Lecturas Matemáticas
Volumen **18** *(1997), páginas 117-121*

Retículos distributivos simétricos libres

HERNANDO GAITÁN
Universidad de los Andes, VENEZUELA

ABSTRACT. In this note a description is given of the free symmetric distributive lattices in terms of the free bounded distributive lattices. As a byproduct, coproducts of such lattices are described.

Keywords and phrases. Distributive lattice, free algebra, coproduct, involutive automorphim.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 06D99. Secondary 08A35.

RESUMEN. En esta nota se da una descripción de los retículos distributivos simétricos libres en términos de retículos distributivos libres. De paso, se describen los coproductos de dichos retículos.

1. Introducción

Recientemente S. A. Celani en [4] introduce los retículos distributivos simétricos. Ellos aparecen en forma natural cuando la operación de complementación es desechada de las álgebras de Boole involutivas (tambien llamadas simétricas). Estas últimas fueron consideradas previamente en [1, 2, 7, 8]. En el trabajo mencionado al comienzo se da una representación concreta de los generadores de un retículo distributivo simétrico libre. En realidad, este es un caso particular de la situación más general descrita en [5] (ver también [6]) donde se da una representación concreta de los generadores del álgebra libre en una variedad generada por un número finito de sus álgebras finitas. Los retículos distributivos simétricos son retículos distributivos acotados (e.d., con máximo y mínimo como operaciones sin argumentos) dotados con un automorfismo involutivo; esto es, una función biyectiva del retículo en si mismo que preserva las operaciones de retículo acotado y cuya función inversa es ella misma, como una operación adicional en un argumento. Si en vez de un automorfismo involutivo el retículo esta dotado de un automorfismo dual (e.d. una aplicación biyectiva que invierte el orden) involutivo como operación adicional, se esta en presencia de una álgebra de Morgan. El propósito de esta corta nota es mostrar como las técnicas usadas por J. Berman y Ph. Dwinger para describir las álgebras de Morgan libres (ver [3]) pueden ser adaptadas para describir los retículos distributivos simétricos libres.

2. Coproductos

Siguiendo la notación de [4], se denota con $\mathbf{S}$ la variedad de los retículos distributivos simétricos y con $\mathbf{D}$ la variedad de los retículos distributivos acotados. Un elemento de $\mathbf{S}$ es un algebra $\langle L; \vee, \wedge, T, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ donde $\langle L; \vee, \wedge, 0, 1\rangle \in \mathbf{D}$ y T es un $\mathbf{D}$-automorfismo de L (e.d., T preserva las operaciones de $\mathbf{D}$) tal que $T^2(x) = 3Dx$. Se denotará con L^* el miembro de $\mathbf{D}$ que se obtiene de $L \in \mathbf{S}$ al desechar la operación T; en otras palabras, L^* es el $\mathbf{D}$-reducto de $L \in \mathbf{S}$. Para las nociones básicas sobre retículos distributivos y álgebra universal, el lector puede consultar [3].

Teorema 1. *Sea $\{L_i : i \in I\}$ una familia de miembros de $\mathbf{S}$. Entonces existe un único automorfismo involutivo de $\coprod_{i\in I} L_i^*$ (el coproducto de la familia $\{L_i^* : i \in I\}$ en $\mathbf{D}$) que lo transforma en un miembro de $\mathbf{S}$. Dicho miembro de $\mathbf{S}$ resulta ser el coproducto de la familia $\{L_i : i \in I\}$ en $\mathbf{S}$.*

Demostración. Para cada $j \in I$, denótese con T_j el automorfismo involutivo de L_j. Como L_j^* es una $\mathbf{D}$-subalgebra de $\coprod_{i\in I} L_i^*$, T_j puede ser considerado como un $\mathbf{D}$-homomorfismo de L_j^* en $\coprod_{i\in I} L_i^*$. Como $\coprod_{i\in I} L_i^*$ es un $\mathbf{D}$-coproducto de los L_i^*, existe un $\mathbf{D}$-homomorfismo $T : \coprod_{i\in I} L_i^* \longrightarrow \coprod_{i\in I} L_i^*$ tal que

$$T(x_i) = 3DT_i(x_i) \quad \forall i \in I, \quad \forall x_i \in L_i.$$

Es claro que

$$T^2(x_i) = 3DT_i^2(x_i) = 3Dx_i \quad \forall i \in I, \quad \forall x_i \in L_i.$$

Sea $y \in \coprod_{i\in I} L_i^*$. Entonces

$$y = 3D \bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge A_k)$$

donde $n \geq 1$ y para cada $1 \leq k \leq n$, A_k es un subconjunto finito de $\cup_{i \in I} L_i$. Como T preserva las operaciones $\vee, \wedge$, se tiene que $T(y) = 3D \vee_{k=3D1}^{n} (\wedge T(A_k))$ donde $T(A_k) = 3D\{T(x) : x \in A_k\}$. Se verifica entonces facilmente que $T^2(y) = 3Dy$. Esto prueba que T es un automorfismo involutivo de $\coprod_{i \in I} L_i^*$ y por tanto, este retículo junto con T, se constituyen en un miembro de $\mathbf{S}$. Denótese dicho miembro de $\mathbf{S}$ con L. Para probar que L es un coproducto de la familia $\{L_i : i \in I\}$ en $\mathbf{S}$, es suficiente verificar que si $f_i : L_i \longrightarrow L'$ es una familia de $\mathbf{S}$-homomorfismos (e.d., $L' \in \mathbf{S}$ y $f_i(T_i(x)) = 3DT'(f_i(x))$ para todo $x \in L_i$, donde T' es el automorfismo involutivo de L') entonces existe un $\mathbf{S}$-homomorfismo $f : L \longrightarrow L'$ tal que para cada $i \in I$, $f_i(x) = 3Df(x)$ siempre que $x \in L_i$. Como L^* es un $\mathbf{D}$-coproducto de los L_i^*, existe un $\mathbf{D}$-homomorfismo $f : L^* \longrightarrow {L'}^*$ tal que para cada $i \in I$, $f_i(x) = 3Df(x)$ siempre que $x \in L_i$. Se probará ahora que f es un $\mathbf{S}$-homomorfismo; esto es, se probará que para todo $y \in L$, $f(T(y)) = 3DT'(f(y))$. Para esto, sea $y = 3D \bigvee_{k=3D1}^{n} (\wedge A_k)$ como antes. Es claro que $f(y) = 3D \bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge f(A_k))$. Entonces

$$
\begin{aligned}
T'(f(y)) &= 3D \quad T'(\bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge f(A_k)) \\
&= 3D \quad \bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge T'(f(A_k))) \\
&= 3D \quad \bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge f(T(A_k))) \\
&= 3D \quad f(T(\bigvee_{k=3D1}^{n} (\bigwedge f(A_k))) = 3Df(T(y)).
\end{aligned}
$$

Asi concluye la prueba del teorema. ☑

3. Retículos libres

Denótese con $F_{\mathbf{V}}(X)$ el algebra libre sobre una variedad $\mathbf{V}$ con un conjunto X de generadores libres. Se sabe que $\mathbf{S}$ es generada por $\mathbf{4} = 3D\{0, a, b, 1\}$ donde a y b no son comparables y $T(a) = 3Db$. Por otro lado, $\mathbf{D}$ esta generada por la cadena $\mathbf{2} = 3D\{0, 1\}$.

Entonces (ver [5,6]), $F_{\mathbf{S}}(1)$ es la subalgebra de $\mathbf{4}^4$ generada por $x = 3D(0, a, b, 1)$ y $F_{\mathbf{D}}(2)$ es la subalgebra de $\mathbf{2}^{2^2}$ generada por $y = 3D(0, 0, 1, 1)$ y $z = 3D(0, 1, 0, 1)$. Estas algebras (ver la figura) son $\mathbf{D}$-isomorfas.

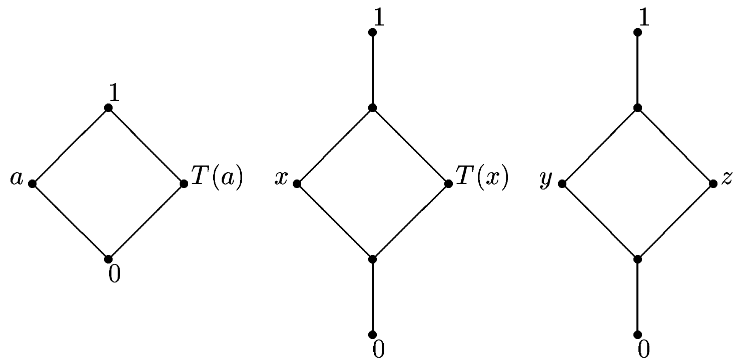

FIGURA 1. Los retículos **4**, $F_{\mathbf{S}}(1)$ y $F_{\mathbf{D}}(2)$.

Recúerdese que, en general, $F_{\mathbf{V}}(X)$ es isomorfa al **V**-coproducto de X copias de $F_{\mathbf{V}}(1)$. Ver [3, I.20, Theorem 11]. En consecuencia se tiene el siguiente

Teorema 2. *$F_{\mathbf{S}}(X)$ y $F_{\mathbf{D}}(2X)$ son* **D**-*isomorfos (isomorfos como retículos distributivos acotados) donde $2X$ representa la union disjunta de dos copias de X.*

De este teorema y [3, XI.5 Theorem 3] se sigue el siguiente.

Corolario $F_{\mathbf{S}}(X)$ y $F_{\mathbf{M}}(X)$ son **D**-isomorfos. **M** representa la variedad de las algebras de Morgan.

Referencias

1. M. ABAD & L. MONTEIRO, *Free Symmetric Boolean alalgebras*, Revista de la Union Mat. Argentina **27** (1976), 207-215.
2. M. ABAD Y L. MONTEIRO, *Number of ephimorphisms between finite Symmetric Boolean algebras*, Reports on Math. Logic **10** (1978), 3-7.
3. R. BALBES AND P. DWINGER, *Distributive lattices.*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

4. S. A. CELANI, *Retículos distributivos simétricos*, Lecturas Matemáticas **17**(1996), 107-119
5. H. GAITÁN, *Generadores de algebras universales libres*, Divulgaciones Matemáticas, por aparecer.
6. H. GAITÁN, *Free algebras in certain varieties of pseudo-complemented de Morgan algebras*, Math. Logic Quaterly, por aparecer.
7. G. MOISIL, *Algebra Schemelor cu element ventil*, Rev. Universitatii "C.I. Parhon" Si a Politehnicii Bucaresti **4-5** (1954), 9-15.
8. G. MOISIL, *Essais sur les loguiques non chrysippiennes*, Editions de L'Academie de la Republique Socialiste Roumaine, Bucarest (1972), 694-698.

(Recibido en agosto de 1996; revisado en febrero de 1998)

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DPTO. DE MATEMÁTICAS, FAC. DE CIENCIAS
MERIDA , 5101, VENESUELA
e-mail: gaitan@ciens.ula.ve