Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 21–56

La teoría de Morales–Ramis y el algoritmo de Kovacic

Primitivo B. Acosta Humánez
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Abstract. The Morales–Ramis theory is the Galois theory in dynamical systems and relate two different kinds of integrability: integrability in the Liouville's sense of Hamiltonian systems and integrability in the sense of differential Galois theory to differential equations. In this paper are presented some applications of the Morales–Ramis theory in non integrability problems of Hamiltonian systems whose normal variational equation over a particular integral curve is a linear differential equation of second order with coefficients rational functions. The integrability of the normal variational equations is analyzed by means the Kovacic's algoritm.

Key words and phrases. Holomorphic Hamiltonian systems, Galois group, Liouvillian solutions, Picard–Vessiot theory, variational equation.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 37J30. Secondary: 70H07.

Resumen. La teoría de Morales–Ramis es la teoría de Galois en el contexto de los sistemas dinámicos y relaciona dos tipos diferentes de integrabilidad: integrabilidad en el sentido de Liouville de un sistema hamiltoniano e integrabilidad en el sentido de la teoría de Galois diferencial de una ecuación diferencial. En este artículo se presentan algunas aplicaciones de la teoría de Morales–Ramis en problemas de no integrabilidad de sistemas hamiltonianos cuya ecuación variacional normal a lo largo de una curva integral particular es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes funciones racionales. La integrabilidad de la ecuación variacional normal es analizada mediante el algoritmo de Kovacic.

Introducción

Este artículo, de caracter divulgativo y expositivo tiene como finalidad difundir[*] la teoría de JUAN MORALES Y JEAN PIERRE RAMIS, conocida como teoría de Morales–Ramis. Aunque no es completamente autocontenido, se cita la referencia donde se puede profundizar cada tema y al final se presenta una variedad de ejemplos y observaciones para que el lector logre una mayor comprensión de esta teoría. En esta parte se da un paseo por la teoría de Galois clásica, teoría de Galois diferencial y no integrabilidad de sistemas hamiltonianos para luego en cada una de las secciones los respectivos temas.

La *integración por cuadraturas* de ecuaciones diferenciales es un problema clásico que, aunque ha sido tratado por grandes matemáticos como J. LIOUVILLE (1809-1882) o S. LIE (1842-1899), aún continúa vigente. Frente a una ecuación diferencial, se desearía expresar sus soluciones mediante una fórmula cerrada; por ejemplo, a la ecuación,

$$\dot{x} = f(t)x,$$

le corresponde la fórmula de las soluciones,

$$x = \lambda e^{\int f(t)dt}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

A primera vista parece razonable que cualquier ecuación diferencial ordinaria pudiera resolverse de esta manera, sin embargo esto no es cierto. Considérese por ejemplo la ecuación,

$$\dot{x} = t - x^2,$$

las soluciones de esta ecuación son derivadas logarítmicas de funciones de Airy. No pueden expresarse mediante una fórmula que implique funciones elementales, y operaciones integrales. En este sentido, se dice que *no es integrable por cuadraturas.*

El joven matemático E. GALOIS (1811-1832) abordó un problema distinto, pero conceptualmente relacionado con la integración por cuadraturas. Se trata de la *resolución por radicales* de ecuaciones algebraicas. Frente a una ecuación polinómica con coeficientes en un cuerpo Q, irreducible sobre Q, que se supone de característica cero,

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \prod(x - \alpha_i) = 0$$

se quiere saber si se pueden expresar las raíces α_i mediante una fórmula cerrada que incluye los coeficientes a_i, operaciones aritméticas y la extracción de radicales. GALOIS respondió a esta pregunta de un modo indirecto. A cada ecuación le corresponde el grupo de permutaciones entre las raíces α_i que conserva todas las relaciones de dependencia algebraica entre ellas. Bajo ciertas hipótesis, el

[*]Iniciativa tomada por el autor debido a que en español no hay artículos publicados sobre esta teoría. Las publicaciones (en inglés y francés) se encuentran en revistas especializadas en un lenguaje muy técnico.

grupo G de la ecuación, es el grupo de automorfismos del cuerpo $Q(\alpha_i)$ que dejan fijo Q.

A cada subgrupo normal de $H \lhd G$ le corresponde un subcuerpo K^G de $Q(\alpha_i)$. El grupo de automorfismos de K^G que dejan fijo Q es G/H.

Cuando G es un grupo cíclico de orden n, entonces la extensión se obtiene mediante la adjunción de un radical $K = Q(\sqrt[n]{a})$.

Tras estas observaciones se llega naturalmente al resultado fundamental.

Teorema [Galois]. *Una ecuación es resoluble por radicales si y solo si su grupo G es resoluble.*

A cada cadena de resolución:

$$H_1 \lhd \ldots \lhd H_s = G$$

con H_i/H_{i-1} cíclico, le corresponde una cadena de extensiones,

$$Q \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow K_s = Q(\alpha_i)$$

donde cada una de las sucesivas extensiones se hace adjuntando un radical, de orden $|H_i/H_{i+1}|$.

Análogamente a la teoría de Galois para ecuaciones algebraicas, existe una teoría para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, desarrollada por E. Picard y E. Vessiot. A modo de ejemplo, supongamos que y_1, y_2 es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} = ry, \quad r \in K, \quad K \text{ cuerpo diferencial}$$

Sea $\tilde{K} = K\langle y_1, y_2\rangle$, el menor cuerpo diferencial que contiene a K y a $\{y_1, y_2\}$. Entonces el grupo de automorfismos diferenciales de $\hat{K}$ que dejan invariantes los elementos de K, se denomina *g*rupo de Galois de la ecuación diferencial. En general, el grupo de Galois de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes en K, es un grupo algebraico de matrices con coeficientes en el cuerpo de constantes de K.

Análogamente a las extensiones por radicales de la teoría de Galois clásica, se tienen las extensiones liouvillianas, las cuales se construyen sucesivamente agregando una solución algebraica, una integral, o bien una exponencial de integral. Es decir, si θ es una solución de la ecuación, entonces

$$\hat{K}_{i+1} = K_i(\theta), \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \theta & & \text{algebraica.} \\ \theta & = & \int a, \quad a \in K. \\ \theta & = & e^{\int a}, \quad a \in K. \end{array} \right.$$

En analogía con el teorema de Galois para ecuaciones algebraicas se tiene el siguiente resultado:

Teorema. *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es integrable mediante cuadraturas (extensiones liouvillianas) si y solo si la componente conexa de la identidad de su grupo de Galois es triangulizable.*

En la formulación hamiltoniana de la mecánica, la evolución del estado de un sistema viene determinado por las ecuaciones:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

El espacio de fases de estos sistemas está dotado de forma natural de una estructura *simpléctica*. Se induce una estructura de álgebra de Poisson en el espacio de funciones que dependen de p y q. El *paréntesis de Poisson* de f y g se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Si $\{f, g\} = 0$, se dice que f y g están en *involución* o también que f y g conmutan mediante el paréntesis de Poisson.

Dentro de este contexto, un sistema de n grados de libertad se dice *integrable en el sentido de Liouville* cuando existen n constantes de movimiento independientes y en involución. Durante años se han buscado criterios para determinar la integrabilidad o no de este tipo de sistemas basados en el comportamiento de las soluciones en el dominio complejo. A lo largo de una solución particular de las ecuaciones del movimiento, éstas pueden aproximarse linealmente por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales conocido como *ecuación variacional*. Esto permite relacionar el concepto de integrabilidad en el sentido de Liouville con el concepto de integrabilidad por cuadraturas de la teoría de Picard-Vessiot.

En la tesis doctoral *Técnicas algebraicas para la no integrabilidad de sistemas hamiltonianos* (véase [24]) escrita por JUAN MORALES–RUIZ y dirigida por CARLES SIMÓ, se aplicó por primera vez la teoría de Galois diferencial en la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano. Sin embargo, simultánea e independientemente, CHURCHILL & ROD obtuvieron resultados parecidos (menos generales). Mas tarde, gracias a una estancia postdoctoral de JUAN MORALES–RUIZ en Francia trabajando con J. P. RAMIS se gesta, con el siguiente resultado, lo que hoy se conoce como *teoría de Morales–Ramis* (veánse [30, 31])

Teorema [MORALES–RAMIS, 1997]. *Si un sistema hamiltoniano es integrable en el sentido de Liouville, entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional a lo largo de cualquier solución particular es abeliano.*

A partir de entonces, se dispone de un criterio de no-integrabilidad, que desde finales de los años 90 ha sido aplicado por varios autores de la comunidad matemática internacional para estudiar la no-integrabilidad de distintos sistemas, entre otros, problemas de N cuerpos, la dinámica del sólido rígido, el péndulo forzado y determinados problemas cosmológicos. Como ejemplo se cita al mismo Juan Morales–Ruiz, quien en 2004 demuestra la no integrabilidad mediante integrales primeras racionales de la segunda trascendente de Painlevé (véase [20]).

En algunos problemas, como el potencial cúbico Henon-Heiles, el criterio de no-integrabilidad sobre la ecuación variacional no es suficiente para decidir. Se considera entonces la *ecuación variacional de orden n*, que es la aproximación de orden n del flujo a lo largo de la solución. No es un sistema lineal, pero si es linealizable. Muy recientemente los autores de la teoría de Morales–Ramis en colaboración con Carles Simó obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema [Morales–Ramis–Simó, 2005]. *Si un sistema hamiltoniano es integrable en el sentido de Liouville, entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional linealizada de cualquier orden a lo largo de cualquier solución particular es abeliano.*

En la actualidad hay varios grupos y proyectos de investigación alrededor de esta teoría, uno de ellos es *Sistemas dinámicos y teoría de Galois*, proyecto de investigación que se desarrolla en la Universitat Politècnica de Catalunya y está conformado por Juan Morales–Ruiz (coordinador del proyecto) y por sus doctorandos** (véase [25]). Este grupo tiene un papel activo explorando nuevas aplicaciones y extensiones de la teoría puesto que las conexiones entre la teoría de Galois y los sistemas dinámicos aún no han sido completamente aclaradas. De esta forma se tienen tres líneas de investigación diferenciadas, aunque interrelacionadas: aplicaciones a la mecánica celeste, teoría de Galois y teoría espectral, y teoría para ecuaciones diferenciales no lineales. Hace poco Morales, Simó y Simón demostraron la no integrabilidad del problema de Hill, un modelo del movimiento lunar (véase [38]). Se han hecho importantes avances, paralelos a Bruns, con respecto a la no integrabilidad del problema de N-cuerpos, aunque el caso general no ha sido probado aún. Recientemente el autor en un trabajo conjunto con David Blázquez-Sanz aplicaron el problema inverso de la teoría de Morales–Ramis, a partir de una ecuación variacional conocida se generaron familias de hamiltonianos no integrables con potenciales racionales. Particularmente analizaron las ecuaciones variacionales que daban lugar a ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales y en el caso de coeficientes funciones trascendentes se utilizó un algoritmo que permite transformar la ecuación en otra con coeficientes funciones racionales (véase [4]).

**Primitivo Acosta-Humánez, David Blázquez-Sanz y Sergi Simón

El objetivo de esta introducción es motivar al lector en el estudio de esta teoría, así que no se abordarán todos los temas en el artículo, solo se considerarán casos particulares. Al final se dan referencias adicionales que incluyen los trabajos hasta la fecha alrededor de esta teoría.

1. Integrabilidad de ecuaciones diferenciales

Tal como se menciona en la introducción, el estudio de la integrabilidad de ecuaciones diferenciales es un tema vigente. Por lo tanto, para animar al lector, esta sección se ha dividido en tres partes: preliminares, teoría de Picard-Vessiot y subgrupos algebraicos.

1.1. Preliminares. Tomando como referencia [2, 3], se considera el cuerpo $\mathbb{C}(x)$ de funciones racionales en una variable compleja x. Este es un cuerpo diferencial con derivación $' = \frac{d}{dx}$. Sea η una solución de la ecuación diferencial $z'' + az' + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{C}(x)$, en alguna extensión diferencial de $\mathbb{C}(x)$.

La solución de la ecuación diferencial lineal anterior puede involucrar exponenciales, integrales indefinidas y raices de polinomios. Las funciones trigonométricas pueden ser escritas en términos de exponenciales.

Definición 1.1. Sea η una solución de la ecuación diferencial

$$z'' + az' + bz = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}(x).$$

Se dice que:

1. η es algebraica sobre $\mathbb{C}(x)$ si η satisface una ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$, es decir, η es una función algebraica de una variable (raíz).
2. η es una primitiva sobre $\mathbb{C}(x)$ si $\eta' \in \mathbb{C}(x)$, es decir, $\eta = \int f$ para algún $f \in \mathbb{C}(x)$ (integral).
3. η es una exponencial sobre $\mathbb{C}(x)$ si $\frac{\eta'}{\eta} \in \mathbb{C}(x)$, es decir, $\eta = e^{\int f}$ para algún $f \in \mathbb{C}(x)$ (exponencial de una integral).

Definición 1.2. Una solución η de una ecuación diferencial lineal se denomina liouvilliana, o soluble por cuadraturas o que tiene solución en forma cerrada, si existe una cadena de cuerpos diferenciales $\mathbb{C}(x) = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_m = K$, con $\eta \in K$ y tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, $K_i = K_{i-1}(\eta_i)$, donde η_i es algebraica, primitiva o exponencial sobre K_{i-1}.

Tales soluciones liouvillianas son construidas usando funciones algebraicas, integrales y exponenciales. De esta forma se pueden obtener soluciones como logaritmos y funciones trigonométricas, pero no soluciones en términos de funciones de Bessel. El término liouvilliano es un poco más generoso que el de *funciones elementales* (algebraicas, logaritmos y exponenciales solamente), debido a que permite la integración indefinida arbitraria, es decir, se puede dejar la integral en forma implícita.

El siguiente teorema permite eliminar el coeficiente de $z^{(n-1)}$ en una ecuación diferencial lineal de orden n.

Teorema 1.3. *La ecuación diferencial*

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + ... + a_1 z' + a_0 z = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}(x),$$

se puede transformar en la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + b_{n-2}y^{(n-2)} + ... + b_1 y' + b_0 y = 0, \quad b_i \in \mathbb{C}(x),$$

mediante el cambio $z = yf$, donde $f = e^{-\frac{1}{n}\int p}$, $p = a_{n-1}$. En particular, si $n = 2$, la ecuación diferencial $z'' + az' + bz = 0$ se transforma en la ecuación diferencial $y'' = ry$, donde $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$.

Demostración. Usando la fórmula de Abel $w' + pw = 0$, $w = Cf^n$, $C \in \mathbb{C}^*$, se tiene que $ncf^{n-1}f' + pCf^n = 0$, ahora, al dividir por w se sigue que $f = e^{-\frac{1}{n}\int p}$, donde $p = a_{n-1}$. Finalmente, un sencillo argumento inductivo ver que al reemplazar por yf en la ecuación diferencial inicial, el coeficiente de $z^{(n-1)}$ se anula. Realizando los cálculos se tiene que para $n = 2$, $z'' + az' + bz = 0$, se transforma en

$$y'' = \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b\right) y\,. \qquad ☑$$

Teorema 1.4. *Si $z'' + az' + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{C}(x)$ tiene una solución liouvilliana, entonces toda solución es liouvilliana.*

Demostración. La segunda solución se construye con la exponencial de la cuadratura de la primera solución que es liouvilliana. Por la definición 1.2, la segunda solución también es liouvilliana. ☑

Teorema 1.5. *La ecuación diferencial $z'' + az' + bz = 0$ se transforma en la ecuación de Ricatti $v' = r - v^2$, donde $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$.*

Demostración. Por el teorema 1.3, $y'' = ry$, donde $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$. Ahora, al hacer la sustitución $v = \frac{y'}{y}$ se tiene

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

y por lo tanto

$$v' = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b - v^2,$$

que es el resultado deseado. ☑

De ahora en adelante, cualquier ecuación diferencial de la forma

$$z'' + az' + bz = 0$$

se transformará en la *ecuación diferencial lineal reducida* (EDLR)

$$y'' = ry, \quad r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b.$$

1.2. Teoría de Picard–Vessiot. La teoría de Picard–Vessiot es la teoría de Galois en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales (véase [3]). Supóngase que y_1, y_2 es un sistema fundamental de soluciones de la EDLR. Esto significa que y_1, y_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ y toda solución es una combinación lineal de y_1 y y_2. Sea $K = \mathbb{C}(x)\langle y_1, y_2\rangle$, el menor cuerpo diferencial que contiene a $\mathbb{C}(x)$ y a $\{y_1, y_2\}$.

Definición 1.6 (Grupo de Galois diferencial)**.** El grupo de todos los automorfismos diferenciales de K en K que dejan fijos (o invariantes) los elementos de $\mathbb{C}(x)$ se denomina el *Grupo de Galois de K* sobre $\mathbb{C}(x)$ y es denotado por $Gal(K/\mathbb{C}(x))$.

Si $\sigma \in Gal(K/\mathbb{C}(x))$, entonces σy_1 y σy_2 son también soluciones, o lo que es igual, es otro sistema fundamental de soluciones de la EDLR. Por tal razón, existe una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

$GL(2, \mathbb{C})$ denotando el *grupo lineal de matrices cuadradas no singulares de tamaño* 2×2 con elementos complejos, tal que

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma y_1 \\ \sigma y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Esto define una función inyectiva

$$\varphi : \quad Gal(K/\mathbb{C}(x)) \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

que solo depende de la elección de y_1, y_2.

Ejemplo 1.1. Dadas las ecuaciones

$$(*) \qquad y'' = 0,$$

$$(**) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' = 0,$$

$$(***) \qquad y'' + y = 0,$$

tomando como $\mathbb{C}(x)$ como cuerpo diferencial, el grupo de Galois diferencial correspondiente a cada ecuación está dado por

$$Gal(*) \simeq e = \{1\}, \quad Gal(**) \simeq (\mathbb{C}, +) \quad Gal(***) \simeq (\mathbb{C}, \cdot).$$

Definición 1.7. Un grupo algebraico de matrices 2×2 es un subgrupo $G \subset GL(2, \mathbb{C})$, definido por ecuaciones algebraicas en los elementos de matriz. Es decir, exste un conjunto de polinomios $\{P_i(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})\}_{i \in I}$, de tal manera que,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in G \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I, P_i(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = 0.$$

En tal caso G es una variedad algebraica provista de una estructura de grupo. En adelante se entiende que todo grupo mencionado es un *grupo algebraico de matrices*.

Un primer ejemplo es el grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$, pues,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \quad x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} - 1 = 0.$$

Uno de los resultados fundamentales de la teoría de Picard–Vessiot es el siguiente teorema:

Proposición 1.8. *La imagen por φ de $Gal(K/\mathbb{C}(x))$,*

$$\varphi\left(Gal(K/\mathbb{C}(x))\right) \subset GL(2,\mathbb{C}),$$

es un grupo algebraico de matrices.

Proposición 1.9. *Para la EDLR, $\varphi\left(Gal(K/\mathbb{C}(x))\right) \subset SL(2,\mathbb{C})$. Es decir, la imagen de $Gal(K/\mathbb{C}(x))$ está en $SL(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Sean y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR, lo cual indica que $y_1'' = ry_1$, $y_2'' = ry_2$. El wronskiano está dado por

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Ahora, derivando W se tiene

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = ry_2y_1 - ry_1y_2 = 0.$$

Esto indica que $W \in \mathbb{C}$ y de esta manera

$$\sigma W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} W = W,$$

por lo tanto

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

y así se concluye que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),$$

que es el resultado deseado. ☑

Se enuncia ahora el teorema de Lie–Kolchin. Es de notar que un grupo algebraico G tiene un único subgrupo conexo G^0, el cual contiene la identidad y es un subgrupo normal de G de índice finito. Esto indica que G^0, componente identidad de G, es el subgrupo algebraico más pequeño de G que contiene la identidad. De aquí se deduce que si $G = G^0$, entonces G es conexo.

Teorema 1.10. [Lie–Kolchin] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda solución de la EDLR es liouvilliana.*

2. *G^0 es soluble, es decir, existe una cadena de subgrupos normales*
$$e = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_n = G^0$$
tal que el cociente G_i/G_j es abeliano para todo $n \geq i \geq j \geq 0$,
3. *G^0 es triangularizable, es decir, existe una base en $\mathbb{C}^2$ tal que*
$$G^0 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\}.$$

1.3. Subgrupos algebraicos de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ y semi-invariantes.

Definición 1.11. Sea y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR en K. Sea $f(x_1, x_2)$ un polinomio homogeneo con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$. Diremos que f es un *invariante* si para todo $\sigma \in Gal(K/\mathbb{C}(x))$, $\sigma f(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)$. En este caso, $f(y_1, y_2) \in \mathbb{C}(x)$. Ahora, f es semi-invariante si para todo $\sigma \in Gal(K/\mathbb{C}(x))$, $\sigma f(y_1, y_2) = cf(y_1, y_2)$, $c \in \mathbb{C}$. Se observa que $\theta = \frac{f(y_1,y_2)'}{f(y_1,y_2)} \in \mathbb{C}(x)$.

Se dice que un grupo G es el conjugado de un grupo G' si existe una matriz J tal que $GJ = JG'$. En este caso, G y G' tienen la misma estructura algebraica.

Los siguiente teoremas muestran la relación entre los cuatro casos en subgrupos algebraicos, los cuatro casos de semi-invariantes y los cuatro casos en el algoritmo de Kovacic, estableciéndose una correspondencia biunívoca entre estos.

Teorema 1.12. *Sea G un subgrupo algebraico de $SL(2, \mathbb{C})$. Entonces exclusivamente uno de los siguientes cuatro casos puede ocurrir:*

1. *G es triangularizable.*
2. *G es el conjugado de un subgrupo de*
$$\left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad : c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$
y el caso 1 no se da.
3. *G es finito y los casos 1 y 2 no se dan.*
4. *$G = SL(2, \mathbb{C})$.*

Teorema 1.13. *De acuerdo con el teorema 1.12, excepto por conjugación, hay tres grupos en el caso 3:*

1. *El grupo tetraedro. Este grupo es de orden 24 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\left(2e^{\frac{k\pi i}{3}} - 1\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. *El grupo octaedro. Este grupo es de orden 48 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}e^{\frac{k\pi i}{4}}\left(e^{\frac{k\pi i}{2}} + 1\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *El grupo icosaedro. Este grupo es de orden 120 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{5}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\phi \end{pmatrix},$$
siendo ϕ y psi definidas como
$$\phi = \frac{1}{5}\left(e^{\frac{3k\pi i}{5}} - e^{\frac{2k\pi i}{5}} + 4e^{\frac{k\pi i}{5}} - 2\right), \quad \psi = \frac{1}{5}\left(e^{\frac{3k\pi i}{5}} + 3e^{\frac{2k\pi i}{5}} - 2e^{\frac{k\pi i}{5}} + 1\right)$$

donde en los casos anteriores $0 \leq k \leq 5$.

Nota 1.1. La componente conexa de la identidad G^0 de los casos del teorema 1.12 es resoluble excepto para el caso 4. Para los demás casos es abeliana excepto para el grupo dado por
$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \mu \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}.$$
Los casos abelianos de la componente conexa de la identidad son los siguientes
$$\text{Grupo trivial} \quad G^0 = e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
$$\text{Grupo diagonal o multiplicativo} \quad G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \right\} \simeq \mathbb{C}^*.$$
$$\text{Grupo aditivo} \quad G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mu \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}.$$

Teorema 1.14. *Sea y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR, de tal manera que en la base $\{y_1, y_2\}$, el grupo $Gal(K/\mathbb{C}(x))$ se escribe en una de las formas canónicas del teorema 1.12. Entonces, para $\sigma \in Gal(K/\mathbb{C}(x))$, uno de los siguientes casos puede ocurrir:*

1. *$\sigma y_1 = c y_1$, $c \in \mathbb{C}$. Es decir, y_1 es un semi-invariante.*
2. *$\sigma y_1 = c y_1$ y $\sigma y_2 = c^{-1} y_2$, o $\sigma y_1 = c y_2$ y $\sigma y_2 = -c^{-1} y_1$. Además, $y_1 y_2$ es un semi-invariante y $(y_1 y_2)^2$ es un invariante.*
3. *El grupo tetraedro: $\left(y_1^4 + 8 y_1 y_2^3\right)^3$ es un invariante. El grupo octaedro: $\left(y_1^5 y_2 - y_1 y_2^5\right)^2$ es un invariante.*
4. *El grupo icosaedro: $y_1^{11} y_2 - 11 y_1^6 y_2^6 - y_1 y_2^{11}$ es un invariante.*
5. *No hay semi-invariantes no triviales.*

Demostración. Se procederá tal como en el enunciado del teorema.

1. Por el teorema 1.12, G es triangularizable, es decir,
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{C}, \ c \neq 0 \right\},$$
de tal manera que se tiene
$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $\sigma y_1 = cy_1$, por lo tanto y_1 es un semi-invariante.

2. Por el teorema 1.12, G es el conjugado de un subgrupo de

$$\left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0\right\},$$

de tal manera que

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

o también

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

de lo cual se concluye que $\sigma y_1 = cy_1$ y $\sigma y_2 = c^{-1}y_2$, o $\sigma y_1 = cy_2$ y $\sigma y_2 = -c^{-1}y_1$, por lo tanto $y_1 y_2$ es un semi-invariante y $(y_1 y_2)^2$ es un invariante.

Los casos 3 y 4 se consideran de la misma forma. ☑

2. El algoritmo de Kovacic

En 1986 JERALD KOVACIC ([15]) presenta un algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes funciones racionales sobre los complejos. El algoritmo de Kovacic se basa en los invariantes y semi-invariantes del teorema anterior.

En [12], se hace una modificación al algoritmo y se aplica para resolver cierto tipo de funciones especiales. Sin embargo, la versión del algoritmo que aquí se presenta es la correspondiente a [15, 16] (veánse también [2, 7]).

En el caso 1, se observa que y_1 es un semi-invariante mientras que $\theta = \frac{y_1'}{y_1}$ es un invariante, es decir, $\theta \in \mathbb{C}(x)$, este cambio es clásico para transformar la EDLR en una ecuación de Riccatti. Por tanto, este caso requiere de la búsqueda de funciones racionales que sean soluciones de la Ecuación de Riccatti. Para lograr esto último se usan las series de Laurent (fracciones parciales) teniendo en cuenta que

$$\theta' = r - \theta^2 = \left(\sqrt{r} - \theta\right)\left(\sqrt{r} + \theta\right).$$

De acuerdo a los teoremas anteriores, existen cuatro casos para el algoritmo de Kovacic. Los tres primeros casos determinan la solubilidad en términos liouvillianos de la EDLR, mientras que en el cuarto caso el algoritmo no funciona, lo cual indica que el grupo de Galois de la EDLR es exactamente $SL(2, \mathbb{C})$ y por tanto la EDLR no tiene soluciones liouvillianas. Si el algoritmo de Kovacic cae en cualquiera de los tres primeros casos, no necesariamente proporciona las dos soluciones de la EDLR, es posible que solo de una solución, la cual llamaremos

y_1. Obviamente la segunda solución, y_2, puede ser encontrada como

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}.$$

La idea del algoritmo es ver que la EDLR caiga en el caso 1, si no es así, se busca que caiga en el caso 2, si tampoco es así, se busca que caiga en el caso 3. Si definitivamente la EDLR no cae en los casos 1 , 2 o 3, entonces obligatoriamente cae en el caso 4.

Por el orden de r en infinito, $\circ(r_\infty)$, se entenderá el orden de infinito como un cero de r. Esto indica que si $r = \frac{s}{t}$, $s, t \in \mathbb{C}[x]$, entonces $\circ(r_\infty) = grad(t) - grad(s)$. Se denotará por Γ' al conjunto finito de polos de r, $\Gamma' = \{c \in \mathbb{C} : t(c) = 0\}$, de tal forma que $\Gamma = \Gamma' \cup \{\infty\}$. Se denotará por $\circ(r_c)$ el orden del polo $c \in \Gamma'$. Para aplicar el caso 1 del algoritmo se requiere que todo polo de r (en caso de existir) sea de orden par o de orden 1, mientras que obligatoriamente $\circ(r_\infty) \in \{2n : n \in \mathbb{Z}^-\} \cup \{n \geq 2 : n \in \mathbb{Z}\}$, si en este caso existe una solución para la EDLR, ésta es de la forma $y = Pe^{\int \omega}$, donde P y ω se construyen con los pasos del algoritmo. Para aplicar el caso 2, se requiere que exista al menos un polo $c \in \Gamma'$ tal que $\circ(r_c) \in \{2n+1 : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{2\}$. Para aplicar el caso 3, es necesario que para todo polo $c \in \Gamma'$, $\circ(r_c) \in \{1, 2\}$, y $\circ(r_\infty) \in \{n \geq 2, n \in \mathbb{Z}\}$. Si al aplicar el caso 2 o el caso 3 existe una solución para la EDLR, ésta es de la forma $y = e^{\int \omega}$, donde ω se construye con los pasos del algoritmo. El caso 4 se da cuando no se dan los casos 1, 2 o 3, indicando que la EDLR no tiene soluciones liouvillianas. Se puede afirmar que al escoger aleatoriamente una EDLR, la probabilidad de que ésta sea soluble por cuadraturas es muy pequeña. Los pocos casos en donde se dan este tipo de soluciones, se obtienen mediante el algoritmo de Kovacic.

Caso 1. Este caso, como ya se mencionó, corresponde a la solubilidad por cuadraturas de la ecuación de Riccatti. Por tal razón, la serie de Laurent de $\sqrt{r}$ en cada polo c, $[\sqrt{r}]_c$, y en el infinito, $[\sqrt{r}]_\infty$, forman parte esencial en el desarrollo del algoritmo para este caso y son funciones racionales. Para hacer más divulgativo este artículo se utilizarán fracciones parciales y cuadrados de polinomios en lugar de series de Laurent, aunque en esencia es lo mismo. Adicionalmente se definen $\alpha_c^+, \alpha_c^-, \alpha_\infty^+, \alpha_\infty^- \in \mathbb{C}$, de acuerdo a la situación presentada. Ahora, si $p \in \Gamma$, entonces $\varepsilon(p) \in \{+, -\}$.

Paso 1. Buscar para cada polo $c \in \Gamma'$ y para ∞ la situación correspondiente a cada una de las que siguen:

(c_1) Si $\circ(r_c) = 1$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^\pm = 1.$$

(c_2) Si $\circ(r_c) = 2$, $r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}.$$

(c_3) Si $\circ(r_c) = 2v \geq 4$,

$$r = (a(x-c)^{-v} + ... + d(x-c)^{-2})^2 + b(x-c)^{-(v+1)} + \cdots,$$

entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = a(x-c)^{-v} + ... + d(x-c)^{-2}, \quad \alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + v\right).$$

(∞_1) Si $\circ(r_\infty) > 2$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^{+} = 0, \quad \alpha_\infty^{-} = 1$$

(∞_2) Si $\circ(r_\infty) = 2$, $r = \cdots + b(x)^2 + \cdots$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

(∞_3) Si $\circ(r_\infty) = -2v \leq 0$, $r = (ax^v + ... + d)^2 + b(x)^{v-1} + \cdots$, entonces $[\sqrt{r}]_\infty = ax^v + ... + d$ y $\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - v\right)$.

Paso 2. Encontrar $D \neq \emptyset$ definido como

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : d = \alpha_\infty^{\varepsilon(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma'} \alpha_c^{\varepsilon(c)}, \forall\left(\varepsilon(p)\right)_{p\in\Gamma} \right\}.$$

Si $D = \emptyset$, entonces el caso 1 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 2. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye $\omega \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$\omega = \varepsilon(\infty)\left[\sqrt{r}\right]_\infty + \sum_{c\in\Gamma'}\left(\varepsilon(c)\left[\sqrt{r}\right]_c + \alpha_c^{\varepsilon(c)}(x-c)^{-1}\right).$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que

$$P'' + 2\omega P' + (\omega' + \omega^2 - r)P = 0.$$

Si P no existe, entonces el caso 1 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe intentarse inmediatamente el caso 2. Ahora, si P existe, entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = Pe^{\int\omega},$$

donde ω se construye en el paso 2 mediante $d \in D$.

Nota 2.1. Si a una EDLR sólo se le puede aplicar el caso 1 del algoritmo de Kovacic entonces su grupo de Galois es conexo y está dado por:

1. $SL(2,\mathbb{C})$ si el algoritmo no provee ninguna solución,
2. $\mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}$ si el algoritmo sólo provee una solución, que no sea una extensión cuadrática de su derivada logarítmica,
3. $\mathbb{C}^*$ si el algoritmo provee las dos soluciones.

Solo se darán ejemplos completos para el caso 1 y para el caso 4 puesto estamos interesados en que la componente conexa de la identidad no sea abeliana.

Ejemplos del Caso 1. A continuación, a manera ilustrativa, se presentan los siguientes ejemplos que serán utilizados posteriormente para verificar la integrabilidad o demostrar la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano.

Ejemplo 2.1. [Coeficientes constantes] Este es el ejemplo trivial puesto que

$$z'' + (\lambda_1 + \lambda_2)z' + \lambda_1\lambda_2 z = 0$$

se transforma en la EDLR

$$y = \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - \lambda_1\lambda_2\right) y.$$

Esta ecuación no tiene polos, así que cae en el caso 1. El orden del coeficiente de y en el infinito es 0, así que cae en (∞_3) y por lo tanto $b = v = 0$, de lo cual se concluye que $\alpha\pm = 0$. Esto indica que $D = \{0\} \neq \emptyset$, $P = 1$ y claramente una solución liouvilliana de la EDLR está dada por $y = e^{gx}$, donde g depende de λ_1 y λ_2. En este caso, el grupo de Galois de la EDLR es isomorfo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Ejemplo 2.2. [Cauchy-Euler] La ecuación diferencial

$$z'' + \frac{\alpha}{x}z' + \frac{\beta}{x^2}z = 0,$$

donde α y β son constantes, se conoce como la ecuación equidimensional de Cauchy-Euler o simplemente ecuación de Euler. La ecuación de Euler se transforma en la EDLR

$$y'' = \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta}{4x^2}\right) y.$$

Trivialmente se tiene que para

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4},$$

la EDLR queda reducida a $y'' = 0$. La cual es inmediatamente integrable por cuadraturas y sus soluciones liouvillianas están dadas por $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Así que el grupo de Galois de la EDLR es la identidad y las soluciones de la ecuación de Euler están dadas por

$$z_1 = x^{\frac{-\alpha}{2}}, \quad z_2 = x^{\frac{-\alpha+2}{2}}.$$

En el otro caso,

$$\beta \neq \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4},$$

se tiene un polo de orden 2 en $x = 0$ y en $x = \infty$. Esto indica que la solución de la ecuación de Euler puede caer en cualquiera de los tres primeros casos, siendo siempre integrable para valores arbitrarios de α y β. Un caso particular que corresponde al caso 1 está dado por

$$m(m+1)=\frac{\alpha^2-2\alpha-4\beta}{4}\neq 0,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

La EDLR queda

$$y''=\left(\frac{m(m+1)}{x^2}\right)y,$$

por lo tanto $\alpha_\infty^+=1$, $\alpha_\infty^-=0$, $\alpha_0^+=m+1$, $\alpha_0^-=-m$. Los posibles elementos del conjunto D están dados por:

$$\alpha_\infty^+-\alpha_0^-=m+1\qquad \alpha_\infty^--\alpha_0^-=m$$

$$\alpha_\infty^+-\alpha_0^+=-m\qquad \alpha_\infty^--\alpha_0^+=-m,$$

de lo cual se tiene que para $m>0$, $D=\{m,m+1\}$, mientras que para $m<0$, $D=\{-m,-m-1\}$. Tomando $d=m+1$ y aplicando el paso 3 se obtiene la solución

$$y=Pe^{\int\omega}=x^{m+1}.$$

La otra solución está dada por

$$y=x^{-m}.$$

Claramente se observa que el grupo de Galois de la EDLR es el grupo identidad.

Ejemplo 2.3. Dada la EDLR $y''=ry$, donde

$$r=\frac{4x^6-8x^5+12x^4+4x^3+7x^2-20x+4}{4x^4}.$$

Se establecen s y t tales que

$$s=4x^6-8x^5+12x^4+4x^3+7x^2-20x+4,\quad t=4x^4,$$

por lo tanto se tiene que

$$r=\frac{s}{t}=x^2-2x+3+x^{-1}+\frac{7}{4}x^{-2}-5x^{-3}+x^{-4},\quad \Gamma=\{0,\infty\},$$

además se tiene que

$$\circ(r_0)=4=2v,\quad v=2,\quad \circ(r_\infty)=\deg t-\deg s=-2=-2v,\quad v=1.$$

Es claro que esta EDLR cae dentro del caso 1 (c_3,∞_3). Por (c_3) se tiene que $a=1$, $b=-5$, $v=2$ y esto implica que

$$\left[\sqrt{r}\right]_0=\frac{1}{x^2},\quad \alpha_0^\pm=\frac{1}{2}\left(\mp 5+2\right),$$

luego se tiene que

$$\alpha_0^+=-\frac{3}{2},\quad \alpha_0^-=\frac{7}{2}.$$

Por (∞_3) se tiene que $a=1$, $b=2$, $v=1$ y esto implica que

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty=x-1,\quad \alpha_\infty^\pm=\frac{1}{2}\left(\pm 2-1\right),$$

y por lo tanto

$$\alpha_\infty^+ = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\infty^- = -\frac{3}{2}.$$

Por el paso 2 se tiene que $D = \{0, 2\}$. Para $d = 0$ se tiene que

$$\omega = -x + 1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x^2}, \quad \omega' = -1 + \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3},$$

$$\omega^2 = x^2 - 2x + 4 - 5x^{-1} + \frac{17}{4x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

Ahora bien, para

$$M = \omega' + \omega^2 - r = \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x},$$

el único candidato a polinomio mónico de grado cero es $P = 1$, así que

$$P'' + 2\omega P' + MP = 0$$

indicaría que $M = 0$, luego $d = 0$ se descarta para encontrar una solución de la EDLR. Para $d = 2$ se tiene que

$$\omega = x - 1 - \frac{3}{2x} + \frac{q}{x^2} \quad \omega' = 1 + \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3},$$

$$\omega^2 = x^2 - 2x - 2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4},$$

por tanto se tiene

$$M = \omega' + \omega^2 - r = \frac{4}{x} - 4.$$

Ahora, el polinomio mónico de grado dos es de la forma $P = x^2 + bx + c$, así que $P' = 2x$, $P'' = 2$, por lo tanto $P'' + 2\omega P' + MP = 0$ indica que

$$-2bx + (2b - 4c - 4) + \frac{4 - 3b + 4c}{x} + \frac{2b}{x^2} = 0,$$

de esta forma, $b = 0$ y $c = -1$, luego $P = x^2 - 1$ y por lo tanto una solución de la EDLR es

$$y_1 = Pe^{\int \omega} = \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) e^{\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x}}.$$

La segunda solución de la EDLR es

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} = \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) e^{\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x}} \int \frac{dx}{\left(x - 2x^{\frac{3}{4}} + x^3\right) e^{x^2 - 2x - \frac{2}{x}}}.$$

Como el algoritmo solo dió una solución, que no es extensión cuadrática de su derivada logarítmica, entonces el grupo de Galois de la EDLR es $G = G^0 \simeq \mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}$, el cual no es un grupo conmutativo.

Ejemplo 2.4. La ecuación diferencial $xy'' - xy' - y = 0$ se transforma en la EDLR

$$y'' = ry, \quad r = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{x+4}{4x}.$$

Por lo tanto $\circ r_0 = 1$, $\circ r_\infty = 0$ que corresponde a (c_1, ∞_3), así que

$$\left[\sqrt{r}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1, \quad \left[\sqrt{r}\right]_\infty = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\infty^+ = -\alpha_\infty^- = 1.$$

Ahora bien, el único elemento de D está dado por $d = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = 0$, así que el polinomio mónico es $P = 1$,

$$\omega = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, \quad \omega' = -\frac{1}{x^2}, \quad \omega^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4}.$$

por tanto se tiene

$$M = \omega' + \omega^2 - r = 0.$$

El polinomio $P = 1$ satisface $P'' + 2\omega P' + MP = 0$ y por lo tanto una solución de la EDLR es

$$y_1 = xe^{\frac{x}{2}}.$$

La segunda solución de la EDLR es

$$y_2 = xe^{\frac{x}{2}} \int \frac{dx}{x^2 e^x}.$$

Como el algoritmo solo dió una solución, el grupo de Galois de la EDLR es $G = G^0 \simeq \mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}$, el cual no es un grupo conmutativo.

Caso 2. Tal como se mencionó anteriormente, al descartar el caso 1, debe buscarse que r tenga al menos un polo de orden 2 o de orden impar mayor que la unidad (1).

Paso 1. Buscar $E_c \neq \emptyset$ y $E_\infty \neq \emptyset$. Para cada $c \in \Gamma'$ se define $E_c \subset \mathbb{Z}$ como sigue:

(c_1) Si $\circ(r_c) = 1$, entonces $E_c = \{4\}$

(c_2) Si $\circ(r_c) = 2$, $r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$, entonces

$$E_c = \left\{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\right\}.$$

(c_3) Si $\circ(r_c) = v > 2$, entonces $E_c = \{v\}$

Para ∞ se define $E_\infty \subset \mathbb{Z}$ como sigue:

(∞_1) Si $\circ(r_\infty) > 2$, entonces $E_\infty = \{0, 2, 4\}$

(∞_2) Si $\circ(r_\infty) = 2$, $r = \cdots + b(x)^2 + \cdots$, entonces

$$E_\infty = \left\{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\right\}.$$

(∞_3) Si $\circ(r_\infty) = v < 2$, entonces $E_\infty = \{v\}$

Paso 2. Encontrar $D \neq \emptyset$ definido como

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : \quad d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma'} e_c \right), \forall e_p \in E_p,\ p \in \Gamma \right\}.$$

Si $D = \emptyset$, entonces el caso 2 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 3. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye una función racional θ definida como

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c \in \Gamma'} \frac{e_c}{x - c}.$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta' + 3\theta^2 - 4r)P' + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'\right) P = 0.$$

Si P no existe, entonces el caso 2 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe intentarse inmediatamente el caso 3. Ahora, si P existe, se establece

$$\phi = \theta + \frac{P'}{P}$$

y se busca ω tal que

$$\omega^2 - \phi\omega + \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r \right) = 0,$$

entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = e^{\int \omega},$$

donde ω es solución del polinomio anterior.

Ejemplo 2.5. Dada la ecuación diferencial

$$y'' = ry, \quad r = \frac{1}{x} - \frac{3}{16x^2} = \frac{16x - 3}{16x^2}.$$

Se observa que $\circ r_0 = 2$ y $\circ r_\infty = 1$, por tal razón esta EDLR no cae en el caso 1. Ahora bien, por el paso 1 del caso 2 se tiene que esta EDLR cae en (c_2, ∞_3), luego

$$b = -\frac{3}{16}, \quad E_0 = \left\{ 2 + k\sqrt{1 - 4\left(\frac{3}{16}\right)} \right\} = \{1, 2, 3\}, \quad v = 1, \quad E = \{1\},$$

por lo tanto los candidatos a elementos del conjunto D son

$$\frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \in \mathbb{Z}_+, \quad \frac{1}{2}(1 - 2) = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_+, \quad \frac{1}{2}(1 - 3) = -1 \notin \mathbb{Z}_+,$$

y de esta forma $D = \{0\}$. El único candidato a polinomio mónico de grado 0 es $P = 1$ y la función racional θ está dada por $\theta = \frac{1}{2x}$. Ahora bien, $P' = P'' = P''' = 0$, luego

$$\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r' = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{4x^3} + \frac{1}{8x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{4x^3} = 0.$$

Así que que efectivamente $P=1$ es el polinomio buscado. El paso siguiente es buscar ϕ tal que

$$\phi=\theta+\frac{P'}{P}=\frac{1}{2x},$$

luego se busca ω que satisfaga la siguiente ecuación cuadrática

$$\omega^2-\phi\omega+\left(\frac{1}{2}\phi'+\frac{1}{2}\phi^2-r\right)=\omega^2-\frac{1}{2x}\omega+\frac{1}{16x^2}-\frac{1}{x}=0,$$

las soluciones de ω están dadas por

$$\omega=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{4}{x}}}{2}=\frac{1}{4x}\pm\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Por tanto, hay dos soluciones para la EDLR dadas por

$$y_1=e^{\int\frac{1}{4x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{x}},\qquad y_2=e^{\int\frac{1}{4x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{4}}e^{-2\sqrt{x}}.$$

Finalmente, la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la EDLR es el grupo multiplicativo, el cual es un grupo abeliano.

Nota 2.2. El caso 2 puede aportar dos soluciones o una solución. Esto depende de r tal como sigue

$$r=\frac{2\phi'+2\phi-\phi^2}{4},\quad \text{sólo existe una solución,}$$
$$r\neq\frac{2\phi'+2\phi-\phi^2}{4},\quad \text{existen dos soluciones.}$$

Caso 3. Tal como se mencionó anteriormente, al descartar el caso 2, debe buscarse que todo polo de r tenga a lo mas orden 2 y el orden de r en ∞ debe ser al menos 2. Este es el caso más complicado debido a que se requieren muchos cálculos.

Paso 1. Buscar $E_c\neq\emptyset$ y $E_\infty\neq\emptyset$. Para cada $c\in\Gamma'$ se define $E_c\subset\mathbb{Z}$ como sigue:

(c_1) Si $\circ(r_c)=1$, entonces $E_c=\{12\}$

(c_2) Si $\circ(r_c)=2$, $r=\cdots+b(x-c)^{-2}+\cdots$, entonces

$$E_c=\left\{6+k\sqrt{1+4b}:\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\right\}.$$

Para ∞ se define $E_\infty\subset\mathbb{Z}$ como sigue:

(∞) Si $\circ(r_\infty)=v\geq2$, $r=\cdots+b(x)^2+\cdots$, entonces

$$E_\infty=\left\{6+\frac{12k}{n}\sqrt{1+4b}:\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\right\},\quad n\in\{4,6,12\}.$$

Paso 2. Encontrar $D\neq\emptyset$ definido por

$$D=\left\{d\in\mathbb{Z}_+:\quad d=\frac{n}{12}\left(e_\infty-\sum_{c\in\Gamma'}e_c\right),\forall e_p\in E_p,\ p\in\Gamma\right\}.$$

Primero debe utilizarse $n = 4$ hasta que el algoritmo proporcione la respuesta o falle, luego $n = 6$ y $n = 12$. Si $D = \emptyset$, entonces el caso 3 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 4. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ con su respectivo n, se construye una función racional

$$\theta = \frac{n}{12} \sum_{c \in \Gamma'} \frac{e_c}{x - c}$$

y un polinomio S definido como

$$S = \prod_{c \in \Gamma'} (x - c).$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que sus coeficientes estén determinados por la recurrencia

$$P_{-1} = 0, \quad P_n = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP_i' - ((n - i) S' - S\theta) P_i - (n - i)(i + 1) S^2 r P_{i+1},$$

donde $i \in \{0, 1 \ldots, n - 1, n\}$. Si P no existe, entonces el caso 3 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente el caso 4. Ahora, si P existe, se busca ω tal que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{S^i P}{(n - i)!} \omega^i = 0,$$

entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = e^{\int \omega},$$

donde ω es solución del polinomio anterior, el cual es de grado n. Si se logra determinar ω con $n = 4$, entonces el grupo de Galois de la EDLR es el grupo tetraedro, si se determina con $n = 6$ es el grupo octaedro y con $n = 12$ es el grupo icosaedro.

Ejemplo 2.6. Este ejemplo es una corrección al presentado por J. Kovacic en [15]. En el ejemplo 2 de la página 25, él plantea la siguiente EDLR

$$y'' = ry, \quad r = -\frac{5x + 27}{36(x - 1)^2} = -\frac{2}{9(x - 1)^2} + \ldots - \frac{2}{9(x + 1)^2} + \ldots,$$

y luego aplica el algoritmo sobre esta ecuación, omitiendo dos exponentes. Gracias a estas dos erratas, es muy difícil entender el ejemplo y el caso 3. La correcta EDLR está dada por

$$y'' = ry, \; r = -\frac{5x^2 + 27}{36(x^2 - 1)^2} = -\frac{2}{9(x - 1)^2} + \frac{11}{72(x - 1)} - \frac{2}{9(x + 1)^2} - \frac{11}{72(x + 1)}.$$

La expansión en series de Laurent para r alrededor de $x = \infty$ está dada por

$$r = -\frac{5}{36x^2} + \ldots$$

Debido a que $\circ r_{-1} = \circ r_1 = \circ r_\infty = 2$, esta ecuación podría caer en cualquiera de los cuatro casos. Sin embargo, se puede observar mediante el paso 1 que no cae en el caso ($D = \emptyset$) y mediante el paso 2 que no cae en el caso 2 ($P = 1$ no satisface la ecuación en θ). Así pues, se intenta el caso 3. Por el paso 1, se tiene que

$$E_{-1} = E_1 = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad E_\infty = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Por el paso 2, las únicas familias posibles para que $D \neq \emptyset$ con $n = 4$ están dadas por

$$\begin{aligned}
e_\infty = 8, \quad e_{-1} = 4, \quad e_1 = 4, \quad d = \frac{1}{3}(8 - 4 - 4) = 0,\\
e_\infty = 10, \quad e_{-1} = 4, \quad e_1 = 6, \quad d = \frac{1}{3}(10 - 4 - 6) = 0,\\
e_\infty = 10, \quad e_{-1} = 6, \quad e_1 = 4, \quad d = \frac{1}{3}(10 - 6 - 4) = 0,\\
e_\infty = 10, \quad e_{-1} = 5, \quad e_1 = 5, \quad d = \frac{1}{3}(10 - 5 - 5) = 0,
\end{aligned}$$

las demás familias dan valores que no son enteros no negativos, por lo tanto el único candidato a polinomio P es $P = 1$. Ahora bien, tomando la primera familia se tiene

$$\theta = \frac{n}{12}\sum_{c\in\Gamma'}\frac{e_c}{x-c} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{x+1} + \frac{4}{x-1}\right) = \frac{8x}{3(x^2-1)},$$

y el polinomio S está dado por

$$S = \prod_{c\in\Gamma'}(x - c) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1,$$

así se tiene

$$S\theta = \frac{8x}{3}, \quad S^2 r = -\frac{5x^2 + 27}{36}.$$

El paso siguiente es encontrar $P_0, P_1, \ldots, P_4$ mediante la recurrencia $P_4 = -P = -1, \quad P_{-1} = 0$,

$$\begin{aligned}
P_3 &= -SP_4' + S\theta P_4 = \tfrac{8}{3}x,\\
P_2 &= -SP_3' - (S' - S\theta)P_3 - 4S^2 rP_4 = -\tfrac{15x^2+1}{3},\\
P_1 &= -SP_2' - (2S' - S\theta)P_2 - 6S^2 rP_3 = \tfrac{50x^3+14x}{9},\\
P_0 &= -SP_1' - (3S' - S\theta)P_1 - 6S^2 rP_2 = -\tfrac{125x^4+134x^2-3}{54}.
\end{aligned}$$

Sea ω la solución de la ecuación

$$S\omega^4 = \frac{8x}{3}S\omega^3 - \frac{15x^2+1}{6}S\omega^2 + \frac{25x^3+7x}{27}S\omega - \frac{125x^4+134x^2-3}{1296}.$$

La solución de la EDLR será $e^{\int \omega}$, donde ω satisface la anterior ecuación polinómica de grado 4.

Nota 2.3. El tercer caso es el más complicado, puesto que al final se deben resolver ecuaciones polinómicas de grado 4, 6 o 12. Estos cálculos son muy grandes y se requiere la ayuda del computador.

Caso 4. Si no se obtienen soluciones liouvillianas por cualquiera de los casos anteriores, entonces el algoritmo de Kovacic no puede determinar las soluciones de la EDLR. Es decir, el grupo de Galois de la EDLR es exactamente $SL(2,\mathbb{C})$.

En algunos casos, la ecuación diferencial tiene coeficientes que no son funciones racionales. Para solventar esto (si se puede) se algebriza la ecuación diferencial (véase al respecto el capítulo 2 en [4]). Esta situación se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{\sin\tau}{1-\cos\tau}\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{8}{1-\cos\tau}\xi = 0.$$

Para poder aplicar el algoritmo de Kovacic hacemos la transformación $x = \frac{\cos\tau}{2} + 1$. Así obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x-1}\right)\frac{d\xi}{dx} + 4\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\right)\xi = 0.$$

Al aplicar el teorema 1.3,la ecuación anterior se transforma en la EDLR

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = r\eta, \quad r = \frac{5-72x}{16x^2(x-1)^2} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x}.$$

Por el paso 1 se tiene que $\Gamma = \{0,1,\infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, $\circ(r_\infty) = 3$. Esto indica que la EDLR puede caer en cualquiera de los tres primeros casos (c_2, ∞_1).

Primero se analiza el caso 1: $s = 5-72x$, $t = 16x^2(x-1)^2$, por lo tanto se tiene que $r = \frac{s}{t} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x}$, $\Gamma = \{0,1,\infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, y $\circ(r_\infty) = \deg t - \deg s = 3$. Es claro que esta EDLR cae dentro del caso 1, (c_2, ∞_1), por (∞_1) se tiene que $\alpha_\infty^+ = 0$ y $\alpha_\infty^- = 1$. Ahora, por (c_2) se tiene que para el polo $x = 1$, $b = \frac{-67}{16}$, mientras que para $x = 0$, $b = \frac{5}{16}$ y esto implica que $[\sqrt{r}]_{1,0} = 0$ y $\alpha_{1,0}^{\pm} \notin \mathbb{R}$, por lo tanto $D = \emptyset$. De la misma se hace para los otros 2 casos y se concluye que $D = \emptyset$ y por lo tanto la EDLR cae en el caso 4, indicando que no tiene soluciones liouvillianas.

Nota 2.4. [No integrabilidad inmediata de la EDLR] A simple vista se puede determinar, utilizando el algoritmo de Kovacic, si una EDLR no es soluble por cuadraturas, basta observar el conjunto D que determina el grado de un polinomio. Los siguientes casos son no integrables.

- Si r es un polinomio de grado impar,

- si r es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(x-c_i)}=\frac{P(x)}{Q(x)},\quad a_i\in\mathbb{C},\quad c_i\neq c_j,\quad n\geq 2,\quad \deg Q-\deg P>2,$$

- Si r es un polinomio de segundo grado escrito como

$$\left((ax+d)^2+b\right),\quad \frac{\pm b}{a}\notin 2\mathbb{Z}+1.$$

En particular, las ecuaciones diferenciales

$$\Psi''=(x^2+\lambda)\Psi,\quad y''=(\alpha^2x^2-\alpha-1)y,\quad y''=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}-n\right)y$$

son integrables si y solo si

$$\lambda\in 2\mathbb{Z}+1,\quad \frac{1}{2\alpha}\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

- La ecuación de Bessel (EDLR)

$$y''=\left(\frac{4n^2-1}{4x^2}-1\right)y,$$

es integrable si y solo si $n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$.

3. Integrabilidad de sistemas hamiltonianos

En esta sección, acorde a la introducción, se presenta un breve resumen de lo que es un sistema hamiltoniano. Se inicia recordando que en la mecánica clásica, la energía (H) de un sistema está dado por la suma de la energía cinética (T) y la energía potencial (V). La energía se expresa en función de posiciones (q_i) y momentos (p_i), en lugar de posiciones y velocidades. De esta forma, la expresión de la energía queda dada por

$$H=T+V,\quad T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{m_i},$$

en donde la energía potencial (o simplemente el potencial) depende de las posiciones y los momentos. Si la energía se conserva, entonces H es una constante de movimiento (integral primera). Si el sistema es disipativo, entonces la energía (H) depende del tiempo. En adelante, las masas serán normalizadas a la unidad y solo se considerarán sistemas conservativos en donde el potencial solo dependa de las posiciones.

El matemático francés J. Liouville en 1840 enunció el teorema que hoy en día lleva su nombre, *teorema de Liouville* y que fue formulado geométricamente por V. Arnold, razón por la cual también se conoce como *el teorema de Liouville–Arnold*.

Definición 3.1. Sea $H : U \subset \mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si $(q,p) \in U$, donde $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ entonces

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

se conocen como *ecuaciones de Hamilton*, y al escribirlas como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales se denomina *sistema hamiltoniano* con n grados de libertad.

Nota 3.1. En adelante denotaremos por X_H al campo vectorial hamiltoniano asociado a las ecuaciones del movimiento (3.1). Es decir,

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix}.$$

Definición 3.2. Sean $f, g : U \to \mathbb{K}$, el *paréntesis de Poisson* de f y g se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Si $\{f, g\} = 0$, se dice que f y g están en *involución.*

El teorema de *Liouville–Arnold* [1], traduce el problema de la integrabilidad de un sistema hamiltoniano de n grados de libertad a la existencia de n constantes del movimiento independientes y en involución.

Definición 3.3. Un hamiltoniano H de n grados de libertad se dice completamente integrable si existen n constantes del movimiento (integrales primeras de X_H), y en involución.

Nota 3.2. Se observa, que la condición de involutividad de las f_i implica que estas son funcionalmente independientes, es decir sus diferenciales son linealmente independientes sobre un abierto denso.

En particular, para un grado de libertad se tiene que la constante de movimiento o integral primera es la energía H, así que todos los de un grado de libertad son integrables. En dos grados de libertad, el siguiente caso del potencial de Henon-Heiles es integrable.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1 - 2q_1^3.$$

Como ejemplos de sistemas hamiltonianos de un grado de libertad se tienen los siguientes:

- Oscilador armónico
$$\frac{p^2}{2} + k\frac{q^2}{2}$$

- Péndulo simple
$$\frac{p^2}{2} + k\cos q$$
- Campo central
$$\frac{p^2}{2} + \frac{k}{q}$$

Nota 3.3. Un sistema hamiltoniano de n grados de libertad dado por
$$H = \sum_{k=1}^{n} H_k, \quad H_k = \frac{p_k^2}{2} + V_k(q_k),$$
es integrable porque las $2n$ ecuaciones diferenciales son desacopladas puesto que cada hamiltoniano es de un grado de libertad. La solución de cada sistema está dada por
$$t = \int \frac{dq_k}{\sqrt{2H_k + 2V_k(q_k)}}.$$
Si el sistema hamiltoniano es de dos grados de libertad y se quiere buscar una solución particular q_1 haciendo $q_2 = p_2 = h = 0$, se procede igual y se obtiene
$$t = \int \frac{dq_1}{\sqrt{2V(q_1, 0)}}.$$
Una aplicación de los sistemas hamiltonianos es que permiten resolver ecuaciones diferenciales. En el caso de un grado de libertad, la ecuación $y'' = f(y)$ puede resolverse como sigue,
$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{2h - 2\int f(y)dy}}.$$
Para dos o más grados de libertad hay que usar técnicas más avanzadas.

Un ejemplo de sistema no integrable, mediante integrales primeras racionales es el sistema de Henon-Heiles con parámetros nulos, tal como se verá en los ejemplos:
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1\,.$$

Teorema 3.4. *El sistema de ecuaciones diferenciales*
$$\begin{pmatrix} \dot\eta_1 \\ \dot\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$
se transforma en la ecuación diferencial
$$\ddot\xi - \left(a(t) + d(t) + \frac{\dot{b(t)}}{b(t)} \right) \dot\xi + \left(a(t)d(t) - b(t)c(t) - \dot a(t) + a(t)\frac{\dot{b(t)}}{b(t)} \right) \xi,$$
y las componentes conexas son iguales.

Ejemplo 3.1. El sistema dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\cos\tau \\ -\frac{8}{(1-\cos\tau)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}.$$

se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{\sin\tau}{1-\cos\tau}\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{8}{1-\cos\tau}\xi = 0.$$

Durante años se han buscado criterios para determinar la integrabilidad o no integrabilidad de un sistema hamiltoniano basada en el comportamiento de las soluciones en el dominio complejo.

Definición 3.5. Consideremos H un hamiltoniano holomorfo definido sobre $U \subset \mathbb{C}^{2n}$ y Υ la superficie de Riemann correspondiente a una curva integral $z = z(t)$ (la variedad riemanniana $z(t)$ puede ser un punto de equilibrio) del campo vectorial X_H. La *ecuación variacional* (EV) a lo largo de Υ se escribe como

$$\dot{\eta} = X'_H\left(z(t)\right)\eta.$$

Como es natural, las componentes de $z(t)$ son complejas.

Nota 3.4. Usando la parte lineal de la integral primera $dH(z(t))$ de la EV, es posible reducir esta ecuación variacional (es decir, la regla de eliminación de un grado de libertad) para obtener la conocida *ecuación variacional normal* (EVN), propia de los sistemas hamiltonianos lineales no autónomos,

$$\dot{\xi} = J_{n-1}S(t)\xi, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

donde $S(t)$ es una matriz simétrica, J_n es la matriz simpléctica, I_n es la matriz idéntica de tamaño $n \times n$. Este sistema de ecuaciones diferenciales (EVN) es una EV de un sistema hamiltoniano lineal. Además, X_H se puede escribir en función del gradiente de H por medio de la matriz simpléctica, es decir,

$$X_H = J_n \nabla H.$$

Históricamente, Poincaré dio un criterio de no integrabilidad basado en la matriz de monodromía (prolongaciones analíticas) de la EV a lo largo de una curva integral real periódica. En 1888 S. Kowalevski obtuvo un nuevo caso de integrabilidad del sistema de cuerpo rígido con un punto fijo, imponiendo la condición adicional de que la solución general es una función meromorfa de tiempo complejo. Lyapunov generalizó los resultados de Kowalevski y probó que excepto para algunas soluciones particulares, la solución general es univaluada. Su método está basado en el análisis de la EV a lo largo de una solución conocida. Más tarde, en 1982, S. L. Ziglin obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6. [ZIGLIN] *Supóngase que un sistema hamiltoniano admite $n-k$ integrales primeras meromorfas sobre Υ y que el grupo de monodromía de la EVN contiene una transformación no resonante g. Entonces cualquier otro elemento del grupo de monodromía de la EVN conserva las direcciones propias de g.*

Se dice que una transformación lineal g es resonante si existen enteros $r_1, \ldots, r_n$ tales que $\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n} = 1$, donde λ_i son los valores propios de g.

En particular, se considerarán sistemas hamiltonianos de 2 grados de libertad y la solución particular se buscará en el plano invariante $q_2 = p_2 = 0$. De esta forma la solución particular se obtiene como la solución de un sistema hamiltoniano de un grado de libertad.

4. Teoría de Morales–Ramis

En 1997, durante su estancia postdoctoral en Estrasburgo, JUAN MORALE–RUIZ obtiene conjuntamente con JEAN PIERRE RAMIS el siguiente resultado, el cual es considerado como la herramienta más potente para determinar si un sistema hamiltoniano es no integrable.

Teorema 4.1 (Morales–Ramis)**.** *Si el campo hamiltoniano inicial X_H es completamente integrable, entonces la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la EVN es abeliana.*

El teorema de Morales–Ramis es un poderoso criterio de no integrabilidad de un sistema hamiltoniano: si la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la EVN no es abeliana, entonces el campo hamiltoniano inicial X_H no es completamente integrable. En general el recíproco del teorema de Morales–Ramis no es cierto, pues la integrabilidad de la EVN no implica la integrabilidad completa del sistema hamiltoniano.

Nota 4.1. Si la EVN tiene una singularidad regular en el infinito y G^0 no es abeliana, entonces el sistema hamiltoniano es no integrable mediante integrales primeras meromorfas. En caso de que la EVN tenga una singularidad irregular en el infinito y G^0 no sea abeliana, entonces el sistema hamiltoniano es no integrable mediante integrales primeras racionales (véase [21]).

Sistemáticamente debe aplicarse el teorema de Morales–Ramis a un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad en los siguientes pasos:

1. Seleccionar una curva integral particular Υ, haciendo $q_2 = p_2 = 0$ y resolviendo el hamiltoniano de un grado de libertad (Nota 3.3).
2. Derivar el campo hamiltoniano X_H y escribir la ecuación variacional Normal(EVN) (Nota 3.4).
3. Transformar la EVN en una ecuación diferencial de segundo orden (Teorema 3.4), hallar la EDLR, algebrizarla si es el caso y aplicar el algoritmo de Kovacic.

4. Hallar la componente identidad, G^0 del grupo de Galois diferencial de la EDLR y ver si es abeliana (Nota 1.1).

5. Ejemplos

Como motivación al teorema de Morales–Ramis y al algoritmo de Kovacic se presentan los siguientes ejemplos.

5.1. El Problema de los tres cuerpos de Sitnikov. El sistema de Sitnikov es una restricción al problema de los tres cuerpos dada por una configuración muy simétrica: los primarios con masas iguales m se mueven en elipses de excentricidad e en el plano XY alrededor de sus centros de masa O, mientras el tercer cuerpo infinitesimal se mueve a lo largo del eje OZ perpendicular al plano donde los primarios se mueven. Tomamos, de manera usual, la normalización de unidades, de tal forma que $m = 1$, el periodo de los primarios es 2π y la constante gravitacional es igual a 1.

El hamiltoniano correspondiente al movimiento de la partícula infinitesimal a lo largo del eje OZ de este problema es

$$H(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2} - \frac{1}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{1}{2}}}$$

y la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

siendo $r(t)$ la distancia de una de los primarios al centro de masas O. Escogemos como nuevo tiempo la *anomalía excéntrica* τ. La transformación es dada por la ecuación de Kepler

$$t = \tau - e \sin \tau, \quad dt = (1 - e \cos \tau) d\tau$$

entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 - e \cos \tau) v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(1 - e \cos \tau) z}{(z^2 + r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \quad r(\tau) = \frac{1 - e \cos \tau}{2}.$$

Se estudian ahora dos casos del problema de los tres cuerpos de Sitnikov.

El problema del triangulo isósceles. Considérese el caso en que la órbita de los primarios es circular y la distancia de cada primario al centro de masas O es 1.

El hamiltoniano correspondiente a este problema, del cual se sabe que es completamente integrable, es

$$H(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2} - \frac{1}{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

y la ecuación de movimiento del tercer cuerpo está dada por

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dz}{dt}=v, \qquad \frac{dv}{dt}=-\frac{z}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales–Ramis

1. Como curva integral particular Υ se toma $z=v=0$.
2. La ecuación variacional normal EVN a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix}\frac{dz}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ v\end{pmatrix}.$$

3. Se observa que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes constantes y por lo tanto la EDLR tiene coeficientes constantes. Por el ejemplo 2.1 la componente identidad es abeliana.

Órbita de colisión triple. Considérese el caso en que $e=1$ y la distancia de una de los primarios al centro de masas O es $r(\tau)=\frac{1-\cos\tau}{2}$.

El hamiltoniano y la ecuación de movimiento del tercer cuerpo correspondiente a este problema, del cual nada se sabe, son los mismos del caso anterior. Esta ecuación se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau}=(1-\cos\tau)v, \qquad \frac{dv}{d\tau}=-\frac{(1-\cos\tau)z}{(z^2+r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \qquad r(\tau)=\frac{1-\cos\tau}{2}.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales–Ramis

1. Como curva integral particular Υ tomamos la órbita de la colisión triple con $e=1$, $r(\tau)=\frac{1-\cos\tau}{2}$, $z=v=0$.
2. La ecuación variacional normal EVN a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix}\frac{dz}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1-\cos\tau\\ -\frac{8}{(1-\cos\tau)^2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ v\end{pmatrix}.$$

   Este sistema coincide con el del ejemplo 3.1, por tanto se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}-\frac{\sin\tau}{1-\cos\tau}\frac{d\xi}{d\tau}+\frac{8}{1-\cos\tau}\xi=0.$$

   Por el ejemplo 2.7 la EDLR no tiene soluciones liouvillianas.
3. La componente identidad G^0 del grupo de Galois de la EDLR no es soluble y por lo tanto no es abeliana, de lo cual se tiene que el campo hamiltoniano inicial X_H correspondiente al problema de los tres cuerpos de Sitnikov con órbita de colisión triple no es completamente

integrable con integrales primeras meromorfas (la ecuación diferencial tiene una singularidad regular en el infinito).

5.2. El problema planar restringido de los tres cuerpos. El hamiltoniano correspondiente al problema de los tres cuerpos restringido al plano, con parámetro $\mu = 0$ está dado por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_2 p_1 - q_1 p_2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Se sabe que este hamiltoniano es completamente integrable por ser el problema de dos cuerpos en coordenadas giratorias. La ecuación de movimiento está dada por

$$\dot{q}_1 = q_2 + p_1, \quad \dot{q}_2 = -q_1 + p_2, \quad \dot{p}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} + p_2, \quad \dot{p}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - p_1.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales–Ramis

1. Como curva integral particular Υ se toma $q_1 = p_2 = 1, q_2 = p_1 = 0$.
2. La ecuación variacional EV a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

3. Se observa que la matriz de la EV tiene dos bloques iguales: el primero y el tercero, además el segundo y el cuarto bloque son I_2 y $-I_2$, de tal forma que la ecuación variacional normal EVN (utilizando el primer bloque) a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

4. Se observa que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes constantes y por lo tanto la componente identidad es abeliana.

5.3. Sistema de Henon-Heiles. El sistema de Henón-Heiles está dado por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3} q_1^3.$$

Se considerarán dos ejemplos, el primero es un caso integrable y el segundo es no integrable.

Un caso integrable. El sistema de Henon-Heiles

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1 - 2q_1^3.$$

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = q_2^2 + 6q_1^3, \quad \dot{p}_2 = 2q_2 q_1.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales–Ramis

1. Como solución particular se toma

$$\Upsilon : \quad (\dot{q}_1)^2 = 4q_1^3, \quad q_1 = \frac{1}{t^2}, \quad p_1 = -\frac{2}{t^3}, \quad q_2 = p_2 = 0\,.$$

2. La ecuación variacional normal EVN a lo largo de Υ está dada por

$$\eta' = X'_H(q_1(t))\eta, \quad X'_H(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12q_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{12}{t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Por el teorema 3.4, este sistema se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{12}{t^2}\xi\,.$$

3. Por el ejemplo 2.2 ($m = 3$) se tiene que el grupo de Galois de esta ecuación es la identidad, el cual es un grupo conexo abeliano.

Un caso no integrable. El sistema de Henon-Heiles que ahora se considera es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_1 q_2^2\,.$$

$$\dot{q_1} = p_1, \quad \dot{q_2} = p_2, \quad \dot{p_1} = q_2^2, \quad \dot{p_2} = 2q_1 q_2\,.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales–Ramis:

1. Como solución particular se toma

$$\Upsilon : q_1 = \frac{t}{2}, \quad p_1 = 1, \quad q_2 = p_2 = 0\,.$$

2. La ecuación variacional normal EVN a lo largo de Υ está dada por

$$\eta' = X'_H(q_1(t))\eta, \quad X'_H(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

   Este sistema se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = t\xi\,.$$

   Como esta ecuación está en forma de EDLR, se procede a aplicar el algoritmo de Kovacic. Por la nota 2.4 se tiene que el grupo de Galois de esta ecuación (denominada ecuación de Airy) es $SL(2, \mathbb{C})$ que es un grupo conexo pero no es abeliano. Además, la ecuación de Airy presenta una singularidad irregular en el infinito y por lo tanto este sistema de Henon-Heiles no es completamente integrable mediante integrales primeras racionales.

5.4. Otros ejemplos. Utilizando el resto de los ejemplos de la sección 2, se pueden construir sistemas hamiltonianos tales que el grupo de Galois de su EVN no sea abeliana.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - V(q_1, q_2)\,.$$

Se buscan las ecuaciones de Hamilton y se deriva el campo hamiltoniano para construir la ecuación variacional, de tal forma que ésta quede

$$\eta' = X_H'(q_1(t))\eta, \quad X_H'(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(q_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = r(t)\xi\,.$$

Ahora bien, si $r(t)$ hace parte del listado de las no integrables de la nota 2.4 o si es la correspondiente a los ejemplos 2.3, 2.4, entonces el sistema hamiltoniano inicial no es integrable mediante integrales primeras (meromorfas o racionales).

Conclusiones y comentarios finales. En general, construir ejemplos de aplicación del algoritmo de Kovacic a la teoría de Morales–Ramis no es una tarea fácil. Hay muy pocos ejemplos del algoritmo de Kovacic, sobre todo del caso 3. No menos laborioso es construir un sistema hamiltoniano a partir de una solución particular. En [4] no solo se da una respuesta a este problema, sino que también se presenta un algoritmo para algebrizar ecuaciones diferenciales y se demuestra, usando una versión ligéramente mejorada del algoritmo de kovacic (véase [2]) que si una EVN de un sistema hamiltoniano tiene coeficientes polinomiales, entonces este sistema hamiltoniano es no integrable mediante integrales primeras racionales. La teoría de Morales-Ramis está en crecimiento y es una oportunidad para algunos investigadores avancen y aporten en esta línea.

Agradecimientos: El autor está profundamente agradecido con las siguientes personas y entidades que hicieron posible la elaboración de este artículo.

- Jesús Hernando Pérez (Pelusa), por motivarme en el tema de la Teoría de Galois Diferencial,
- Juan Morales–Ruiz, por motivarme en el estudio del algoritmo de Kovacic y su relación con la teoría de Morales–Ramis, y por sus valiosas sugerencias en la presentación de este artículo,
- Josep Masdemont por exhortarme a escribir en una forma divulgativa esta teoría y por las correcciones que le realizó durante el curso *mecánica celeste*,
- David Blázquez Sanz, por su colaboración en la introducción de este artículo y por sus valiosas correcciones y sugerencias,

- Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, en cabeza del profesor REINALDO NÚÑEZ, por su invitación para participar en la Escuela de Verano y por su financiamiento para participar en el XV Congreso Nacional de Matemáticas,
- Sociedad Colombiana de Matemáticas, en cabeza del profesor CARLOS MONTENEGRO, por permitirme participar en el XV Congreso Nacional de Matemáticas con esta conferencia.

Referencias

[1] R. ABRAHAM & J. E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics.* Second Ed.New York: Benjamin (1978).

[2] P. ACOSTA HUMÁNEZ, *Sobre las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y el algoritmo de Kovacic*, Civilizar, edición especial de matemáticas, (2004), 209–220.

[3] P. ACOSTA HUMÁNEZ & J. H. PÉREZ, *Una introducción a la teoría de Galois diferencial*, Boletín de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia **11**, (2004), 138–149.

[4] P. ACOSTA HUMÁNEZ & D. BLÁZQUEZ SANZ, *Non-Integrability of some hamiltonian systems with rational potential*, `http://arxiv.org/abs/math-ph/0610010`

[5] M. AUDIN, *Les systèmes Hamiltoniens et leur intègrabilité*, Cours Spécialisés, Collection SMF **8** Société Mathematique de France, Marseille, 2001.

[6] M. AUDIN, *Intégrabilité et Non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens (d'aprés S. Ziglin, J. Morales–Ruiz, J.-P. Ramis,...)*, Sèminaire Bourbaki 2000-2001, núm. 884, Astérisque **282**, (2002), 113–135

[7] A. CAMPOS, *La ecuación de Riccati mediante grupos de Lie y algoritmo de Kovacic*, XXI Coloquio Distrital de Matemáticas, **4**, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (2005), 5–46.

[8] D. CAMPOS ROMERO & J. F. ISAZA DELGADO, *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*, Colección Textos. Universidad Nacional de Colombia: Bogotá, 2002.

[9] R. C. CHURCHILL, Differential Algebraic Techniques in Hamiltonian Mechanics, Differential Algebra and related Topics. LI GUO, WILLIAM F. KEIGHER, PHYLLIS J. CASSIDY & WILLIAM Y. SIT Eds. World Scientific Pub., 2002, 219–255.

[10] R. C. CHURCHILL, *Galoisian Obstructions to the Integrability of Hamiltonian Systems*, The Kolchin Seminar in Differential Algebra, City College of New York, May, 1998.

[11] R. C. CHURCHILL, D. L. ROD & M. F. SINGER, *Group-theoretic obstructions to integrability*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **15** (1995), 15–48.

[12] A. DUVAL& M. LODAY-RICHAUD, *Kovacic's Algorithm and its Application to some families of Special Functions*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing **15** (1992), 211–246.

[13] I. KAPLANSKY, *An Introduction to Differential Algebra.* Hermann: Paris, 1957.

[14] E. KOLCHIN, *Differential Algebra and Algebraic Groups.* New York: Academic Press, 1973.

[15] J. KOVACIC, *An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations*, J. Symbolic Computation, **2**, (1986), 3–43.

[16] J. Kovacic, *An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations*. CCNY Colloquium Lecture, Sept. 20, (2001). `http://mysite.verizon.net/jkovacic/lectures/algorithm.dvi`

[17] M. Kuga, *Galois' dream: Group theory and differential equations*. Birkhäuser: Boston, MA, 1993.

[18] A. Magid *Lectures on Differential Galois Theory*, University Lecture Series **7**. American Mathematical Society: Rhode Island MA, 1994.

[19] J. J. Morales–Ruiz, *A Note on a connection between the Poincaré-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiot theory*. Differential Galois Theory, Banach Center Publ. 58 (2002), 165–175.

[20] J. J. Morales–Ruiz, *A Remark About the Painlevé Trascendents*, Proceedings Theories asymptotiques et equations de Painlevé. Universidad de Angers, 2004.

[21] J. J. Morales–Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*. Birkhäuser: Basel, 1999.

[22] J. J. Morales–Ruiz, *Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the Differential Galois Theory*, Regular and Chaotic Dynamics **5** (2000), 251–272.

[23] J. J. Morales–Ruiz, *Meromorphic non-integrability of Hamiltonian Systems*. Proceedings of the XXXIII Symposium on Mathematical Physics, Rep. Math. Phys. **48**, (2001), No. 1–2, 183–194.

[24] J. J. Morales–Ruiz, *Técnicas algebraicas para la no integrabilidad de sistemas hamiltonianos*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, Barcelona, 1989.

[25] J. J. Morales–Ruiz, D. Blázquez-Sanz, S. Simón & P. Acosta-Humánez, *Sistemas dinámicos y teoría de Galois*, Forum FME-UPC, Barcelona, (2006). `http://www-ma2.upc.edu/primi/papers/abms.pdf`

[26] J. J. Morales–Ruiz & J.M. Peris, *On a Galoisian Approach to the Splitting of Separatrices*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **8** (1999), 125–141.

[27] J. J. Morales–Ruiz & J.M. Peris, *On the dynamical meaning of the Picard-Vessiot theory*, Regul. Chaotic. Dyn. **6** (3 (2001), 277–290.

[28] J. J. Morales–Ruiz & R. Ramírez, *Bi-Hamiltonian systems and Lax representation* NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **331** (1994), 253–259.

[29] J. J.Morales–Ruiz & J. P. Ramis, *A Note on the Non-Integrability of some Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential*. Methods and Applications of Analysis **8** (2001) 113-120.

[30] J. J. Morales–Ruiz & J. P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, I*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001), 33-95.

[31] J. J. Morales–Ruiz & J. P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, II*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001), 97-112.

[32] J. J. Morales–Ruiz & J. P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems: statements and examples*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **533** (1999), 509-513.

[33] J. J. Morales–Ruiz, J. P. Ramis & C. Simó, *Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations*, `http://www-ma2.upc.edu/juan/hvariatio-fin.pdf`

[34] J. J. Morales–Ruiz & C. Simó, *A correction to the paper: Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé Normal Variational Equations*. J. Diff. Eq. **144** (2) (1998), 477–478.

[35] J. J. MORALES–RUIZ & C. SIMÓ, *Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé Normal Variational Equations*, J. Diff. Eq. **129** (1996) 111–135.

[36] J. J. MORALES–RUIZ & C. SIMÓ, *On the solvability of the Lamé Equation*, International Conference on Differential Equations, Vols. 1, 2, Barcelona, 1991, 759–762.

[37] J. J. MORALES–RUIZ & C. SIMÓ, *Picard-Vessiot theory and Ziglin's theorem*. J. Diff. Eq. **107**(1) (1994), 140–162.

[38] J. J. MORALES–RUIZ, C. SIMÓ & S. SIMÓN, *Algebraic proof of the non-integrability of Hill's problem*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **25** (4) (2005), 1237–1256.

[39] M. VAN DER PUT & M. SINGER, *Galois Theory in Linear Differential Equations* Springe–Verlag: New York, 2003.

[40] S. L. ZIGLIN, *Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I.*, Functional Analysis and Applications, **16** (1982), 181–189.

(Recibido en abril de 2006. Aceptado para publicación en noviembre de 2006)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONA, ESPANYA
e-mail: `primitivo.acosta@upc.edu`