Lecturas Matemáticas
Volumen **22** *(2001), páginas 83–101*

Teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) sin argumento de homogeneidad

Jorge Mejía L.
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Colombia

Resumen. En este artículo se presenta una prueba más simple de un teorema de existencia y unicidad de solución ya demostrado en un trabajo anterior. En esta nueva prueba no es necesario obtener previamente el resultado para datos iniciales con norma pequeña, sino que directamente se establece para datos iniciales de tamaño arbitrario.

Key words and phrases. Problema de Cauchy, Ecuaciones dispersivas no lineales.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 35Q. Secondary 76.

Abstract. In this paper we give a simpler proof of a theorem on existence and uniqueness, presented in a former work. In this new proof we obtain the result directly for arbitrary initial data without having to establish it previously for small initial data.

Este artículo ha sido parcialmente financiado por Colciencias, Colombia, proyecto: 1118-05-605-96.

1. Introducción.

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvili, la cual denotaremos en adelante por KP, es una ecuación de evolución no lineal que aparece como una generalización bidimensional de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), en el estudio de la estabilidad transversal de solitones unidimensionales [KP].

El problema de Cauchy para la ecuación KP consiste en encontrar una función $u(x,y,t)$ de las variables espaciales x y y y de la variable temporal t tal que

$$\partial_t u + \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u\partial_x u = 0 \qquad (1.1)$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y)\ .$$

Aquí u_0 es una función dada y el operador ∂_x^{-1} representa cierta antiderivada con respecto a la variable x.

Con el signo " $-$ " la ecuación (1,1) es conocida como KP-I, y con el signo " $+$ " la ecuación es llamada KP-II.

En este trabajo consideraremos sólo la ecuación KP-II y el denominado problema en $\mathbb{R}^2$, o problema a mar abierto, que es aquel en el cual las variables espaciales x y y recorren todo $\mathbb{R}$, es decir $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En los últimos años el problema de Cauchy para la ecuación KP-II y otras ecuaciones de evolución no lineales ha sido estudiado para datos iniciales u_0 en espacios de baja regularidad.

En [B1] y [B2] BOURGAIN presenta un nuevo método para el estudio de problemas de Cauchy como el (1,1). La parte esencial de este método consiste en el tipo de espacios funcionales utilizados, que en adelante llamaremos *espacios de Bourgain*. Las normas de los espacios de Bourgain están definidas mediante la transformada de Fourier en las variables espacio-temporales y tienen en cuenta la estructura específica de la parte lineal de la ecuación. Con su método BOURGAIN probó en [B3] que el problema de Cauchy (1,1) está localmente bien planteado para datos iniciales u_0 en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s \geq 0$.

Basados en desigualdades elementales de cálculo, como fue hecho por KENIG, PONCE y VEGA en [KPV1] para la ecuación KdV, y en una desigualdad tipo Strichartz, establecida en el contexto de los espacios de Bourgain por TZVETKOV en [Tz], ISAZA y MEJÍA probaron en [IM] que el problema de Cauchy (1,1) está localmente bien planteado en espacios de Bourgain adecuados para datos iniciales en espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ con $s_1 > -\frac{1}{3}$ y $s_2 \geq 0$, lo cual constituye una mejora del resultado de BOURGAIN en [B3]. Es importante señalar que, independientemente de ISAZA y MEJÍA, TAKAOKA y TZVETKOV obtuvieron en [TT] el mismo resultado acerca del problema de Cauchy (1,1) demostrado en [IM].

El objetivo central de este trabajo es presentar una prueba más simple del teorema de existencia y unicidad demostrado en [IM]. Más precisamente, en [IM] se obtenían inicialmente soluciones locales en $[0,1]$ cuando los datos iniciales u_0 eran pequeños en $H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$, y luego, utilizando un argumento de homogeneidad, se probaba que dado un dato inicial u_0 de tamaño arbitrario en $H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ existía un $T > 0$ tal que el problema de Cauchy (1,1) tenía solución en $[0,T]$. En este artículo probamos directamente que dado u_0 de tamaño arbitrario en $H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ existe un $T > 0$ tal que el problema (1,1) tiene solución única en $[-T,T]$.

El trabajo consta de dos partes. En la primera parte (sección 2) son introducidas las definiciones de los diferentes espacios y operadores que permiten formular de manera precisa el concepto de solución del problema de Cauchy (1,1). Asimismo se enuncia el teorema de existencia y unicidad. La segunda parte (sección 3) está dedicada a la prueba del teorema de existencia y unicidad.

A lo largo de este artículo la letra C denotará diversas constantes.

2. Espacios funcionales, concepto de solución y formulación del resultado principal.

Denotemos por $S'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$.

Para $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$, $H^{s_1 s_2} \equiv H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ denotará el espacio de Sobolev anisotrópico de tipo L^2 dado por

$$H^{s_1 s_2} := \{u \in S'(\mathbb{R}^2) \mid \|u\|^2_{s_1 s_2} := \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1} \langle\eta\rangle^{2s_2} |\widehat{u}(\zeta)|^2 \, d\zeta < \infty\} \ .$$

Aquí $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de u en las variables espaciales x, y, $\zeta = (\xi, \eta)$, donde ξ y η son las variables en el espacio de frecuencias correspondientes a las variables espaciales x y y, respectivamente, y el símbolo $\langle\cdot\rangle$ es una abreviación para $1 + |\cdot|$.

Para s_1, s_2, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \geq 0$ denotamos por $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ el espacio de distribuciones temperadas u en $S'(\mathbb{R}^3)$ tales que $\widehat{u}$ es una función y

$$\|u\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} := \int_{\mathbb{R}^3} \langle\xi\rangle^{2s_1} \langle\eta\rangle^{2s_2} \langle\sigma\rangle^{2\gamma} \langle\theta\rangle^{2\varepsilon} |\widehat{u}(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty .$$

Aquí $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de u en las variables x, y, t, $\lambda = (\xi, \eta, \tau)$ y ξ, η, τ son las variables en el espacio de frecuencias, correspondientes a las variables x, y, t, respectivamente. Además, en la anterior norma, y en adelante, la letra σ denota el símbolo asociado a la parte lineal de la ecuación KP-II, es decir

$$\sigma := \tau - m(\zeta) \equiv \tau - \xi^3 + \frac{\eta^2}{\xi}$$

y la letra θ es una abreviación para $\frac{\sigma}{1+|\xi|^3}$. Si $\gamma \geq 0$, claramente $(X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. A los espacios $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ que acabamos de definir los llamaremos de manera genérica espacios de Bourgain.

Puede ser demostrado que si $S(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de Schwartz de funciones C^∞, definidas en $\mathbb{R}^3$, con decrecimiento rápido en el infinito, entonces $S(\mathbb{R}^3) \cap X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ es denso en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$. Además para $\gamma > \frac{1}{2}$ también se puede probar que el espacio $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ está inmerso de manera continua en el espacio $C_b(\mathbb{R}_t; H^{s_1 s_2})$ de funciones continuas y acotadas de la variable temporal t con valores en el espacio $H^{s_1 s_2}$ de las variables espaciales x, y. De esta manera, para $T > 0$ y $\gamma > \frac{1}{2}$ podemos definir el espacio de Banach $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T, T]$ formado por las restricciones a $[-T, T]$ de los elementos de $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$, con norma definida por

$$\|u\|_{X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T,T]} := \inf\{\|v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \mid v \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \wedge v|_{[-T,T]} = u\} .$$

En nuestro problema de Cauchy (1,1), los datos iniciales u_0 serán tomados en los espacios anisotrópicos $H^{s_1 s_2}$ y las soluciones locales en el tiempo serán buscadas en los espacios $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T, T]$ para algún $T > 0$.

El concepto de solución que utilizaremos parte de la fórmula de Duhamel para el problema de valores iniciales (1,1). Formalmente, u es una solución del problema (1) si y sólo si

$$u(t) = W(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t W(t-t')\partial_x(u(t'))^2 dt' \ ,$$

donde $\{W(t)\}$ es el grupo en $H^{s_1 s_2}$ asociado a la parte lineal de la ecuación KP-II, es decir el operador $W(t)$ está definido a través de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^2$ por

$$[W(t)u_0]\widehat{\ }(\zeta) := e^{itm(\zeta)}\widehat{u_0}(\zeta) \ .$$

En el estudio de la parte no lineal de la ecuación la forma bilineal $B(u,v) := -\frac{1}{2}\partial_x(uv)$ jugará un papel crucial; más precisamente, tiene lugar el siguiente resultado, cuya prueba puede consultarse en [IM], y está basada en desigualdades elementales de cálculo, como fue hecho por KENIG, PONCE y VEGA en [KPV1] para la ecuación de Korteweg-de Vries KdV, y en una desigualdad tipo Strichartz desarrollada en el contexto de los espacios de Bourgain, como fue hecho por TZVETKOV en [Tz].

.5*Para* $s_1 > -\frac{1}{3}$, $s_2 \geq 0$, *si* $s := \max\{0, -s_1\}$ *y* γ, γ', ε *son tales que* $\varepsilon > \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} < \gamma \leq \gamma'$, $1 - s - \gamma' - \varepsilon = (\frac{1}{3} - s) - (\gamma' - \frac{1}{2}) - (\varepsilon - \frac{1}{6}) \geq 0$, $1 - s - 3\varepsilon = (\frac{1}{2} - s) - 3(\varepsilon - \frac{1}{6}) \geq 0$, $\frac{2}{3} - \frac{s}{3} - \gamma' = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - s) - (\gamma' - \frac{1}{2}) \geq 0$, $\varepsilon - (\gamma' - \gamma) > 0$, *y* $\frac{1-4\varepsilon}{1-4(\gamma'-\gamma)} < \frac{1}{3}$, *entonces*

$$\|B(u,v)\|_{s_1 s_2 (\gamma'-1)\varepsilon} \leq C\|u\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}\|v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \ , \tag{2.1}$$

para $u, v \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ *arbitrarios.*

Para $T > 0$ y $\gamma > \frac{1}{2}$, si $f \in S(\mathbb{R}^3) \cap X_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon}$, definimos el operador integral G_T por

$$[G_T(f)](t) := \psi(T^{-1}t)\int_0^t W(t-t')f(t')dt' \ , \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

donde $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(t) = 1$ si $t \in [-1,1]$, $\psi(t) = 0$ si $t \notin [-2,2]$ y $f(t') \equiv f(\cdot_x, \cdot_y, t') : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Usando transformada de Fourier en las variables espacio-temporales en [IMS] fue probado el siguiente lema.

.5*Existe una constante* C_T*, que depende de* T*, tal que*

$$\|G_T(f)\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \leq C_T \|f\|_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon} \ , \tag{2.2}$$

y por consiguiente existe una única extensión continua de este operador, que denotaremos también por G_T*, al espacio* $X_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon}$.

Los lemas 1 y 2 nos permiten definir el concepto de solución del problema de Cauchy (1,1).

.5*Para* $u_0 \in H^{s_1 s_2}$*,* $T > 0$ *y* s_1*,* s_2*,* γ *y* ε *como en el lema 1, decimos que* $u \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T,T]$ *es una solución del problema de Cauchy* (1,1) *en el intervalo* $[-T,T]$ *si existe una extensión* $v \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ *de* u*, tal que*

$$u(t) = W(t)u_0 + G_T(B(v,v))(t) \text{ para todo } t \in [-T,T]. \tag{2.3}$$

Teniendo en cuenta, de una parte, que $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo C_0 en $H^{s_1 s_2}$ y, de otra, el contenido de los lemas 1 y 2, vemos que el lado derecho de (2,3) tiene sentido puntual en t como elemento de $H^{s_1 s_2}$.

La proposición que enunciamos a continuación muestra que la definición de solución que acabamos de dar es razonable.

.5*Sean* s_1*,* s_2*,* γ *y* ε *como en el lema 1.*

Proposición 1. (i) *Si para* $v_1, v_2, w_1, w_2 \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ *y* $T > 0$ *se tiene que* $v_1(t) = v_2(t)$ *y* $w_1(t) = w_2(t)$ *para todo* $t \in [-T,T]$ *entonces*

$$[G_T(B(v_1,w_1))](t) = [G_T(B(v_2,w_2))](t) \quad \forall t \in [-T,T] \, .$$

En particular, la definición 1 es independiente de la extensión v *de* u *que utilicemos.*

(ii) *La definición 1 es independiente de la escogencia de la función* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *con* $\psi(t) = 1$ *para todo* t *en* $[-1,1]$.

(iii) *Si* $v, w \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ *y* $0 < T_1 < T_2$*, entonces*

$$[G_{T_1}(B(v,w))](t) = [G_{T_2}(B(v,w))](t) \quad \forall t \in [-T_1,T_1] \, .$$

En particular, si $u \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T,T]$ *es solución del problema de valores iniciales* (1,1) *en* $[-T,T]$ *y* $0 < T_1 < T$*, entonces* $u|_{[-T_1,T_1]}$ *es solución del problema de valores iniciales* (1,1) *en* $[-T_1,T_1]$.

En la demostración de la proposición 1 haremos uso del siguiente lema de carácter técnico.

.5*Sean* s_1, s_2, γ *y* ε *como en el lema 1 y* $\phi(\cdot_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Entonces existe una constante* C *tal que*

$$\|\phi(\cdot_t)f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \leq C\|f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \quad \forall f \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}\,. \tag{2.4}$$

Demostración del Lema 3. Observemos que

$$[\phi(\cdot_t)f]\widehat{\ }(\zeta,\tau) = C[\widehat{\phi}(\cdot_\tau) *_\tau \widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\|\phi(\cdot_t)f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}\\
&= C\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\langle\sigma\rangle^{2\gamma}\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}|[\widehat{\phi}(\cdot_\tau) *_\tau \widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau)|^2\,d\tau\,d\zeta\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\int_{-\infty}^{\infty}|[\widehat{\phi}(\cdot_\tau) *_\tau \widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau)|^2\,d\tau\,d\zeta\right.\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|^{2\gamma}|[\widehat{\phi}(\cdot_\tau) *_\tau \widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau)|^2\,d\tau\,d\zeta\\
&\left.+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|^{2(\gamma+\epsilon)}|[\widehat{\phi}(\cdot_\tau) *_\tau \widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau)|^2\,d\tau\,d\zeta\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left\{\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\|\widehat{\phi}\|^2_{L^1_\tau}\|\widehat{f}(\zeta,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau}\,d\zeta\right.\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\|D_t^\gamma[e^{-itm(\zeta)}\phi(t)\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)]\|^2_{L^2_t}\,d\zeta\\
&\left.+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}}\|D_t^{\gamma+\epsilon}[\phi(t)e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)]\|^2_{L^2_t}\,d\zeta\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Para continuar con nuestra estimación necesitaremos la siguiente fórmula de Leibniz para derivadas fraccionarias probada en [KPV2]. Si $\alpha \in (0,1)$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R})}\,. \tag{2.5}$$

Como $\gamma, \gamma+\varepsilon \in (0,1)$, podemos aplicar la desigualdad de conmutador (2,5) para estimar las dos últimas integrales en la cadena de desigualdades precedente. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\|\phi(\cdot_t)f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\
&\le C\Big\{ \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, d\tau\, d\zeta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2} \Big(\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta) D_t^{\gamma}\phi(t)\|^2_{L^2_t} + \|\phi(\cdot_t)\|^2_{L^\infty_t} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |\sigma|^{2\gamma}\, d\tau \Big)\, d\zeta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}} \Big(\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta) D_t^{\gamma+\varepsilon}\phi(t)\|^2_{L^2_t} + \|\phi(\cdot_t)\|^2_{L^\infty_t} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |\sigma|^{2(\gamma+\varepsilon)}\, d\tau \Big)\, d\zeta \Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando la inmersión del espacio de Sobolev de orden γ y tipo L^2 en $\mathbb{R}_t$, $H^{\gamma}(\mathbb{R}_t)$, en $L^{\infty}(\mathbb{R}_t)$, para $\gamma > \frac{1}{2}$, se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}
&\|\phi(\cdot_t)f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\
&\le C\Bigg\{ \|f\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2} [\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)\|^2_{L^\infty_t} \|D_t^{\gamma}\phi(t)\|^2_{L^2_t} \\
&+ C\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |\sigma|^{2\gamma}\, d\tau]\, d\zeta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}} [\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)\|^2_{L^\infty_t} \|D_t^{\gamma+\varepsilon}\phi(t)\|^2_{L^2_t} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |\sigma|^{2(\gamma+\varepsilon)}\, d\tau]\, d\zeta \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\Bigg\{ \|f\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2} \|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)\|^2_{H^\gamma_t}\, d\zeta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}} \|e^{-itm(\zeta)}\widehat{f(\cdot,\cdot,t)}(\zeta)\|^2_{H^\gamma_t}\, d\zeta \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\Bigg\{ \|f\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2\gamma} |\widehat{f}(\zeta,\tau+m(\zeta))|^2 d\tau \right) d\zeta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}}{\langle\xi^3\rangle^{2\varepsilon}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2\gamma} |\widehat{f}(\zeta,\tau+m(\zeta))|^2 d\tau \right) d\zeta \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\|f\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}\,.
\end{aligned}$$

Queda así demostrado el lema 3.

Demostración de la Proposición 1. (i) Como $B(v,w) = \frac{1}{4}[B(v+w, v+w) - B(v-w, v-w)]$, basta probar que si $f, g \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ son tales que $f(t) = g(t)$ para todo $t \in [-T, T]$, entonces

$$[G_T(B(f,f))](t) = [G_T(B(g,g))](t),$$

para todo $t \in [-T, T]$.

Sea $t \in (-T, T)$ y tómese $\delta \in (0, T)$ tal que $-T + \delta < t < T - \delta$. Sea $\phi(\cdot_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi \equiv 1$ en $[-T+\delta, T-\delta]$ y cuyo soporte está incluido en $(-T, T)$. Entonces $\phi f = \phi g$ en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$. Veamos que para todo $t' \in [-T+\delta, T-\delta]$

$$[G_T(B(\phi f, \phi f))](t') = [G_T(B(f,f))](t') \; . \tag{2.6}$$

Como $S(\mathbb{R}^3) \cap X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ es denso en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ existe una sucesión $\{f_n\}$ en $S(\mathbb{R}^3) \cap X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ tal que $f_n \to f$ en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$. Por tanto, en virtud del lema 3, $\phi f_n \to \phi f$ en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$, y en consecuencia, por los lemas 1 y 2, $G_T(B(\phi f_n, \phi f_n)) \to G_T(B(\phi f, \phi f))$ en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$. Puesto que para $\gamma > \frac{1}{2}$ $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ está inmerso de manera continua en $C_b(\mathbb{R}_t; H^{s_1 s_2})$, entonces

$$[G_T(B(\phi f_n, \phi f_n))](t') \to [G_T(B(\phi f, \phi f))](t') \text{ en } H^{s_1 s_2} \; , \tag{2.7}$$

para todo $t' \in \mathbb{R}$. Análogamente,

$$[G_T(B(f_n, f_n))](t') \to [G_T(B(f,f))](t') \text{ en } H^{s_1 s_2} \; , \tag{2.8}$$

para todo $t' \in \mathbb{R}$. Si $t' \in [-T+\delta, T-\delta]$,

$$\begin{aligned}
[G_T(B(\phi f_n, \phi f_n))](t') &= \psi(T^{-1}t') \int_0^{t'} W(t'-\tau)[-\frac{1}{2}\partial_x(\phi(\tau) f_n(\tau))^2] d\tau \\
&= \psi(T^{-1}t') \int_0^{t'} W(t'-\tau)[-\frac{1}{2}\partial_x(f_n(\tau))^2] d\tau \\
&= [G_T(B(f_n, f_n))](t') \; .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

De (2,7), (2,8) y (2,9) se sigue (2,6). En particular la igualdad (2,6) es válida para t. Así para $t \in (-T, T)$:

$$\begin{aligned}
[G_T(B(f,f))](t) &= [G_T(B(\phi f, \phi f))](t) = [G_T(B(\phi g, \phi g))](t) \\
&= [G_T(B(g,g))](t)
\end{aligned}$$

En $t = T$ o en $t = -T$ la igualdad anterior es válida por continuidad.

(ii) Para la prueba de (ii) basta tener en cuenta la densidad de $S(\mathbb{R}^3) \cap X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ y el hecho de que $\psi(T^{-1}t) = 1$ para todo $t \in [-T, T]$.

(iii) Para la prueba de (iii) se hace uso nuevamente del resultado de densidad y de la igualdad $\psi(T_2^{-1}t) = \psi(T_1^{-1}t)$ para todo $t \in [-T_1, T_1]$.

Finalizamos esta sección enunciando el resultado principal del presente artículo.

.5 [Existencia y unicidad de solución local en el tiempo] *Sean* $s_1 > -\frac{1}{3}$*,* $s_2 \geq 0$ *y* $u_0 \in H^{s_1 s_2}$*. Si* γ *y* ε *satisfacen las hipótesis del Lema 1 entonces existen* $T > 0$ $(T = T(\|u_0\|_{H^{s_1 s_2}}))$ *y una única solución* $u \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T, T]$ *del problema de Cauchy* (1,1) *en* $[-T, T]$*.*

3. Demostración del Teorema 1 (existencia y unicidad de solución local en el tiempo)

En la prueba del teorema de existencia y unicidad utilizaremos los siguientes lemas.

.5*Sean* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0$*,* $\gamma \geq -\varepsilon$ *y* $\psi(\cdot_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$*. Entonces existe una constante* C *tal que*

$$\|\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} \ , \tag{3.1}$$

para todo $u_0 \in H^{s_1 s_2}$*.*

Demostración. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
[\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0]\widehat{\ }(\lambda) &= (\psi(t)e^{itm(\zeta)}\widehat{u_0}(\zeta))\widehat{\ }^{t}(\tau) \\
&= \widehat{u_0}(\zeta)\widehat{\psi}(\tau - m(\zeta)) \ ,
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\|\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle\xi\rangle^{2s_1}\langle\eta\rangle^{2s_2}\langle\sigma\rangle^{2\gamma}\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{u_0}(\zeta)|^2|\widehat{\psi}(\sigma)|^2\ d\lambda \\ &\leq \|u_0\|^2_{s_1s_2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{2(\gamma+\varepsilon)}|\widehat{\psi}(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq C\|u_0\|^2_{s_1s_2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\psi}(\tau)|^2d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2(\gamma+\varepsilon)}|\widehat{\psi}(\tau)|^2 d\tau\Big) \\ &\leq C\|u_0\|^2_{s_1s_2}\ .\end{aligned}$$

.5*Para* $T \in (0,1)$*,* s_1*,* s_2*,* γ*,* γ' *y* ε *como en el lema 1 y* $\gamma < \gamma'$*,* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$*,* $0 \leq \psi \leq 1$*,* $\psi(t) = 1$ *si* $t \in [-1,1]$*,* $\psi(t) = 0$ *si* $t \notin [-2,2]$ *se tiene que*

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)v\|_{s_1s_2(\gamma-1)\varepsilon} \leq CT^\beta\|v\|_{s_1s_2(\gamma'-1)\varepsilon} \quad \forall v \in X_{s_1s_2(\gamma'-1)\varepsilon}\ ,$$

donde $\beta := \frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma}$*.*

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)v\|_{s_1s_2(\gamma-1)\varepsilon} &\leq C\|\psi(T^{-1}\cdot_t)v\|_{s_1s_2(\gamma-1)0} + C\|\psi(T^{-1}\cdot_t)\Lambda^\varepsilon v\|_{s_1s_2(\gamma+\varepsilon-1)0} \\ &=: I + II\ ,\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $(\Lambda^\varepsilon v)\widehat{\ }(\zeta,\tau) := \frac{\widehat{v}(\zeta,\tau)}{(1+|\xi|^3)^\varepsilon}$.

Estimemos II. Para ello procederemos por dualidad y probaremos que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,(1-(\gamma'+\varepsilon)),0} \leq CT^{\frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma-\varepsilon}}\|u\|_{-s_1,-s_2,(1-(\gamma+\varepsilon)),0}\ . \tag{3.2}$$

Esta última desigualdad se tendrá por interpolación una vez probemos que:

i) $$\begin{aligned}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,0,0} &\leq CT^{\frac{1}{8}}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,\frac{1}{8},0} \\ &\leq CT^{\frac{1}{8}}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0} \quad \text{y}\end{aligned}$$

ii) $$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0} \leq C\|u\|_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0}\ .$$

Por densidad, es suficiente probar i) y ii) para

$$u \in S(\mathbb{R}^3) \cap X_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0}\ .$$

Prueba de i):

$$\begin{aligned}
\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^2_{-s_1,-s_2,0,0} &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}|[\psi(T^{-1}\cdot_t)u]^\frown(\zeta,\tau)|^2 d\tau d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{-\infty}^{\infty} |[(\psi(T^{-1}\cdot_t)u)^{\frown xy}(\zeta)]^{\frown t}(\tau)|^2 d\tau d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(T^{-1}t)|^2|\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)|^2 dt d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(T^{-1}t)|^2\int_{\mathbb{R}^2} |e^{-itm(\zeta)}\langle\xi\rangle^{-s_1}\langle\eta\rangle^{-s_2}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)|^2 d\zeta dt \\
&= C\int_{-2T}^{2T} |\psi(T^{-1}t)|^2\int_{\mathbb{R}^2} |[W(-t)J^{-s_1,-s_2}(u(t))](x,y)|^2 dxdydt \\
&= C\int_{-2T}^{2T}\int_{\mathbb{R}^2} |[W(-t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}t)u(t))](x,y)|^2 dxdydt\ ,
\end{aligned}$$

donde $[J^{-s_1,-s_2}(u(t))]^{\frown xy}(\zeta) = \langle\xi\rangle^{-s_1}\langle\eta\rangle^{-s_2}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)$.

Apliquemos ahora la desigualdad de Hölder a la integral en t, con exponentes 4 y $\frac{4}{3}$, para obtener:

$$\begin{aligned}
&\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^2_{-s_1,-s_2,0,0} \\
&\qquad \le CT^{\frac{1}{4}}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |[W(-t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}t)u(t))](x,y)|^2 dxdy\Big)^{\frac{4}{3}} dt\Big\}^{\frac{3}{4}}\ .
\end{aligned}$$

Por la desigualdad integral de Minkowski, la anterior expresión no excede a

$$\begin{aligned}
&CT^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |[W(-t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}t)u(t))](x,y)|^{\frac{8}{3}} dt\Big)^{\frac{3}{4}} dxdy \\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2} \|[W(-\cdot_t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t))](x,y)\|^2_{L_t^{\frac{8}{3}}} dxdy\ .
\end{aligned}$$

Como $H^{\frac{1}{8}}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de manera continua en $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}_t)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
||\psi(T^{-1}\cdot_t)u||^2_{-s_1,-s_2,0,0} &\leq CT^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}||[W(-\cdot_t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t))](x,y)||^2_{H_t^{\frac{1}{8}}}dxdy\\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}|([W(-\cdot_t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t))](x,y))^{\wedge t}(\tau)|^2 d\tau dxdy\\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}|\{([W(-\cdot_t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t))](x,y))^{\wedge t}(\tau)\}^{\wedge xy}(\zeta)|^2 d\zeta d\tau\\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}|([W(-\cdot_t)J^{-s_1,-s_2}(\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t))]^{\wedge xy}(\zeta))^{\wedge t}(\tau)|^2 d\zeta d\tau\\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}|[e^{-i\cdot_t m(\zeta)}\langle\xi\rangle^{-s_1}\langle\eta\rangle^{-s_2}[\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t)]^{\wedge xy}(\zeta)]^{\wedge t}(\tau)|^2 d\zeta d\tau\\
&= CT^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}|\langle\xi\rangle^{-s_1}\langle\eta\rangle^{-s_2}[\psi(T^{-1}\cdot_t)u(\cdot_t)]^{\wedge}(\zeta,\tau+m(\zeta))|^2 d\zeta d\tau\\
&= CT^{\frac{1}{4}}||\psi(T^{-1}\cdot_t)u||^2_{-s_1,-s_2,\frac{1}{8},0}\\
&\leq CT^{\frac{1}{4}}||\psi(T^{-1}\cdot_t)u||^2_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0}\ ,
\end{aligned}$$

ya que $\frac{1}{8} < 1-(\gamma+\varepsilon)$.

Prueba de ii):

$$\begin{aligned}
&||\psi(T^{-1}\cdot_t)u||^2_{-s_1,-s_2,1-(\gamma+\varepsilon),0}\\
&\qquad = C\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle^{2(1-\gamma-\varepsilon)}|[T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau)*_\tau\widehat{u}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau)|^2 d\tau d\zeta\ .
\end{aligned}$$

Si $I(\zeta)$ representa la integral interior en la anterior expresión, entonces

$$\begin{aligned}
I(\zeta) &\leq C||T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau)*_\tau\widehat{u}(\zeta,\cdot_\tau)||^2_{L^2_\tau} + C\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2(1-\gamma-\varepsilon)}|[T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau)*_\tau\widehat{u}(\zeta,\cdot_\tau)](\tau+m(\zeta))|^2 d\tau\\
&=: C(II(\zeta)+III(\zeta))\ .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

De una parte,

$$II(\zeta) \leq C\|T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau)\|^2_{L^1_\tau}\|\widehat{u}(\zeta,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau} \leq C\|\widehat{u}(\zeta,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau}\ . \tag{3.4}$$

Para estimar $III(\zeta)$, una aplicación de la desigualdad de conmutador (2,5) nos da

$$\begin{aligned} III(\zeta) &= C\|D_t^{1-\gamma-\varepsilon}(e^{-itm(\zeta)}\psi(T^{-1}t)\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta))\|_{L_t^2}^2 \\ &\leq C\|D_t^{1-\gamma-\varepsilon}(e^{-itm(\zeta)}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta))\|_{L_t^2}^2\|\psi(T^{-1}t)\|_{L_t^\infty}^2 \\ &+ C\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)D_t^{1-\gamma-\varepsilon}\psi(T^{-1}t)\|_{L_t^2}^2 \,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Del estimativo (3,5) es claro que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}II(\zeta)d\zeta \leq C\|u\|_{-s_1,-s_2,0,0}^2 \,. \tag{3.6}$$

De (3,6), la fórmula de Plancherel y la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}III(\zeta)d\zeta \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{2(1-\gamma-\varepsilon)}|\widehat{u}(\zeta,\tau+m(\zeta))|^2d\tau d\zeta \\ &+ C\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-itm(\zeta)}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)D_t^{1-\gamma-\varepsilon}\psi(T^{-1}t)|^2dtd\zeta \\ &\leq C\|u\|_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}^2 + \\ &C\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\{\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-itm(\zeta)}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)|^{2p}dt\}^{\frac{1}{p}}\{\int_{-\infty}^{\infty}|D_t^{1-\gamma-\varepsilon}\psi(T^{-1}t)|^{2p'}dt\}^{\frac{1}{p'}}d\zeta \,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde p y p' son exponentes conjugados. Si escogemos p de manera que $\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}=1-\gamma-\varepsilon$, entonces el espacio de Sobolev $H^{1-\gamma-\varepsilon}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de manera continua en $L^{2p}(\mathbb{R}_t)$. Teniendo en cuenta que la transformada inversa de Fourier es un operador acotado de $L^{\frac{2p'}{2p'-1}}(\mathbb{R})$

en $L^{2p'}(\mathbb{R})$, de la desigualdad (3,8) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2} III(\zeta)d\zeta$$
$$\leq C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0} + C\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi\rangle^{-2s_1}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\|e^{-itm(\zeta)}\widehat{u(t)}^{xy}(\zeta)\|^2_{H_t^{1-\gamma-\varepsilon}} d\zeta$$
$$\cdot\{\int_{-\infty}^{\infty}|D_t^{1-\gamma-\varepsilon}\psi(T^{-1}t)|^{2p'}dt\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}$$
$$+ C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\{\int_{-\infty}^{\infty}||\tau|^{1-\gamma-\varepsilon}T\widehat{\psi}(T\tau)|^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau\}^{2\frac{2p'-1}{2p'}}$$
$$= C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\{1+(\int_{-\infty}^{\infty}(|\tau'|^{1-\gamma-\varepsilon}T^{\gamma+\varepsilon-1}T|\widehat{\psi}(\tau')|)^{\frac{2p'}{2p'-1}}T^{-1}d\tau')^{2\frac{2p'-1}{2p'}}\}$$
$$= C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\{1+(\int_{-\infty}^{\infty}(|\tau|^{1-\gamma-\varepsilon}T^{\gamma+\varepsilon}T^{-\frac{2p'-1}{2p'}}|\widehat{\psi}(\tau)|)^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau)^{2\frac{2p'-1}{2p'}}\}$$
$$= C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\{1+(\int_{-\infty}^{\infty}(|\tau|^{1-\gamma-\varepsilon}T^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}T^{-(1-\frac{1}{2p'})}|\widehat{\psi}(\tau)|)^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau)^{2\frac{2p'-1}{2p'}}\}$$
$$= C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\{1+(\int_{-\infty}^{\infty}(|\tau|^{1-\gamma-\varepsilon}|\widehat{\psi}(\tau)|)^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau)^{2\frac{2p'-1}{2p'}}\}$$
$$\leq C\|u\|^2_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\,. \tag{3.9}$$

De (3,4), (3,7) y (3,9) concluimos que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0} \leq C\|u\|_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\ ,$$

es decir la afirmación (ii) es cierta.

De las afirmaciones (i) y (ii), por interpolación, se sigue que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{-s_1,-s_2,1-\gamma'-\varepsilon,0}$$
$$\leq C\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^{\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma-\varepsilon}}_{-s_1,-s_2,0,0}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^{\frac{1-\gamma'-\varepsilon}{1-\gamma-\varepsilon}}_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}$$
$$\leq CT^{\frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma-\varepsilon}}\|u\|_{-s_1,-s_2,1-\gamma-\varepsilon,0}\ ,$$

con lo cual queda establecido el estimativo (3,3).

Ahora de (3,3) podemos concluir que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{s_1,s_2,\gamma+\varepsilon-1,0} \leq CT^{\frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma-\varepsilon}}\|u\|_{s_1,s_2,\gamma'+\varepsilon-1,0} \ ,$$

y, en consecuencia:

$$II \leq CT^{\frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma-\varepsilon}}\|\Lambda^\varepsilon v\|_{s_1,s_2,\gamma'+\varepsilon-1,0} \ . \tag{3.7}$$

De manera análoga podemos probar que

$$I \leq CT^{\frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma}}\|v\|_{s_1,s_2,\gamma'-1,0} \ , \tag{3.8}$$

y, por tanto, puesto que $T \in (0,1)$, de (3,10), (3,11) y (3,2), obtenemos la afirmación del lema 5.

Demostración del Teorema 1. Existencia

Sean s_1, s_2, γ, γ' y ε como en el lema 1 con $\gamma < \gamma'$ y sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ como en el lema 5. Para $u_0 \in H^{s_1 s_2}$ y $T \in (0,1]$ definamos un operador $\Phi_{u_0}^T$ de $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ en sí mismo por

$$[\Phi_{u_0}^T(v)](t) := \psi(t)W(t)u_0 + [G_1(B(\psi(T^{-1}\cdot_t)v, v))](t) \ .$$

Los lemas 4, 2, 5 y 1 garantizan que el operador $\Phi_{u_0}^T$ está bien definido. En realidad, de acuerdo con estos lemas, tiene lugar la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{u_0}^T(v)\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} &\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + C_1\|B(\psi(T^{-1}\cdot_t)v, v)\|_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon} \\
&\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + C_1\|\psi(T^{-1}\cdot_t)B(v, v)\|_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon} \\
&\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + CT^\beta\|B(v, v)\|_{s_1 s_2 (\gamma'-1)\varepsilon} \\
&\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + CT^\beta\|v\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \ ,
\end{aligned}$$

donde $\beta := \frac{1}{8}\frac{\gamma'-\gamma}{1-\gamma} > 0$.

Tómese $T \in (0,1]$ tal que $T^\beta < \frac{1}{4C^2\|u_0\|_{s_1 s_2}}$.

Veamos que $\Phi_{u_0}^T$ envía la bola cerrada en $X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ de centro 0 y radio $2C\|u_0\|_{s_1 s_2}$ en sí misma y que $\Phi_{u_0}^T$ es una contracción en dicha bola. En efecto, si $\|v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \leq 2C\|u_0\|_{s_1 s_2}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\Phi^T_{u_0}(v)\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} &\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + CT^\beta \|v\|^2_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\ &\leq C\|u_0\|_{s_1 s_2} + C\frac{1}{4C^2\|u_0\|_{s_1 s_2}} 4C^2\|u_0\|^2_{s_1 s_2} \\ &= 2C\|u_0\|_{s_1 s_2} \ .\end{aligned}$$

De otra parte, si $\|\omega\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$, $\|v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \leq 2C\|u_0\|_{s_1 s_2}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\Phi^T_{u_0}(\omega) - \Phi^T_{u_0}(v)\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} &= \|G_1(\psi(T^{-1}\cdot_t)(B(\omega,\omega) - B(v,v)))\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\ &= \|G_1(\psi(T^{-1}\cdot_t)B(\omega+v,\omega-v)))\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\ &\leq C_1\|\psi(T^{-1}\cdot_t)B(\omega+v,\omega-v)\|_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon} \\ &\leq CT^\beta \|\omega+v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \|\omega - v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \\ &\leq CT^\beta (4C\|u_0\|_{s_1 s_2}) \|\omega - v\|_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon} \ ,\end{aligned}$$

donde $4C^2T^\beta\|u_0\|_{s_1 s_2} < 1$. Es decir, $\Phi^T_{u_0}$ es una contracción en dicha bola. Sea $v \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}$ el único punto fijo de $\Phi^T_{u_0}$ en la bola en mención. Probemos que $u := v|_{[-T,T]} \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T,T]$ es solución en $[-T,T]$ del problema de Cauchy (1,1). En realidad, si $t \in [-T,T]$, como $T \in (0,1]$, $\psi(t) = 1$ y así, teniendo en cuenta la definición de $\Phi^T_{u_0}$ y la proposición 1, se sigue que

$$\begin{aligned}u(t) &= W(t)u_0 + [G_1(B(\psi(T^{-1}\cdot_t)v,v))](t) \\ &= W(t)u_0 + [G_T(B(\psi(T^{-1}\cdot_t)v,v))](t) \\ &= W(t)u_0 + [G_T(B(v,v))](t) \ ,\end{aligned}$$

es decir, u es solución del problema de Cauchy (1,1) en $[-T,T]$.

Unicidad

Sean $u_1, u_2 \in X_{s_1 s_2 \gamma\varepsilon}[-T,T]$ soluciones del problema de Cauchy (1,1) en $[-T,T]$ con dato inicial u_0. Probemos que $u_1 = u_2$. Sea γ' escogido de manera que $\gamma' < \gamma$, y que se satisfagan las hipótesis del lema 1 con los papeles de γ y γ' intercambiados. Es claro que u_1 y u_2 también son soluciones en $X_{s_1 s_2 \gamma'\varepsilon}[-T,T]$ del problema de Cauchy (1,1).

Sea $\delta \in (0,T)$ y consideremos $(u_1 - u_2)|_{[-\delta,\delta]} \in X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-\delta,\delta]$. Sea $v_{1\delta} \in X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}$ una extensión de $(u_1 - u_2)|_{[-\delta,\delta]}$ tal que

$$\|v_{1\delta}\|_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon} \leq 2\|u_1 - u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-\delta,\delta]} \,. \tag{3.9}$$

Escojamos una extensión $v_2 \in X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}$ de $u_1 + u_2$ tal que

$$\|v_2\|_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon} \leq 2\|u_1 + u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-T,T]} \,, \tag{3.10}$$

y definamos $g := G_T(B(\psi(\delta^{-1}\cdot_t)v_2, v_{1\delta}))$. De los lemas 1, 2 y 3 se sigue que $g \in X_{s_1 s_2 \gamma \varepsilon} \subset X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}$. Veamos que $g|_{[-\delta,\delta]} = (u_1 - u_2)|[-\delta,\delta]$. En efecto, si $\omega_1, \omega_2 \in X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}$ son extensiones de $u_1|_{[-\delta,\delta]}$ y $u_2|_{[-\delta,\delta]}$, respectivamente, entonces, para $t \in [-\delta,\delta]$, teniendo presente la proposición 1:

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= [G_\delta(B(\omega_1,\omega_1))](t) - [G_\delta(B(\omega_2,\omega_2))](t) \\ &= [G_\delta(B(\omega_1+\omega_2,\omega_1-\omega_2))](t) \\ &= [G_\delta(B(\psi(\delta^{-1}\cdot_t)v_2, v_{1\delta}))](t) \\ &= [G_T(B(\psi(\delta^{-1}\cdot_t)v_2, v_{1\delta}))](t) \\ &= g(t) \,. \end{aligned}$$

En consecuencia, de los lemas 2, 5 y 1, para $\beta := \frac{1}{8}\frac{\gamma-\gamma'}{1-\gamma'}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-\delta,\delta]} &\leq \|g\|_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon} \\ &\leq C\|B(\psi(\delta^{-1}\cdot_t)v_2, v_{1\delta})\|_{s_1 s_2 (\gamma'-1)\varepsilon} \\ &\leq C\|\psi(\delta^{-1}\cdot_t)B(v_2, v_{1\delta})\|_{s_1 s_2 (\gamma'-1)\varepsilon} \\ &\leq C\delta^\beta\|B(v_2, v_{1\delta})\|_{s_1 s_2 (\gamma-1)\varepsilon} \\ &\leq C\delta^\beta\|v_2\|_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}\|v_{1\delta}\|_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon} \\ &\leq 4C\delta^\beta\|u_1 + u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-T,T]}\|u_1 - u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-\delta,\delta]} \,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Si tomamos $\delta \in (0,1)$ tal que $4C\delta^\beta\|u_1 + u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-T,T]} < 1$, entonces (3,14) implica que $u_1 \equiv u_2$ en $[-\delta,\delta]$.

Como el tamaño de δ para s_1, s_2, γ, γ' y ε fijos sólo depende de $\|u_1 + u_2\|_{X_{s_1 s_2 \gamma' \varepsilon}[-T,T]}$, iterando este argumento un número finito de veces, podemos concluir que $u_1 \equiv u_2$ en $[-T, T]$.

Referencias

[B1] BOURGAIN, J. *Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, I. Schrödinger Equations*, GAFA **3** (1993), 107-156.

[B2] BOURGAIN, J. *Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, II. The KdV Equations*, GAFA **3** (1993), 209-262.

[B3] BOURGAIN, J. *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili Equation*, GAFA **3** (1993), 315-341.

[IM] ISAZA, P.; MEJÍA, J. *Local and global Cauchy problems for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation in Sobolev spaces of negative indices*, Communications in Partial Differential Equations, **26** (2001), 1027-1054.

[IMS] ISAZA, P.; MEJÍA, J.; STALLBOHM, V. *The Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili Equation in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 0$*, Differential and Integral Equations **14** (2001), 529-557.

[KP] KADOMTSEV, B.B.; PETVIASHVILI, V.I. *On the stability of solitary waves in weakly dispersive media*, Soviet. Phys. Doklad. **15** (1970), 539-543.

[KPV1] KENIG, C.; PONCE, G.; VEGA, L. *A bilinear estimate with applications to the KdV Equations*, JAMS **9** (1996), 573-603.

[KPV2] KENIG, C.; PONCE, G.; VEGA, L. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 527-620.

[TT] TAKAOKA, H.; TZVETKOV, N. *On the local regularity of the Kadomtsev-Petviashvili II equation*, Int. Math. Res. Not., **2** (2001), 77-114.

[Tz] Tzvetkov, N. *Global low regularity solutions for Kadomtsev-Petviashvili equations*, Prepublications Université de Paris-Sud. Mathematiques, Batiment 425, 91405, Orsay-France, **99-08** (1999).

(Recibido en diciembre 2001)

JORGE MEJÍA L., ESCUELA DE MATEMÁTICAS, A.A. 3840
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN
e-mail: jemejia@perseus.unalmed.edu.co