. Sin embargo, a continuación se da una prueba detallada de este hecho que ilustra el comportamiento de las fórmulas que definen la relación de equivalencia E.

Sea $(a_i/E : i \in \omega) \subset \mathbb{C}/E$ una sucesión de Cauchy. Sea $f : \omega \to \omega$ una función estrictamente creciente tal que para todo $k \in \omega$ se tiene que

$$\forall n, m \geq f(k), d(a_n/E, a_m/E) < (1/2)^k \,.$$

Para verificar la convergencia de $(a_i/E : i \in \omega)$, basta ver que

$$\Sigma(x) = \{\theta_{k+3}(a_m, x) : m \geq f(k), k \in \omega\}$$

es consistente. Para ver esto, supóngase que $\models \Sigma(l)$ para cierto $l \in \mathbb{C}$. Nótese que para todo $k \in \omega$ y todo $m \geq f(k)$, $\models \theta_{k+3}(a_m, l)$. Nótese además que para cada $a^* \in a_m/E$, $\models \theta_{k+3}(a^*, a_m)$, con lo cual $\models \theta_{k+2}(a^*, l)$. Como $\models \theta_{k+2}(l, l^*)$ para todo $l^* \in l/E$, se tiene que

$$\models \theta_{k+1}(a^*, l^*) \text{ para cualesquiera } a^* \in a_m/E,\ l^* \in l/E.$$

Esto implica que para todo $k \in \omega$ y todo $m \geq f(k)$, $d(a_m/E, l/E) < (1/2)^k$, siendo entonces l/E un límite para la sucesión.

Para ver la consistencia de $\Sigma(x)$, considérese $\Sigma_0(x)$ un subconjunto finito arbitrario de $\Sigma(x)$. Sea

$$k^* = \text{máx}\,\{k \in \omega : \theta_{k+3}(a_m, x) \in \Sigma_0(x) \text{ para cierto } m \geq f(k)\}\,,$$

y sea

$$m^* = \text{máx}\,\{m \in \omega : \theta_{k^*+3}(a_m,) \in \Sigma_0(x)\}\,.$$

Es fácil ver que a_{m^*} realiza $\Sigma_0(x)$, con lo cual $\Sigma(x)$ es consistente. ☑

Si E es la intersección de numerables relaciones de equivalencia definibles sobre el vacío, la métrica d resulta ser una ultramétrica. Para esto basta verificar lo siguiente.

Proposición 2.3. *Supóngase que* $E(x, y) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in\omega} \theta_n(x, y)$*, donde cada* $\theta_n(x, y)$ *define una relación de equivalencia sobre* $\emptyset$*. Entonces para cada* $a/E, b/E, c/E \in \mathbb{C}/E$*,*

$$d(a/E, b/E) \leq \text{máx}\,\{d(a/E, c/E), d(c/E, b/E)\}\ .$$

Demostración. Sea $d(a/E, c/E) = (1/2)^{n_1}$ y $d(c/E, b/E) = (1/2)^{n_2}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $n_1 \leq n_2$. Entonces $\forall a^* \in a/E, b^* \in b/E, c^* \in c/E$ se tiene que

$$\models \theta_{n_1}(a^*, c^*) \wedge \theta_{n_2}(c^*, b^*),$$

con lo cual $\models \theta_{n_1}(a^*, b^*)$. Así,

$$d(a/E, b/E) \leq (1/2)^{n_1} = \text{máx}\,\{d(a/E, c/E), d(c/E, b/E)\}\ . \qquad ☑$$

3. Otras propiedades topológicas de $\mathbb{C}/E$

Dentro del estudio topológico de $\mathbb{C}/E$ que se está haciendo resulta interesante investigar cómo se comporta su conexidad. Los siguientes resultados arrojan luz sobre este aspecto y permiten caracterizar los espacios cocientes cuando E extiende a la relación $\equiv_s$ (tener el mismo tipo fuerte sobre vacío) y refina a la relación $\equiv$ (tener el mismo tipo sobre vació).

Dado un tipo arbitrario p, sea $p/E = \{a/E : a \models p\}$. La siguiente proposición está probada en [1] y [2].

Proposición 3.1. *Las componentes conexas de $\mathbb{C}/E$ son precisamente los conjuntos dados por p/E, donde $p \in S(acl^{eq}(\emptyset))$.*

Demostración. Véase [2] prop. 3.1. ☑

Como corolario de este resultado, puede verse lo siguiente, probado en [2].

Corolario 3.1. *Sea E una relación de equivalencia acotada y 0-tipo-definible. Si $\mathbb{C}/E$ es 0-dimensional, entonces $\equiv_s \subseteq E$.*

Demostración. Véase [2] cor. 3.4. ☑

Y el recíproco vale en caso de que E refine a la relación $\equiv$, como lo afirma la siguiente proposición demostrada en [2].

Proposición 3.2. *Sea E una relación de equivalencia acotada y 0-tipo-definible. Si $\equiv_s \subseteq E \subseteq \equiv$, entonces $\mathbb{C}/E$ es 0-dimensional.*

Demostración. Véase [2] fact 2.5. ☑

Al quedar caracterizados entonces los espacios $\mathbb{C}/E$ en términos de su conexidad cuando $\equiv_s \subseteq E \subseteq \equiv$, se torna interesante investigar cómo se puede caracterizar a su vez la propiedad topológica de ser 0-dimensional en otros términos. La siguiente proposición da dos caracterizaciones distintas de dicho fenómeno.

Proposición 3.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathbb{C}/E$ es 0-dimensional.*
2. *E es la intersección de numerables relaciones de equivalencia.*
3. *La métrica introducida es una ultramétrica.*

Demostración 1. $\Rightarrow$ 2. Véase [2] prop. 2.4.

2. $\Rightarrow$ 3. Se probó en la proposición 2.3.

3. $\Rightarrow$ 1. Nótese que las bolas abiertas formaban una base para la topología de $\mathbb{C}/E$. Basta ver que en un espacio ultramétrico las bolas abiertas son conjuntos cerrados, y se tendría entonces una base de clopens. Para esto, considérese una bola abierta $B^{<}_{a/E,(1/2)^n}$ y b/E uno de sus puntos límites. Nótese que para cada $\varepsilon < (1/2)^n$,

$$B^{<}_{a/E,(1/2)^n} \cap B^{<}_{b/E,\varepsilon} \neq \emptyset.$$

Así, como en espacios ultramétricos dos bolas con intersección no vacía resultan ser iguales o resulta estar una contenida en la otra, se tiene que

$$B^{<}_{b/E,\varepsilon} \subseteq B^{<}_{a/E,(1/2)^n},$$

con lo cual se tiene que $b/E \in B^{<}_{a/E,(1/2)^n}$. ☑

4. Cuando el tipo que define E tiene cardinalidad arbitraria

En esta sección se tratará el caso en el que la relación de equivalencia E^* es la intersección arbitraria de relaciones de equivalencia con las propiedades mencionadas anteriormente, es decir, acotadas y tipo-definibles sobre vacío por un tipo numerable. Se definirá una métrica en E^* y se mostrará que la topología inducida por ésta coincide con la topología introducida en la primera sección, donde los abiertos básicos estan dados por los $[\varphi(x)]$ para las distintas $\varphi(x) \in L(\mathbb{C})$. Supóngase entonces que

$$E^*(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I} E^i(x,y)$$

donde para cada $i \in I$,

$$E^i(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge_{n\in\omega} \theta^i_n(x,y),$$

y tales que las $\theta^i_n(x,y)$'s cumplen las propiedades enunciadas en la primera sección.

Considérese la función d^* dada por:

$$\begin{array}{rcl} d^* : \mathbb{C}/E^* \times \mathbb{C}/E^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (a/E^*, b/E^*) & \mapsto & \text{máx}\left\{d^i(a/E^i, b/E^i) : i \in I\right\}, \end{array}$$

donde d^i es la distancia en $\mathbb{C}/E^i$ introducida en la sección 2.

Proposición 4.1. *d^* es métrica.*

Demostración. Claramente $d^*(x,y) = d^*(y,x)$ y $d^*(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$. Para verificar la desigualdad triangular, sean $a/E^*, b/E^*, c/E^* \in \mathbb{C}/E^*$ y nótese que

$$\begin{array}{rcl} d^*(a/E^*, c/E^*) & = & \text{máx}\left\{d^i(a/E^*, c/E^*) : i \in I\right\} \\ & \leq & \text{máx}\left\{d^i(a/E^i, b/E^i) + d^i(b/E^i, c/E^i) : i \in I\right\} \\ & \leq & \text{máx}\left\{d^i(a/E^i, b/E^i) : i \in I\right\} + \text{máx}\left\{d^i(b/E^i, c/E^i) : i \in I\right\} \\ & \leq & d^*(a/E^*, b/E^*) + d^*(a/E^*, b/E^*). \end{array}$$ ☑

Se verá a continuación que la topología inducida por d^*, llámese τ', coincide con la topología τ en la que una base de abiertos esta dada por

$$\mathcal{B} = \{[\varphi(\S)]^* : \varphi(\S) \in \mathcal{L}(\mathbb{C})\}$$

donde $[\varphi(x)]^* = \{a/E^* : a/E^* \subseteq \varphi(\mathbb{C})\}$.

Proposición 4.2. $\tau' \subseteq \tau$.

Demostración. Sea $[\varphi(x)]^*$ un abierto básico de $(\mathbb{C}/E^*, \tau)$ y $a/E^* \in [\varphi(x)]^*$. Sean $i \in I$ y $n \in \omega$ tales que

$$[\theta^i_n(x,a)]^* \subseteq [\varphi(x)]^*$$

(Existen por compacidad. Véase la prueba de la proposición 2.1).

Observación 1. Nótese que para cada $c \in \mathbb{C}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} c/E^i \in [\theta^i_n(x,a)]^i &\Rightarrow c/E^i \subseteq \theta^i_n(\mathbb{C},a) \\ &\Rightarrow c/E^* \subseteq \theta^i_n(\mathbb{C},a) \\ &\Rightarrow c/E^* \in [\theta^i_n(x,a)]^* \end{aligned}$$

Observación 2. Nótese que para cada $c \in \mathbb{C}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} c/E^* \in B^<_{a/E^*,(1/2)^n} &\Rightarrow d^*(a/E^*, c/E^*) < (1/2)^n \\ &\Rightarrow \forall j \in I d^j(a/E^j, c/E^j) < (1/2)^n \\ &\Rightarrow c/E^i \in B^<_{a/E^*,(1/2)^n} \end{aligned}$$

Nótese además que $B^<_{a/E^i,(1/2)^n} \subseteq [\theta^i_n(x,a)]^i$ (ver prueba de la proposición 2.1). Con las anteriores observaciones es fácil mostrar que

$$a/E^* \in B^<_{a/E^*,(1/2)^n} \subseteq [\theta^i_n(x,a)]^* \subseteq [\varphi(x)]^*,$$

y esto prueba lo deseado. ☑

El siguiente resultado clásico de topología será útil para mostrar que ambas topologías coinciden.

Lema 4.1. *Sean τ_1, τ_2 dos topologías sobre un conjunto X. Supóngase que (X,τ_1) es Hausdorff, que (X,τ_2) es compacto y que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Basta ver que si $O \in \tau_2$, entonces $O \in \tau_1$, o de igual manera, que si $O \in \tau_2$ es no vacío, entonces para cada $p \in O$ existe $B \in \tau_1$ tal que $p \in B \subseteq O$.

Sea entonces $O \in \tau_2$ un abierto no vacío y $p \in O$ un punto cualquiera. Como (X,τ_1) es Hausdorff, entonces para cada $q \in X \setminus O$, existen $V_q, W_q \in \tau_1$ vecindades abiertas de q y p respectivamente y disjuntas. Como (X,τ_2) es compacto y $O \in \tau_2$, entonces $X \setminus A$ es un cerrado, y por lo tanto $(X \setminus O, \tau_2 \restriction (X \setminus O))$ es también compacto.

Nótese que $U = \{W_q : q \in X \setminus O\}$ es un recubrimiento de $X \setminus O$ con abiertos de τ_2 (pues $\tau_1 \subseteq \tau_2$), con lo cual, al ser compacto, existe un subrecubrimiento finito de U que cubre todo $X \setminus O$. Sea $U' = \{W_{q_1}, \ldots, W_{q_n}\}$ dicho subrecubrimiento y sean

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{q_i} \quad \text{y} \quad C = \bigcup_{i=1}^{n} W_{q_i}.$$

Nótese que como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $V_{q_i} \cap W_{q_i} = \emptyset$, entonces B y C son abiertos disjuntos de τ_1, y entonces $B \subseteq X \setminus A$. Como U' es recubrimiento de $X \setminus A$, $X \setminus O \subseteq C$, con lo cual se concluye que $B \subseteq O$. Finalmente nótese que $p \in B$ pues $p \in V_{q_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, como se quería. ☑

Corolario 4.1. $\tau' = \tau$.

Demostración. $(\mathbb{C}/E^*, \tau)$ es compacto y Hausdorff (Remark 1.1) y $(\mathbb{C}/E^*, \tau')$ es Hausdorff. Por los dos resultados anteriores se tiene lo deseado. ☑

Bibliografía

[1] E. Hrushovski, *Simplicity and the Lascar Group*, preprint (1997).
[2] K. Krupiński & L. Newelski, *On Bounded Type-Definable Equivalence Relations*, Notre Dame J. of Formal Logic, **43** (2002), num. 4, 231–242.

(Recibido en abril de 2006. Aceptado para publicación en octubre de 2006)

Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Barcelona
Barcelona, España
e-mail: rodrigopelaez@gmail.com