

# Dos ejemplos de introducción de los métodos de simulación Monte Carlo en los primeros cursos de las carreras técnicas

L. M. GARCÍA-RAFFI,  
E. A. SÁNCHEZ-PÉREZ,  
F. MARTÍNEZ GIMÉNEZ

Universidad Politécnica de Valencia, España.

**ABSTRACT.** In this work we present two examples of the use of Monte Carlo simulation techniques for modelling real systems. The introduction of this kind of practices in the first stage of engineering education have the purpose of producing an image of mathematics as a tool of work and analysis in a framework where mathematical concepts have a real support. Our aim is breaking with the traditional isolation between mathematics and the rest of the scientific disciplines, producing a common area of knowledge that could contribute favourably to the learning of students.

*Keywords and phases.* Monte Carlo, Didactics, Engineering statistics, ordinary differential equations.

*1991 AMS Subject Classification.* Primary: 62E25, OOA35. Secondary 62N99.

**RESUMEN.** En este trabajo se presentan dos prácticas de modelización de sistemas reales en los que se introducen las técnicas de simulación Monte Carlo. La introducción de prácticas de modelización en los primeros cursos de Ingeniería obedece al objetivo de ofrecer una imagen de las matemáticas como instrumento de trabajo y análisis donde los conceptos matemáticos han de tener un soporte real y así romper con el aislamiento tradicional de las matemáticas con el resto de las disciplinas científicas ofreciendo al alumno un área común de conocimiento que puede contribuir muy favorablemente al aprendizaje y fijación del mismo como conocimiento duradero.

## 1. Introducción

Es ya bien conocido que el ordenador ha revolucionado la enseñanza de disciplinas como la Física y las Matemáticas en todos los ámbitos de la educación, especialmente el universitario. La aparición de ordenadores personales cada vez más baratos y potentes, hace que esta herramienta se haya introducido de forma masiva rompiendo con la concepción tradicional de la enseñanza de las ciencias básicas.

Hasta ahora, la metodología docente que se ha considerado adecuada es la explicación mediante clases magistrales de un amplio temario en el que el alumno ejerce de sujeto pasivo que debe asimilar las ideas de forma “natural” y mediante el estudio personal de los textos recomendados.

La reforma de los planes de estudio abordada por la Universidad Española en los últimos años, ha supuesto un punto de inflexión en la enseñanza de las matemáticas. Por lo que se refiere al contexto en el que se desarrolla esta experiencia, en la Universidad Politécnica de Valencia, prácticamente todas las escuelas han incorporado en las asignaturas de matemáticas impartidas en los primeros cursos, prácticas con el ordenador. El objetivo no es otro que la reducción de las clases magistrales y su sustitución por sesiones prácticas donde el alumno resuelve ejercicios y problemas con una tecnología que le permite en algunos casos llegar a ver, a experimentar con conceptos teóricos. El desarrollo de los llamados asistentes matemáticos (Derive, Mathematica, Matlab, etc) y en general de la informática que permite al usuario trabajar en un entorno más amigable, ha facilitado enormemente la introducción del ordenador en esta disciplina.

Si bien el campo es novedoso, el trabajo realizado en el mismo es amplio, siendo cada vez más numerosos los textos de matemáticas que incluyen este tipo de prácticas. Los firmantes de este trabajo formamos parte de un grupo de profesores de matemáticas que hemos elaborado este tipo de textos para la docencia en nuestra universidad, pero que consideramos que el ordenador es una herramienta más potente que permite enfoques nuevos dentro de la enseñanza de esta disciplina. El nuestro es un planteamiento que va más allá del anteriormente expuesto. Pensamos que la gran asignatura pendiente en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en las Escuelas Técnicas, es su contextualización dentro del marco del resto de las disciplinas científicas. El marco en el que hemos trabajado se basa en ofrecer una imagen de las matemáticas como instrumento de trabajo y análisis. Los conceptos matemáticos han de tener un soporte real y así romper con el aislamiento tradicional de las matemáticas

con el resto de las disciplinas científicas ofreciendo al alumno un área común de conocimiento, que pensamos puede contribuir muy favorablemente al aprendizaje y fijación del mismo como conocimiento duradero<sup>1</sup>.

La modelización de sistemas “reales” mediante los principios de disciplinas como la física, la mecánica o la química y su expresión a través de ecuaciones y funciones de la matemática establece un nexo de unión entre estas disciplinas que puede ser aprovechado para el desarrollo de las ideas anteriormente expuestas. Además, supone por parte del alumno un trabajo en el que su creatividad a la hora de afrontar tanto las cuestiones relativas al modelo como a su resolución, juega un papel importante aumentando la motivación por el aprendizaje y dominio de los conceptos matemáticos para su correcta aplicación.

## 2. Métodos Monte Carlo

Bajo el nombre de genérico de Métodos Monte Carlo se agrupan un conjunto de técnicas matemáticas que tienen en común la utilización de números generados aleatoriamente para el cálculo de magnitudes. Estas pueden corresponder tanto a fenómenos gobernados por el azar como a fenómenos deterministas que permiten una reformulación en términos estadísticos. Ejemplos del primer caso puede ser la llegada de trabajos a una cola de impresión o la energía depositada por un fotón al atravesar la materia y ejemplos del segundo son el cálculo de integrales o la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En esencia, los métodos Monte Carlo consisten en inventar juegos de azar cuyo comportamiento y resultado puede ser utilizado para estudiar sistemas y fenómenos reales.

La primera referencia documentada sobre la utilización de mecanismos generadores del azar para la obtención de resultados matemáticos data del siglo XVIII. El “Comte de Buffon”<sup>2</sup> en 1777 realizó un experimento consistente en lanzar una aguja de longitud  $L$  sobre un plano pautado con líneas rectas paralelas a distancia  $d > L$  y ver el número de veces que la aguja caía en una posición tal que intersectaba una de las rectas. Laplace sugirió varios años después que dicho experimento podía ser utilizado para el cálculo de la constante  $p$ . Simplemente habría que realizar una serie de lanzamientos y calcular el cociente entre el número de veces que la aguja a cortado una de las rectas, con respecto al número total de lanzamientos. De este cociente y del cálculo de la probabilidad de intersección, podríamos despejar el valor de  $p$ . Este cálculo sería un ejemplo paradigmático del uso de las técnicas Monte Carlo. Otro ejemplo es el del matemático W. S. Gosset<sup>3</sup> (“Student”) que en 1908 utilizó la generación de números aleatorios para estudiar la distribución del coeficiente de correlación. Incluso Lord Kelvin o el propio Enrico Fermi, en la década de los treinta, hicieron cálculos utilizando métodos que hoy catalogaríamos como

métodos Monte Carlo 4.

Pero el nombre de Monte Carlo se debe Ulam y von Neumann que lo utilizaron como palabra clave para su trabajo secreto sobre la difusión de neutrones que realizaron en los Alamos dentro del Proyecto Manhattan para la fabricación de la primera bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial. El nombre venía inspirado por los juegos de azar de los casinos del pequeño principado europeo de Monte Carlo.

En la década de los cuarenta y los cincuenta aparecieron varios trabajos que demostraban el gran interés por estos métodos basados en el uso de números aleatorios para la resolución de problemas relacionados con la mecánica estadística, la modelización de sistemas económicos, el transporte de radiación etc, pero evidentemente no se disponía de la capacidad de computación adecuada. Un ejemplo de este tipo de trabajos lo podemos encontrar en el artículo de R. R. Wilson 5 .En él se aborda un problema de transporte de radiación: la generación de cascadas electromagnéticas por el paso de un electrón o un fotón (cuanto de luz) de alta energía a través de un bloque de plomo. El método utilizado era mecánico y gráfico. El volumen de plomo se había dividido en intervalos y el paso y destino de electrones y fotones en cada intervalo era decidido haciendo girar una peonza con un motor cuya parada presentaba un comportamiento aleatorio.

La llegada de los grandes ordenadores digitales marcó un desarrollo importante en este campo que se ha hecho notar especialmente en la última década con el constante abaratamiento de la capacidad de cálculo. Hoy estas técnicas se aplican a innumerables problemas que abarcan la Física, la Biología, la Informática, las Telecomunicaciones, etc. Las técnicas de simulación Monte Carlo son hoy en día una herramienta indispensable para abordar innumerables problemas.

### **3. Sistemas, modelos, simulación y técnicas Monte Carlo.**

En esta sección vamos a discutir los conceptos de sistema, simulación y técnicas Monte Carlo. Esta discusión se hace necesaria en tanto en cuanto no hay en la literatura un criterio unificado para las mismas. Muchos de los conceptos aquí mostrados se han extraído de Rubinstein 6 .

Por sistema se entiende un conjunto de entidades llamadas componentes o elementos. Por ejemplo una Universidad puede ser considerado un sistema con Profesores alumnos y personal de administración como elementos definitorios. Los elementos tienen asociadas características o atributos que tiene valores lógicos o numéricos bien definidos. En el ejemplo anterior podría ser el número de alumnos, el de profesores, etc. Los elementos interactúan como consecuencia

de un cierto número de relaciones existentes entre ellos que a su vez son el resultado de una serie de actividades. Estas actividades modifican el estado del sistema y producen cambios en él. Por ejemplo, cada número de alumnos tiene asignado un profesor y si no existe este profesor no se produce la actividad “recibir clase”. Podemos definir tanto relaciones internas como externas. Las internas se producen entre los elementos que definen el sistema y las externas entre estos elementos y el medio que les rodea. Por ejemplo, el número de profesores limita el número de estudiantes en una Universidad, lo cual tiene consecuencias sobre la estructura social del área de población donde ésta se encuentra ubicada. El sistema recibe influencias del entorno a través de un “input” o entrada, lo cual produce cambios en el sistema que dan lugar a una respuesta o “output” que a su vez genera un cambio en el entorno.

Los atributos de los elementos de un sistema definen un estado del mismo, por ejemplo el número de alumnos por aula o por profesor. Cuando un alumno abandona o entra en la Universidad, el sistema cambia a un nuevo estado. Cuando el comportamiento del sistema no se puede predecir de forma determinista o exacta, entonces recurrimos a realizar observaciones sobre la probabilidad de que se produzca un cambio en el sistema. Decimos que un sistema está en equilibrio o en un estado estacionario si la probabilidad de que se encuentre en un estado determinado no cambia con el tiempo. Hay acciones que pueden cambiar el sistema de un estado a otro pero la probabilidad es constante.

El primer paso para estudiar un sistema es definir un modelo. Un modelo científico puede ser definido como una abstracción de un sistema real que permite estudiarlo para establecer predicciones sobre su comportamiento y controlarlo. El punto crucial a la hora de construir un modelo de un sistema es definir la función objetivo, que es una función matemática que contiene las variables de decisión. Hay varios tipos de modelo. Churchman et al 7 y Kiviat 8 definen las siguientes clases:

1. Modelos iconográficos que son aquellos que representan aspectos del sistema de forma visual.
2. Modelos analógicos que son aquellos que emplean un conjunto de propiedades para representar otras que el sistema estudiado posee (por ejemplo la corriente eléctrica que fluye por un cable para representar el flujo de agua que pasa por una tubería).
3. Modelos simbólicos que son aquellos que requieren operaciones matemáticas y lógicas para formular soluciones a problemas relacionados con el comportamiento del sistema

En este artículo nos vamos a referir a estos últimos.

Naylor 9 define la simulación como una técnica numérica para realizar experimentos en un ordenador digital, que implica ciertos tipos de modelos lógicos

y matemáticos que describen el comportamiento de los sistemas sobre un cierto periodo de tiempo. Así pues la simulación permite establecer a priori la eficiencia que tendrán determinados sistemas. Hoy por hoy, resulta una herramienta indispensable en la realización de cualquier montaje tecnológico. Mediante la simulación se puede, a través del establecimiento de un modelo del sistema, comparar diferentes configuraciones del mismo o ver que efecto tiene cualquier modificación sobre su rendimiento sin necesidad de construir cada vez un nuevo sistema o prototipo, cosa que por otra parte, en general, es obvio que es económicamente inviable en la mayoría de los casos. La simulación no requiere que el modelo presente una forma particular, lo cual permite una gran libertad siempre y cuando este clara la correspondencia entre el sistema estudiado y su modelización así como los límites de la misma.

Hay una serie de elementos que caracterizan un programa de simulación Monte Carlo<sup>4</sup> :

- · Un declaración clara de los elementos que componen el sistema que va a ser simulado.
- · Las funciones de distribución de probabilidad de las variables que involucra el cálculo, deben estar perfectamente identificadas y explícitamente definidas.
- · Se deben establecer los métodos para “muestrear“ (sampling), todas estas funciones de distribución.
- · Por último se debe ser capaz de interpretar la información obtenida por la simulación.

En las técnicas matemáticas de simulación con métodos Monte Carlo, se introduce un modelo de un sistema inherentemente estocástico, o sea descrito por variables aleatorias gobernadas según ciertas funciones de distribución y se lleva a cabo un muestreo de las mismas a través de la generación de números aleatorios. Por números aleatorios (“random number“) se entiende en la literatura 6 números distribuidos uniformemente, o sea, según la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Inicialmente se usaron métodos manuales para generar estos números como el lanzamiento de dados o más sofisticados como el que hemos descrito en el trabajo de R.R. Wilson<sup>5</sup>. Se pensaba que sólo los métodos mecánicos daban como resultado números verdaderamente aleatorios. Estos métodos, además de lentos, adolecen de la posibilidad de repetir la misma secuencia aleatoria, lo cual tiene importancia a la hora de su uso en simulación. La aparición de los ordenadores digitales abrió la puerta de la generación de este tipo de números. Un método consiste en preparar una tabla con estos números y almacenarlos en la memoria del ordenador. En 1955<sup>6</sup> la “RAND corporation“

publicó una tabla con un millón de dígitos aleatorios para construir este tipo de tablas. Estos métodos gozan de la característica de reproductibilidad, pero son lentos en velocidad y se corre el riesgo de agotar la tabla. Actualmente, estas tablas se construyen a partir de procesos físicos con comportamiento intrínsecamente aleatorio como los procesos cuánticos o fenómenos caóticos (desintegración radiactiva, fuentes de ruido térmico, la radiación cósmica, etc). Pero casi todos los generadores que se pueden encontrar en los compiladores de lenguajes como FORTRAN, C, etc, corresponden a lo que se llama números pseudoaleatorios. Se trata de números no auténticamente aleatorios pero que se comportan como si lo fueran. Son secuencias de números, con un cierto periodo de repetición, que pueden ser generados en un ordenador. Se dice que los números generados de esta forma son “buenos“ si están distribuidos uniformemente, son estadísticamente independientes y reproducibles. Además el método de generación debe ser rápido y requerir poca memoria 6. Todos estos requisitos son difíciles de conseguir y se debe llegar a un compromiso. Los generadores más usados en la actualidad son los congruentes, donde se utiliza una fórmula recursiva del tipo:

$$x_{i+1} = (\lambda x_i + \mu) [\text{mod} p] \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador,  $m$  es el incremento,  $p$  es un entero positivo y  $[\text{mod} p]$  significa que:

$$x_{i+1} = \lambda x_i + \mu - pk_i$$

con:

$$k_i = \left[ \frac{\lambda x_i + \mu}{p} \right]$$

representando el paréntesis cuadrado en este caso, la parte entera. Los números aleatorios en el intervalo  $[0, 1)$  se obtienen directamente de:

$$u_i = \frac{x_i}{p}$$

Para iniciar la secuencia, se da un valor inicial  $x_0$  llamado semilla. Un generador de este tipo dará una secuencia que se repetirá cada  $p$  pasos y por supuesto será periódica. Un “mal ejemplo“ de este tipo de generadores sería el dado por  $x_0 = 2$ ,  $\lambda = 3$ ,  $m = 1$ ,  $p = 24$ . Con estos valores generaríamos la secuencia 2, 7, 6, 3, 10, 15, 14, 11, 2 de nuevo, o sea, su periodo será  $T = 8$ . El periodo desde luego no puede exceder el valor  $p$  (ya que  $x_i < p$ ) pero como acabamos de ver puede ser mucho más corto, si no se eligen bien los parámetros. Cuando  $T = p$  decimos que el generador es de periodo completo

Ya hemos visto como generar números aleatorios, pero ¿cómo podemos, a partir de aquí, generar valores de una variable aleatoria  $X$ , según una función de probabilidad acumulativa cualquiera?. Hay tres métodos básicos: el de la transformación inversa, composición y aceptación-rechazo. Vamos aquí a dar el primero de ellos por ser el más ilustrativo. Referencias de todos ellos se pueden encontrar en Rubinstein [6] y Kalos [4]. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de probabilidad acumulativa  $F_X(x)$ . Por ser ésta una función monótona creciente, podemos definir la función inversa  $F_X^{-1}(y)$  de la siguiente forma:

$$F_X^{-1}(y) = \inf \{x : F_X(x) \geq y\}$$

Sea  $U$  un número aleatorio distribuido uniformemente en  $[0, 1)$ . Entonces:

$$x = F_X^{-1}(U)$$

es una variable aleatoria que se distribuye según  $F_X(x)$ . Gráficamente:

Figura 1

Esto se puede probar fácilmente sin más que calcular:

$$P(X \leq x) = P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x)$$

Este método tiene el inconveniente de que debe ser posible calcular de forma analítica dicha función inversa, pero existen varias distribuciones para las cuales es posible como el caso de la exponencial o la de Cauchy.



A continuación presentamos dos ejemplos de prácticas de modelización en donde, de forma sencilla, utilizando las técnicas de simulación Monte Carlo, se puede predecir el comportamiento de sistemas. Los conceptos matemáticos involucrados en las mismas son la generación de números aleatorios y de valores de variables aleatorias según ciertas funciones de distribución así como también, en el último apartado, la resolución numérica de ecuaciones diferenciales muy sencillas.

#### 4. Empaquetado de naranjas.

El problema que se pretende modelizar es el de una batería de básculas que se encuentra cada una de ellas situada al final de una cinta transportadora por donde circulan naranjas clasificadas como pertenecientes a un determinado calibre (250 g) y que deben ser empaquetadas en bolsas de 2.5 Kg. El objetivo es, dado un conjunto de básculas, determinar el número de bolsas que somos capaces de formar con un cierto número fijo de pesadas. Vamos a ver como este problema admite una modelización en términos de funciones de distribución de probabilidad habituales y que la simulación Monte Carlo nos da una estimación de la solución a través del estudio de la eficiencia del sistema y de los parámetros que lo gobiernan.

Supongamos que queremos lanzar al mercado bolsas de 2.5 Kg con naranjas del calibre 250 g. Instalamos por ejemplo una batería de diez básculas, cada una al final de una cinta transportadora de pesado. Cada báscula tendrá una cierta precisión . Cuando se produzca una pesada de una naranja de por ejemplo 250 g exactos, la báscula nos dará una lectura que unas veces será 253 g, otras 247, o 251 g, o sea,  $P_i = 250 + \sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  donde  $\sigma_i$  hace referencia a un cierto error que tomaremos como Gaussiano. Es decir, la función densidad de probabilidad que gobierna el proceso de pesado es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2 \sigma^2}\right)$$

donde  $\mu$  es la media y  $\sigma^2$  es la varianza. Esto nos plantea pues un problema, ya que cuando 10 naranjas lleguen simultáneamente a sus respectivas básculas, puede que la suma de sus pesos supere los 2.5 Kg. Evidentemente nosotros no aspiramos a que las bolsas pesen exactamente 2.5 Kg sino que aceptamos una cierta tolerancia. Esta idea se puede expresar fácilmente a través de la desigualdad:

$$\frac{|P_{tot} - 2,5|}{2,5} < R$$

Ese R % no puede suponer que la bolsa pese mucho menos ya que las asociaciones de consumidores consideraría que se estafa a los clientes pero tampoco puede suponer que pese mucho más que la cantidad fijada ya que, si bien en una bolsa ese peso de más no supone una gran pérdida, cuando se está pensando en despachar miles de bolsas, si siempre actuamos por exceso, el negocio podría resultar poco lucrativo o ruinoso.

Fijémonos que en el problema, tal y como lo hemos planteado, las naranjas pesan una cantidad fija, 250 g. (ya que todas son del mismo calibre); Es esto real? La respuesta es no. En el origen del problema, está la clasificación de las naranjas según su calibre lo que equivale a decir según su volumen. Conocida la densidad de las naranjas la relación entre el calibre y el peso es lineal. Pero lo cierto es que, aunque la medida del volumen sea muy precisa, se tendrá que agrupar juntas a todas aquellas naranjas de un calibre parecido, o sea, dentro del calibre 250 g, habrá naranjas cuyo peso oscilará en torno a este valor. Esto, dentro de las aproximaciones matemáticas al problema que estamos planteando, supone que los pesos de las naranjas que entran en la báscula tendrán una cierta distribución como consecuencia del proceso de clasificación en diferentes calibres y no será un valor exacto. En resumen, por las cintas de pesado llegan a las 10 básculas naranjas cuyo peso varía según una cierta distribución, que caen sobre los platos de las básculas que marcan sus pesos con un cierta precisión y cuya suma no puede superar la cantidad de 2,5 Kg. siendo R la tolerancia del proceso.

Primero debemos definir lo que entendemos por la eficiencia del sistema, que tomaremos como el número total de bolsas formadas con respecto a un número de pesadas fijo, por ejemplo cien mil ( por pesada entendemos un conjunto de 10 medidas simultáneas). Las básculas, como ya hemos comentado las modelizaremos como gaussianas con una desviación estándar  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Para las naranjas que entran en nuestra batería de básculas vamos a suponer tres modelos diferentes:

- · Naranjas de peso fijo 250 g,
- · Naranjas distribuidas uniformemente en el intervalo [200,300]
- · Naranjas distribuidas gaussianamente con media  $m = 250$  g y  $s = 50$  g.

Por simplicidad supondremos que todas las básculas tienen la misma precisión y tomaremos  $\sigma_i = 25$  g  $i = 1, \dots, 10$ . Con esta modelización de nuestro sistema real, vamos a continuación a realizar un estudio de la eficiencia en función de los diversos parámetros del modelo.

Se obtienen números distribuidos gaussianamente mediante la transformación

(Box y Muller 10):

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

donde  $U_1$  y  $U_2$  son dos variables aleatorias distribuidos uniformemente en  $[0, 1)$  y  $Z_1$  y  $Z_2$  son dos variables aleatorias independientes distribuidas gaussianamente con  $m=0$  y  $s=1$ . Con esta herramienta y con un generador de números aleatorios estamos en condiciones de realizar un programa para el estudio de nuestro sistema.

En la figura 2 vemos la generación de las naranjas que van a entrar en nuestras básculas según los tres modelos descritos anteriormente donde el pico para el caso de las naranjas de peso fijo o caso “monocromático” se ha cortado por razones de escala para representar las tres figuras juntas.

Figura 2

A continuación, una vez disponemos de una naranja de calibre o “peso real”

$P_i^*$  distribuido según uno de estos modelos, procedemos a su pesado en la báscula correspondiente, proceso que en nuestra simulación corresponde al sorteo de un número gaussiano con media  $P_i^*$  y  $\sigma = 25$ . La distribución de pesos dados por la báscula número uno para estos tres modelos se muestra en la figura 3 donde podemos observar tres picos, el más estrecho correspondiente al modelo “monocromático” (todas las naranjas del mismo peso exacto  $P_i^* = 250.g$ ) y el más ancho al modelo gaussiano. Con estas distribuciones de pesos son con las que formaremos las bolsas de 2,5 Kg. Los resultados obtenidos para la

eficiencia (número de bolsas formadas) en función de la tolerancia en el peso final para cada uno de los modelos descritos se puede ver en la figura 4.

Evidentemente, una aproximación más realista al problema hubiera sido contar con la distribución verdadera de las naranjas que entran en nuestras básculas. Esta información podría ser obtenida del proceso de catalogación de las mismas por calibre, como ya comentamos al principio de esta sección. En cualquier caso, vemos que las diferentes modelizaciones de nuestro problema tienen una influencia determinante en el cálculo de la eficiencia de empaquetado ya que si bien todos ellos coinciden tanto si abrimos la tolerancia como si la cerramos totalmente (comportamientos extrapolados) si que existen diferencias en la franja entre el 1 % y el 15 %.

Aunque ninguno de los tres modelos propuestos (monocromático, uniforme y gaussiano), corresponde a la realidad cabe esperar que la eficiencia del sistema sea una curva que está comprendida entre estas tres. La práctica permite en este punto enlazar por ejemplo con modelos que den cuenta de la producción de árboles frutales y la distribución en peso de los frutos. También, el caso monocromático nos permitiría estudiar la evolución de la eficiencia del sistema en el caso de que una o varias de las básculas comenzasen a dar lecturas anómalas, etc.

Figura 3

Figura 4

### 5. Pulsos eléctricos con ruido.

En este apartado vamos a ver una aplicación de los métodos Monte Carlo en el caso de pulsos eléctricos que está afectados de ruido. Utilizaremos dos tipos de circuitos muy simples como son el caso e los circuitos Pasa-baja y Pasa-alta que se describirán a continuación y el ruido eléctrico lo modelizaremos utilizando números distribuido uniformemente en  $[0,1)$ . La señal de entrada con la trabajaremos será una señal tipo pulso cuadrado que puede modelizar la señal que da cualquier tipo de sensor o detector.

Un circuito Pasa-baja o integrador RC está formado por una resistencia y un condensador dispuestos de la forma que se indica en la Figura 5.

Si llamamos  $V_{in}$  al potencial o señal de entrada y  $V_{out}$  al potencial o señal de salida, aplicando la ley de Ohm tenemos que :

$$V_{in} = i R + V_{out}$$

donde  $i$  es la intensidad y  $R$  es la resistencia. Es inmediato que:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_{out}}{dt}$$

donde  $C$  es la capacidad del condensador y  $Q$  la carga. Por lo tanto la primera ecuación quedará sencillamente:

Figura 5

$$\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{1}{\tau} V_{out} = \frac{1}{\tau} V_{in}$$

donde  $\tau = RC$  y es un periodo, ya que tiene dimensiones de tiempo y por lo tanto su inversa es una frecuencia. El comportamiento de un circuito como éste frente a una señal tipo escalón:

$$V_{in} = \begin{cases} 0. & t < 0 \\ 100. & t \geq 0 \end{cases}$$

se ilustra en la figura 6 donde se ha tomado  $\tau = RC = 1 s$ , en el eje  $OX$  el tiempo viene expresado en segundos y en el eje  $OY$  el voltaje viene expresado en mV:

Figura 6

O sea, la señal de salida es de la forma:

$$V_{out} = V_{in} \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

Un circuito Pasa-alta o diferenciador CR está formado por una resistencia y un condensador dispuestos de la forma que se indica en la Figura 7

Figura 7

Es inmediato ver que:

$$V_{in} = \frac{Q}{C} + V_{out}$$

Si derivamos esta ecuación con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} + \frac{dV_{out}}{dt}$$

Teniendo en cuenta que  $i = \frac{dQ}{dt}$  y que  $V_{out} = iR$  se obtiene de forma inmediata que:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = \frac{1}{RC} V_{out} + \frac{dV_{out}}{dt}$$

El comportamiento de un circuito como el descrito frente a una señal tipo escalón:

$$V_{in} = \begin{cases} 0. & t < 0 \\ 100. & t \geq 0 \end{cases}$$

se muestra en la figura 8 donde se ha tomado  $\tau = RC = 10 \text{ s}$  :

Figura 8

O sea, la señal de salida es de la forma:

$$V_{out} = V_{in} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cuál es el comportamiento del circuito Pasa-baja si la señal tipo escalón viene afectada de ruido de una decena de milivolts? Para tratar el problema del ruido lo que hacemos es resolver la ecuación diferencial de forma numérica siguiendo, por ejemplo, un esquema de diferencias finitas en donde la función potencial de entrada  $V_{in}$  se sustituye por un vector en el cual el valor del potencial escalón, que nominalmente es de  $100 \text{ mV}$  , viene afectado por una cantidad aleatoria no superior a  $10 \text{ mV}$  . El resultado se ilustra en la figura 9:

Figura 9

Vamos ahora a analizar el caso de un pulso también interesante desde el



punto de vista práctico como es el caso de un pulso gaussiano. El comportamiento de este circuito viene reflejado en la figura 10:

Figura 10

donde se ha representado tanto el pulso de entrada como el de salida el cual es más ancho y presenta un retardo respecto al primero. Qué ocurre si el pulso gaussiano está afectado de ruido? En la figura 11 y la figura 12 se presenta el resultado para oscilaciones de la señal de entrada (ruido) de 10 y 50mV:

Figura 11

Podemos observar que el comportamiento del circuito es el de dar a la señal

### Figura 12

de salida una forma “agradable” para otros circuitos electrónicos como amplificadores de señal, etc.

Respecto al circuito Pasa-alta o diferenciador CR, si introducimos un pulso gaussiano, el comportamiento del circuito para  $\tau = RC = 0.1$  s se muestra en la figura 13:

### Figura 13

O sea, la señal de salida pasa por cero justo cuando el pulso de entrada alcanza

su máximo. Esta información es importante por ejemplo cuando estamos trabajando con sensores o detectores de partículas. Cómo afecta a la señal de salida el hecho de que la señal de entrada tenga ruido de amplitud 10 mV? El comportamiento del circuito se ilustra en la figura 14:

Figura 14

Podemos observar que la información del instante en que la señal de entrada alcanza el máximo se ve claramente deteriorada por la existencia de dicho ruido.

Pero el comportamiento más interesante corresponde al caso en que acoplamos dos circuitos, uno CR y otro RC. La respuesta de este circuito combinado para una señal de entrada tipo escalón de 100. MV viene representada en la figura 15 donde se ha tomado

$\tau_1 = RC = 0.1 s$  para la etapa CR y  $\tau_2 = RC = 0.01 s$  para la etapa RC:

Figura 15

Vemos que la combinación cambia el perfil de la señal de entrada que pasa de tener forma de escalón a tener forma de pulso. De hecho la señal de salida vale:

$$V_{out} = \frac{V_{in} \tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)} \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right)$$

En el caso de que se tomen constantes de tiempo iguales para los dos circuitos, tenemos el comportamiento que se muestra en la figura 16:

Figura 16

siendo la señal de salida:

$$V_{out} = \frac{V_{in} t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Qué ocurre si la señal escalón de entrada está afectada de un ruido de 10. MV?

El resultado se expresa en la figura 17:

Figura 17

Vemos que el ruido no afecta a la forma de la señal pero si en la cola o restablecimiento del cero, en donde la señal de salida presenta un cierto rizado.

En este trabajo hemos presentado dos ejemplos que corresponden a ámbitos de la ingeniería muy diversos, fácilmente realizables utilizando un asistente matemático avanzado (Mathematica, Matlab,...), o bien un programa simple en cualquier lenguaje de programación, (Fortran, Pascal, Basic,...) y que introduce a los estudiantes en las técnicas Monte Carlo desde la perspectiva de la simulación de sistemas “reales”. La simulación ha jugado un papel esencial en muchas ramas de la ciencia y la técnica, pero esta todavía ausente de los curricula de nuestras Facultades y Escuelas Técnicas Superiores, sobre todo en los primeros cursos. Aquí se presentan dos casos simples en donde se predice el comportamiento de un sistema, a priori, mediante una modelización del mismo.

## Referencias

1. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3<sup>rd</sup>-Edition, McGraw-Hill, 1979.
2. E.A. Sánchez-Pérez,, L. M. García-Raffi, J.V. Sánchez- Pérez, *Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la Física y las Matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas, Enseñanza de las Ciencias* (en imprenta)..
3. G. Comte de Buffon, *Essai d'arithmétique morale , Supplément àl Histoire Naturelle*, Vol. 4, 1977.
4. Student, *Probable error of a correlation coeficient.*, *Biometrika*, 6, 302, 1908..
5. M. H. Kalos, P.A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*. Volume I: Basics. John Wiley and Sons, New York 1986.
6. R. R. Wilson, *Monte Carlo study of Shower Production*, *Phys. Rev.*, Vol. 86, No. 3, 1952.
7. R. Y. Rubinstein, *Simulation and The Monte Carlo Method*, John Wiley and Sons, New York 1981.
8. C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research Wiley*, New york 1956..
9. P. J. Kiviat, *Digital Computer Sinulation: Modeling Concepts*, Report RM-5378, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1967..
10. T. J. Naylor J. L. Balinfy, D. S. Burdick, K. Chu, *Computer Simulation Techniques*, Wiley, New York 1966.

11. G. E. P. Box, M. E. Muller, *A note on the generation of random normal deviates*, Ann. Math. Stat., 29, 1958, 610-611..

(Recibido en enero de 1999, revisado en febrero de 1999)

L. M. GARCÍA, E. A. SÁNCHEZ, F. MARTÍNEZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA  
ESPAÑA.