Lecturas Matemáticas
Volumen **18** *(1997), páginas 23–41*

Cuantización no estandar del grupo triangular $ST(2)$

Berenice Guerrero

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. The special features of the triangular group $ST(2)$ allow for its quantization by non-canonical deformations of its function algebra. For this purpose a non-standard solution of the classical Yang-Baxter equation is determined which allows for such deformation to be carried out by means of the Poisson bracket it induces.

Key words and phrases. Lie group, Lie algebra, bialgebra, Hopf-Poisson algebra, r-matrix, Yang-Baxter equation, quantum group

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 17B37. Secondary 16W30, 17B66

Resumen. Las características especiales del grupo triangular $ST(2)$ permiten una cuantización por deformación no canónica del álgebra de funciones. Con ese fin se determina una solución no estandar de la ecuación de Yang-Baxter clásica y se deforma el álgebra de funciones usando el corchete de Poisson generado por tal solución.

Trabajo realizado dentro de proyecto de investigación Grupos Cuánticos Triangulares, financiado parcialmente por el CINDEC y por COLCIENCIAS .

0. Introducción

La existencia de una cuantización de un grupo de Lie G implica la existencia de una estructura de biálgebra de Lie sobre su álgebra de Lie $\mathcal{G}$ (ver [2], [10]). Un elemento $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ define una estructura de biálgebra de Lie si y sólo si la parte simétrica de r es un elemento $\mathcal{G}$-invariante de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ y $\langle\langle r, r\rangle\rangle$ definido por

$$\langle\langle r, r\rangle\rangle := \langle r_{12}, r_{23}\rangle + \langle r_{12}, r_{13}\rangle + \langle r_{13}, r_{23}\rangle \tag{0.1}$$

(donde el corchete de la derecha es el inducido por el de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$) es un elemento $\mathcal{G}$-invariante de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ (ver [9]). La primera condición se satisface obviamente si r es antisimétrico, y la segunda si r satisface en particular la ecuación de Yang-Baxter clásica $\langle\langle r, r\rangle\rangle = 0$.

Construir una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica es equivalente a encontrar un par $(\mathcal{G}_0, w)$ tal que $\mathcal{G}_0$ es una subálgebra de $\mathcal{G}$ y w es un 2-cociclo no degenerado sobre $\mathcal{G}_0$; es decir, es equivalente a encontrar una subálgebra quasi-Frobenius de $\mathcal{G}$ (ver [1]). Por la Proposición 3.1.6 de [1] se sabe que si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, existe una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica con valores en $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ asociada a toda subálgebra de Lie quasi-Frobenius de $\mathcal{G}$.

Puesto que el álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$ del grupo triangular $ST(2)$ es de Frobenius (ver [1], pág. 85), existe una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica con valores en $\mathcal{ST}(2) \otimes \mathcal{ST}(2)$ que induce la estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathcal{ST}(2)$.

Dado el grupo de Lie $ST(2)$, demostraremos que el tensor antisimétrico $r = X_1 \bigwedge X_2 := X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1$, donde $\{X_1, X_2\}$ es una base del álgebra de Lie, es una solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica con valores en $\mathcal{ST}(2) \otimes \mathcal{ST}(2)$. Construiremos la estructura de Hopf-Poisson determinada por r en el álgebra de funciones sobre el grupo $ST(2)$, y demostraremos que el corchete de Poisson definido por r determina una cuantización del espacio de funciones.

1. Estructura de $ST(2)$

1.1 Algebras relacionadas con el grupo $ST(2)$.

Definición 1.1. El grupo $ST(2)$ es el grupo de las matrices de orden 2 con determinante uno y entradas g_{ij} tales que $g_{ij} = 0$ para $1 \leq j < i \leq 2$, $1 \leq i, j \leq 2$, con el producto μ

$$\mu : ST(2) \times ST(2) \to ST(2), \qquad \mu(g, g') = gg', \qquad g, g' \in ST(2). \tag{1.1}$$

Claramente $ST(2)$ es un grupo de Lie (ver [7]) que actua transitivamente sobre el espacio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, así que $ST(2)$ puede también considerarse como el grupo de Lie de transformaciones generado por las aplicaciones

$$\begin{aligned}\phi_1(a,b,c,x,y) &= ax + by \\ \phi_2(a,b,c,x,y) &= cy\end{aligned} \tag{1.2}$$

con $ac = 1$, $a = g_{11}$, $b = g_{12}$, $c = g_{22}$, siendo entonces los g_{ij} los parámetros del grupo y $(x,y) \neq (0,0)$ sus coordenadas.

Como grupo de Lie, $ST(2)$ tiene por lo menos cuatro estructuras algebraicas relacionadas: su álgebra de Lie, que podemos identificar con el álgebra generada por los campos invariantes a izquierda; el álgebra $C^\infty(ST(2))$ de las funciones diferenciables de $ST(2)$ en $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; el álgebra tensorial del álgebra de funciones; y finalmente el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{ST}(2))$ del álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$. Nos referiremos aquí a las tres primeras.

Definición 1.2. El álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$ del grupo $ST(2)$ es el álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores de orden dos con traza nula y con la estructura de Lie dada por el conmutador de matrices.

Como álgebra de Lie de un grupo de Lie de transformaciones, $\mathcal{ST}(2)$ es isomorfa al álgebra de Lie de las transformaciones infinitesimales del grupo (ver [7]); es decir, $\mathcal{ST}(2)$ es el álgebra generada por los campos fundamentales

$$X_i = \sum \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_i}\right)(e)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

donde e es la identidad del grupo y los y_i son los parámetros del grupo, y la estructura de Lie está dada por el corchete entre campos vectoriales.

Proposición 1.1. *El álgebra de Lie del grupo triangular especial $ST(2)$ es el álgebra generada por los campos invariantes a izquierda,*

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \qquad , \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.4}$$

con la estructura dada por

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = -2X_2 \qquad , \qquad [X_i, X_i] = 0, \qquad i = 1,2 \tag{1.5}$$

Demostración. En efecto, el álgebra de Lie de $ST(2)$ está generada por los campos fundamentales (1.3) que son a su vez los campos vectoriales invariantes a izquierda calculados en la identidad e del grupo, es decir,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial a}\right)(e)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial a}\right)(e)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= (x,\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial b}\right)(e)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial b}\right)(e)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= y\ \frac{\partial}{\partial x} \\
&= (x,\ y)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

(e es la matriz idéntica de orden dos, a y b son los parámetros del grupo), con la estructura dada por el corchete entre campos vectoriales:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= [x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},\ \ y\frac{\partial}{\partial x}] \\
&= \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - yx\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&= -2y\frac{\partial}{\partial x} = -2X_2 = -\ [X_2,\ X_1],
\end{aligned}$$

y análogamente,

$$[X_1, X_1] = [X_2, X_2] = 0. \qquad ☑$$

Nota 1.1 . Los campos vectoriales X_1, X_2 forman una base del álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$ y los podemos identificar con las matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

con la estructura de Lie dada por el conmutador entre matrices, que coincide con (1.5).

Definición 1.3. El álgebra de funciones diferenciables $C^\infty(ST(2))$ sobre el grupo $ST(2)$ y con valores en el campo $k = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ es el álgebra asociativa, conmutativa y con unidad definida por el producto corriente entre funciones (ver [7])

$$m : C^\infty(ST(2)) \times C^\infty(ST(2)) \to C^\infty(ST(2))$$
$$m(f, f') = ff' \in C^\infty(ST(2)) \ , \qquad ff'(g) = f(g)f'(g). \tag{1.9}$$

Una importante subálgebra del álgebra $C^\infty(ST(2))$ es el álgebra $\mathcal{A}$ de los polinomios generada por las funciones coordenas del grupo, es decir, por las funciones t_{ij} que a la matriz $g \in ST(2)$ asignan sus entradas: $t_{ij}(g) = g_{ij}$. Más precisamente, considerando

$$T \ = \ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

el álgebra $\mathcal{A}$ está generada por las entradas de la matriz T módulo la relación $ac = t_{11}(g)t_{22}(g) = g_{11}g_{22} = \det T = 1$, $t_{12} = b$. Claramente (ver [6]), $\mathcal{A}$ tiene la estructura de un álgebra asociativa, conmutativa y con unidad para el producto

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad m(t_{ij} \otimes t_{kl}) = t_{ij}t_{kl}, \qquad m(t_{11} \otimes t_{22}) = 1 \tag{1.11}$$

y la aplicación unidad

$$\eta : k \to \mathcal{A}, \qquad \eta(\lambda) = \lambda 1_{\mathcal{A}}, \tag{1.12}$$

donde $1_{\mathcal{A}} = \eta(1)$ es la función constante en $\mathcal{A}$ tal que

$$t_{ij}(g)1_{\mathcal{A}}(g) = 1_{\mathcal{A}}(g)t_{ij}(g) = t_{ij}(g) = g_{ij}$$

para todo i y todo j.

La estructura de álgebra asociativa de $\mathcal{A}$ induce a su vez la estructura de un álgebra asociativa sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dada por el producto (ver [6])

$$M : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A},$$

definido por

$$\begin{aligned} M((t_{ij} \otimes t_{kl}) \otimes (t_{st} \otimes t_{rn})) &= (m \otimes m)((t_{ij} \otimes t_{kl}) \otimes (t_{st} \otimes t_{rn})) \\ &= m(t_{ij} \otimes t_{st}) \otimes m(t_{kl} \otimes t_{rn}) \\ &= t_{ij}t_{st} \otimes t_{kl}t_{rn}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

cuya unidad es $1 \otimes 1$, y por la aplicación unidad

$$I : k \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ , \qquad I(\lambda) = \lambda 1 \otimes 1. \tag{1.14}$$

El producto (1.1) del grupo induce aplicaciones duales respectivas (ver [8]) (morfismos de álgebras) del producto m y de la unidad η,

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \qquad \text{y} \qquad \epsilon : \mathcal{A} \to k,$$

definidas sobre las funciones coordenadas $t_{ij} \in \mathcal{A}$ por

$$\Delta(t_{ij})(g, g') = t_{ij}(\mu(g, g')) = t_{ij}(gg') \ , \qquad \epsilon(t_{ij}) = t_{ij}(e), \tag{1.15}$$

donde $(g, g') \in ST(2) \times ST(2)$ y e es la identidad de $ST(2)$, las cuales hacen de $\mathcal{A}$ una coálgebra. Por otra parte, la operación inversa $g \to g^{-1}$ del grupo $ST(2)$ induce sobre $\mathcal{A}$ la aplicación antípoda

$$S : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \ , \qquad S(t_{ij})(g) = t_{ij}(g^{-1}), \tag{1.16}$$

que junto con Δ y ϵ hacen de $\mathcal{A}$ un álgebra de Hopf, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *El álgebra $\mathcal{A}$ es un álgebra de Hopf con el co-producto Δ, la co-unidad ϵ y la aplicación antípoda S, las cuales según (1.15) y (1.16), están dadas sobre los generadores por*

$$\begin{array}{lll} \Delta(a) = a \otimes a, & \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes c, & \Delta(c) = c \otimes c, \\ \epsilon(a) = 1, & \epsilon(b) = 0, & \epsilon(c) = 1, \qquad (1.17) \\ S(a) = c, & S(b) = -b, & S(c) = a. \qquad (1.18) \end{array}$$

Demostración. Considerando la matriz T de las funciones coordenadas (1.10), las aplicaciones Δ, ϵ y S se pueden expresar en forma matricial por las igualdades

$$\Delta T = T \otimes T, \qquad \epsilon(T) = I, \qquad S(T) = T^{-1}. \tag{1.19}$$

Entonces (1.17) se obtiene de

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a & a \otimes b + b \otimes c \\ 0 & c \otimes c \end{pmatrix}$$

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

y (1.18), de

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Para demostrar que $\mathcal{A}$ es una Algebra de Hopf con las aplicaciones lineales Δ, ϵ y S debemos probar que

(1) Δ y ϵ son morfismo de álgebras,
(2) Δ es co-asociativa y ϵ es la co-unidad para Δ,
(3) S es un anti-morfismo,
(4) S satisface las propiedades de una antípoda.

Basta verificar estas afirmaciones sobre los generadores de $\mathcal{A}$.

(1) De la definición (1.15) de Δ sobre las funciones coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(t_{ij}t_{kl})((g,g')) &= (t_{ij}t_{kl})(\mu(g,g')) \\ &= (t_{ij}t_{kl})(gg') \\ &= t_{ij}(gg')t_{kl}(g,g') \\ &= t_{ij}(\mu(g,g'))t_{kl}(\mu(g,g')) \\ &= \Delta(t_{ij})(g,g')\Delta(t_{kl})(g,g') \\ &= (\Delta(t_{ij})\Delta(t_{kl}))\,(g,g'). \end{aligned}$$

De la misma forma, ϵ satisface

$$\epsilon(t_{ij}t_{kl}) = (t_{ij}t_{kl})(e) = t_{ij}(e)t_{kl}(e) = \epsilon(t_{ij})\epsilon(t_{kl}).$$

(2) Δ es coasociativa; es decir, satisface la igualdad

$$(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta. \tag{1.22}$$

En efecto, sobre los elementos de la base de $\mathcal{A}$. se tiene

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(a) &= (id \otimes \Delta)(a \otimes a)\\ &= id(a) \otimes \Delta(a)\\ &= a \otimes (a \otimes a)\\ &= a \otimes a \otimes a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(a) &= (\Delta \otimes id)(a \otimes a)\\ &= \Delta(a) \otimes id(a)\\ &= (a \otimes a) \otimes a\\ &= a \otimes a \otimes a,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(b) &= (id \otimes \Delta)(a \otimes b + b \otimes c)\\ &= (id(a) \otimes \Delta(b)) + (id(b) \otimes \Delta(c))\\ &= a \otimes (a \otimes b + b \otimes c) + b \otimes (c \otimes c)\\ &= a \otimes a \otimes b + a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(b) &= (\Delta \otimes id)(a \otimes b + b \otimes c)\\ &= \Delta(a) \otimes id(b) + \Delta(b) \otimes id(c)\\ &= (a \otimes a) \otimes b + (a \otimes b + b \otimes c) \otimes c\\ &= a \otimes a \otimes b + a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes c.\end{aligned}$$

Utilizando ahora el isomorfismo $k \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$, válido para todo espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $k = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$, y la igualdad $0 \otimes f = 0,\ f \in \mathcal{A}$ (ver [6]), se demuestra fácilmente que ϵ es la co-unidad con respecto a Δ, es decir, que

$$(id \otimes \epsilon)\Delta = (\epsilon \otimes id)\Delta. \tag{1.23}$$

En efecto, sobre los generadores de $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\begin{aligned}(id \otimes \epsilon)\Delta(a) &= (id \otimes \epsilon)(a \otimes a) = id(a) \otimes \epsilon(a)\\ &= a \otimes 1 = a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes id)\Delta(a) &= (\epsilon \otimes id)(a \otimes a)\\ &= \epsilon(a) \otimes id(a) = 1 \otimes a = a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id \otimes \epsilon)\Delta(b) &= (id \otimes \epsilon)(a \otimes b + b \otimes c) = id(a) \otimes \epsilon(b) + id(b) \otimes \epsilon(c)\\ &= a \otimes b(e) + b \otimes a(e) = a \otimes 0 + b \otimes 1 = b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes id)\Delta(b) &= (\epsilon \otimes id)(a \otimes b + b \otimes c)\\ &= \epsilon(a) \otimes id(b) + \epsilon(b) \otimes id(c) = 1 \otimes b + 0 \otimes c = b.\end{aligned}$$

(3) La aplicación S es un antimorfismo. En efecto,

$$S(t_{ij}t_{kl})(g) = t_{kl}t_{ij}(g^{-1}) = t_{ij}(g^{-1})t_{kl}(g^{-1}) = S(t_{ij})(g)S(t_{kl})(g)$$

sobre los elementos t_{ij} de la matriz T. Para completar la demostración de los numerales (1), (2) y (3) basta verificar que el determinante de T se comporta como un elemento del grupo para Δ, ϵ y S. Esto es claro de

$$\begin{aligned}\Delta(\det T) &= \Delta(ac) = \Delta(a)\Delta(c) = (a \otimes a)(c \otimes c)\\ &= \det T \otimes \det T = 1 \otimes 1,\\ \epsilon(\det T) &= \epsilon(1) = 1 = detT,\\ S(\det T) &= S(ac) = S(c)S(a) = ac = \det T = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto Δ y ϵ son morfismos de álgebras y S es un anti-morfismo.

(4) La aplicación S es la antípoda sobre $\mathcal{A}$; es decir, satisface las igualdades

$$TS(T) = S(T)T = I \ , \qquad \sigma(S \otimes S)\Delta(T) = \Delta S(T), \tag{1.24}$$

donde σ denota la extensión natural a las matrices 2×2 sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ del operador lineal

$$\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ , \qquad \sigma(x \otimes y) = y \otimes x. \tag{1.25}$$

La primera igualdad en (1.24) resulta de la definición de S. La segunda se obtiene de las relaciones

$$\sigma(S\otimes S)\Delta(T) = \sigma(S\otimes S)\begin{pmatrix} a\otimes a & a\otimes b + b\otimes c \\ 0 & c\otimes c \end{pmatrix}$$

$$= \sigma\begin{pmatrix} S(a)\otimes S(a) & S(a)\otimes S(b) + S(b)\otimes S(c) \\ 0 & S(c)\otimes S(c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma(c\otimes c) & \sigma(c\otimes(-b) + (-b)\otimes a) \\ 0 & \sigma(a\otimes a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\otimes c & -(b\otimes c + a\otimes b) \\ 0 & a\otimes a \end{pmatrix}$$

$$= \Delta(T^{-1}) = \Delta(S(T)).$$

Esto completa la demostración de la proposición. ☑

1.2 Biálgebras. La estructura de álgebra de Hopf sobre $\mathcal{A}$ precisa de la estructura de coálgebra con las aplicaciones Δ y ϵ y de la estructura de álgebra con las aplicaciones m y η, de tal forma que las dos estructuras sean compatibles; es decir, que Δ y ϵ sean morfismos de álgebras. Un espacio vectorial con estructura de álgebra y de coálgebra y tal que esas estructuras sean compatibles se denomina una biálgebra (ver [6]).

Definición 1.4. Se dice que un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ tiene la estructura de una biálgebra de Lie si existe una aplicación antisimétrica $\delta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}$ tal que la aplicación dual $\delta^* : \mathcal{G}^*\otimes\mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ sea un corchete de Lie para el espacio dual $\mathcal{G}^*$.

Es decir, un espacio vectorial es una biálgebra de Lie si es un álgebra y una coálgebra de Lie y las dos estructuras son compatibles (ver [4], [7], [9]).

Se sabe que una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica induce una estructura de biálgebra de Lie sobre el espacio de las funciones de un grupo de Lie (ver [1] , [2] y [9]). Usaremos este hecho para construir la estructura de biálgebra de Lie sobre el espacio generado por las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$.

Definición 1.5. Un tensor $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ sobre el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de un grupo de Lie G es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica si satisface la ecuación

$$\langle\langle r,\ r\rangle\rangle = \langle r_{12},\ r_{23}\rangle + \langle r_{12},\ r_{13}\rangle + \langle r_{13},\ r_{23}\rangle = 0, \tag{1.26}$$

donde el conmutador $\langle , \rangle$ es el corchete inducido por el corchete del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ en el espacio $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ (vease (1.32) más adelante) y los r_{ij} son los tensores definidos por

$$r_{12} = r \otimes I\ , \qquad r_{23} = I \otimes r\ , \qquad r_{13} = (I \otimes r)r_{12}, \tag{1.27}$$

siendo I la matriz identidad de orden 4 (ver [9]).

Con el fin de determinar la estructura de biálgebra de Lie sobre el álgebra de funciones sobre $ST(2)$, consideremos el r-tensor antisimétrico

$$r = X_1\ \otimes\ X_2 - X_2\ \otimes\ X_1 \tag{1.28}$$

de $\mathcal{ST}(2) \otimes \mathcal{ST}(2)$, donde X_1, X_2 son los campos (1.4) que forman una base del álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$. Este tensor puede expresarse en forma matricial usando el producto tensorial usual entre matrices (ver [11]), es decir,

$$\begin{aligned} r &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Proposición 1.3. *El tensor $r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1$ satisface la ecuación de Yang-Baxter clásica (EYBC)*

$$\langle r_{12},\ r_{23}\rangle + \langle r_{12},\ r_{13}\rangle + \langle r_{13},\ r_{23}\rangle = 0. \tag{1.30}$$

Demostración. Los tensores r_{ij} están definidos por las igualdades

$$\begin{aligned} r_{12} &= r \otimes I = X_1 \otimes X_2 \otimes I - X_2 \otimes X_1 \otimes I, \\ r_{23} &= I \otimes r = I \otimes X_1 \otimes X_2 - I \otimes X_2 \otimes X_1, \\ r_{13} &= X_1 \otimes I \otimes X_2 - X_2 \otimes I \otimes X_1, \end{aligned} \tag{1.31}$$

donde X_1, X_2 son como antes, I es la matriz identidad, y el conmutador $\langle r_{ij}, r_{kl}\rangle$ en $\mathcal{ST}(2)\otimes\mathcal{ST}(2)\otimes\mathcal{ST}(2)$, inducido por el corchete de Lie de $\mathcal{ST}(2)$, está definido (ver [1]) por

$$\begin{aligned}\langle X_1\otimes X_2\otimes X_3,\ Y_1\otimes Y_2\otimes Y_3\rangle =&[X_1,\ Y_1]\otimes X_2Y_2\otimes X_3Y_3\\ &+X_1Y_1\otimes[X_2,\ Y_2]\otimes X_3Y_3\\ &+X_1Y_1\otimes X_2Y_2\otimes[X_3,\ Y_3],\end{aligned}\tag{1.32}$$

siendo $[X_i, Y_j]$ el corchete de Lie (1.5). Es fácil ver que el conmutador $\langle,\rangle$ sobre los tensores r_{ij} es en efecto un corchete de Lie. Entonces

$$\begin{aligned}&\langle r_{12},\ r_{23}\rangle+\langle r_{12},\ r_{13}\rangle+\langle r_{13},\ r_{23}\rangle\\ &\quad=\langle X_1\otimes X_2\otimes I-X_2\otimes X_1\otimes I,\ I\otimes X_1\otimes X_2-I\otimes X_2\otimes X_1\rangle\\ &\quad\ +\langle X_1\otimes X_2\otimes I-X_2\otimes X_1\otimes I,\ X_1\otimes I\otimes X_2-X_2\otimes I\otimes X_1\rangle\\ &\quad\ +\langle X_1\otimes I\otimes X_2-X_2\otimes I\otimes X_1,\ I\otimes X_1\otimes X_2-I\otimes X_2\otimes X_1\rangle\ ,\end{aligned}$$

y por linealidad

$$\begin{aligned}\langle\langle r,r\rangle\rangle =&\langle X_1\otimes X_2\otimes I,\ I\otimes X_1\otimes X_2\rangle-\langle X_1\otimes X_2\otimes I,\ I\otimes X_2\otimes X_1\rangle\\ &-\ \langle X_2\otimes X_1\otimes I,\ I\otimes X_1\otimes X_2\rangle+\ \langle X_2\otimes X_1\otimes I,\ I\otimes X_2\otimes X_1\rangle\\ &+\ \langle X_1\otimes X_2\otimes I,\ X_1\otimes I\otimes X_2\rangle-\ \langle X_1\otimes X_2\otimes I,\ X_2\otimes I\otimes X_1\rangle\\ &-\ \langle X_2\otimes X_1\otimes I,\ X_1\otimes I\otimes X_2\rangle+\ \langle X_2\otimes X_1\otimes I,\ X_2\otimes I\otimes X_1\rangle\\ &+\langle X_1\otimes I\otimes X_2,\ I\otimes X_1\otimes X_2\rangle-\ \langle X_1\otimes I\otimes X_2,\ I\otimes X_2\otimes X_1\rangle\\ &-\ \langle X_2\otimes I\otimes X_1,\ I\otimes X_1\otimes X_2\rangle+\ \langle X_2\otimes I\otimes X_1,\ I\otimes X_2\otimes X_1\rangle.\end{aligned}$$

De (1.32), de las ecuaciones (1.5) y de la igualdad $[I, X_i] = 0$, obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}\langle\langle r,\ r\rangle\rangle =&X_1\otimes[X_2,X_1]\otimes X_2+\ X_2\otimes[X_1,X_2]\otimes X_1\\ &-\ [X_1,X_2]\otimes X_2\otimes X_1-\ [X_2,X_1]\otimes X_1\otimes X_2\\ &-\ X_1\otimes X_2\otimes[X_2,X_1]-\ X_2\otimes X_1\otimes[X_1,X_2]\\ =&\ 2X_1\otimes X_2\otimes X_2-\ 2X_2\otimes X_2\otimes X_1\\ &+\ \ 2X_2\otimes X_2\otimes X_1-\ 2X_2\otimes X_1\otimes X_2\\ &-\ 2X_1\otimes X_2\otimes X_2+\ 2X_2\otimes X_1\otimes X_2=\ 0.\qquad ☑\end{aligned}$$

Por ser antisimétrico y por ser solución de la EYBC, r induce una estructura de biálgebra de Lie (ver [1]) sobre $\mathcal{A}$. Es decir, mediante r podemos definir un corchete de Lie $\{\ ,\} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sobre las funciones coordenadas de la siguiente manera. Sea T la matriz de las funciones coordenadas (1.10), y sean $\{T\otimes, T\}$ la matriz

$$\{T \otimes,\ T\} \ = \begin{pmatrix} \{a,\ a\} & \{a,\ b\} & \{b,\ a\} & \{b,\ b\} \\ 0 & \{a,\ c\} & 0 & \{b,\ c\} \\ 0 & 0 & \{c,\ a\} & \{c,\ b\} \\ 0 & 0 & 0 & \{c,\ c\} \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

y $T \otimes T$ el producto tensorial usual entre matrices: $(T \otimes T)_{ik,mn} = (T)_{im}(T)_{kn}$ (ver [11]), esto es,

$$T \ \otimes \ T \ = \begin{pmatrix} aT & bT \\ 0 & cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa & ab & ba & b^2 \\ 0 & ac & 0 & bc \\ 0 & 0 & ca & cb \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Sea además $\langle T \ \otimes \ T \ , \ r\rangle \ =: \ (T \ \otimes \ T) \ r - r \ (T \ \otimes \ T)$ el conmutador usual entre matrices. Definimos entonces $\{t_{ij},\ t_{kl}\}$ mediante la identidad (ver [11])

$$\{T \otimes,\ T\} \ = \ \langle T \ \otimes \ T,\ r\rangle. \tag{1.35}$$

Proposición 1.4. *El álgebra $\mathcal{A}$ es una biálgebra con el corchete definido por (1.35).*

Demostración. Desarrollando la igualdad (1.35), el corchete entre los generadores de $\mathcal{A}$ resulta estar dado por

$$\begin{aligned} &\{a,\ a\} = \{b,\ b\} = \{c,\ c\} = 0 \\ &\{a,\ b\} = -\{b,\ a\} = a^2 - ac \\ &\{a,\ c\} = \{c,\ a\} = 0 \\ &\{b,\ c\} = -\{c,\ b\} = ac - c^2 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Se ve en forma inmediata que (1.36) es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi $\{t_{ij},\ \{t_{kl},\ t_{pq},\}\} + \{t_{kl},\ \{t_{pq},\ t_{ij}\}\} + \{t_{pq},\ \{t_{ij},\ t_{kl}\}\} = 0$ sobre los generadores y, por lo tanto, sobre todos los elementos de $\mathcal{A}$. Entonces (1.36) es un corchete de Lie (ver [7]) y $\mathcal{A}$ es una biálgebra de Lie con el corchete $\{,\}$. ☑

Una estructura de biálgebra obtenida de una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica se dice que es una biálgebra de Lie triangular (ver [1]). Puesto que también se tiene en forma inmediata que el corchete (1.36) es una derivación, es decir, satisface la regla de Leibniz $\{t_{ij}t_{kl},\ t_{pq}\} = t_{ij}\{t_{kl},\ t_{pq}\} + t_{kl}\{t_{ij},\ t_{pq}\}$ sobre todos los elementos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ con el corchete $\{,\}$ es una variedad de Poisson. Como demostraremos a continuación, el corchete $\{,\}$ es además compatible con el co-producto de $\mathcal{A}$, es decir, satisface la igualdad

$$\Delta\{t_{ij},\ t_{kl}\} \ = \ \{\Delta(t_{ij})\ ,\ \Delta(t_{kl})\}, \tag{1.37}$$

Es, por lo tanto, lo que se conoce como un corchete de Poisson, y el grupo $ST(2)$ será entonces lo que se llama un grupo de Lie-Poisson (ver [7], [8] y [9]).

Proposición 1.5. *El grupo de Lie $ST(2)$ es un grupo de Lie-Poisson con el corchete definido por (1.36).*

Demostración. Debemos probar que el corchete (1.36) es compatible con el co-producto Δ en el sentido de (1.37). Para esto basta verificar la propiedad sobre los generadores del álgebra $\mathcal{A}$. Así ,

$$\begin{aligned}\{\Delta(a),\ \Delta(a)\} &= \{a\otimes\ a,\ a\otimes a\}\\ &= a^2\otimes\{a,\ a\} + \{a,\ a\}\otimes a^2\\ &= 0 = \Delta\{a,\ a\},\end{aligned}$$

y de la misma forma se verifica la compatibilidad del corchete en los casos $\{b,\ b\}$, $\{c,\ c\}$ y $\{a,\ c\}$. Para $\{a,\ b\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta\{a,\ b\} &= \Delta(a^2 - ac) = \Delta(a^2) - \Delta(ac)\\ &= (a\otimes a)(a\otimes a) - (a\otimes a)(c\otimes c)\\ &= a^2\otimes a^2 - ac\otimes ac\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\Delta a,\ \Delta b\} &= \{a\otimes a,\ a\otimes b + b\otimes c\}\\ &= \{a\otimes a,\ a\otimes b\} + \{a\otimes a,\ b\otimes c\}\\ &= a^2\otimes\{a,\ b\} + \{a,\ b\}\otimes ac + ab\otimes\{a,\ c\}\\ &= a^2\otimes(a^2 - ac) + (a^2 - ac)\otimes ac\\ &= a^2\otimes a^2 - ac\otimes ac,\end{aligned}$$

y para $\{b,\ c\}$, que

$$\Delta(\{b,\ c\}) = (ac \otimes ac) - c^2 \otimes c^2 = \{\Delta(b),\ \Delta(c)\}.$$

Esto demuestra (1.37) para toda función coordenada t_{ij} del espacio $\mathcal{A}$. Entonces, $\mathcal{A}$ es un álgebra de Hopf-Poisson y el grupo $ST(2)$ tiene la estructura de Lie-Poisson. ☑

2. Cuantización del Grupo $ST(2)$

Una cuantización del grupo de Lie Poisson $ST(2)$ (ver [2], [3], [10]) es una deformación del álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ en una nueva álgebra no conmutativa $\mathcal{A}_h$ (h es el parámetro de deformación) tal que, en el límite $h \to 0$, el álgebra $\mathcal{A}_h$ coincida con $\mathcal{A}$, y las estructuras de álgebra y de coálgebra sobre $\mathcal{A}_h$ con producto $*_h$ y co-producto Δ, respectivamente, sean compatibles. Esto requiere que Δ sea un morfismo de álgebras con respecto al nuevo producto $*_h$, y que $\mathcal{A}_h$ tenga la estructura de un Algebra de Hopf.

Proposición 2.1. *Una deformación $\mathcal{A}_h$ del álgebra $\mathcal{A}$ está dada por el álgebra asociativa con unidad determinada por el producto $*_h$ definido sobre $\mathcal{A}$ por*

$$t_{ij} *_h t_{lk} = m(t_{ij} \otimes t_{lk}) + h\{t_{ij},\ t_{lk}\} + O(h^2) \tag{2.1}$$

donde las t_{ij} son las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$, m es el producto (1.9) entre estas funciones y $\{,\}$ es el corchete de Poisson (1.36) definido sobre el espacio $\mathcal{A}$.

Demostración. Módulo h^2 la relación (2.1) define el producto $*_h$ sobre los generadores (1.10) de $\mathcal{A}$ por

$$\begin{aligned}
a *_h a &= a^2\\
b *_h b &= b^2\\
c *_h c &= c^2\\
a *_h b &= ab + h(a^2 - 1)\\
a *_h c &= 1\\
b *_h c &= bc + h(1 - c^2).
\end{aligned}$$

Probaremos que $\mathcal{A}_h$ es un álgebra asociativa y no conmutativa con este producto. La asociatividad la verificamos caso por caso. Por ejemplo se tiene que

$$\begin{aligned}
a *_h (b *_h c) &= a *_h (bc + h\{b,c\}) = a *_h (bc + h(1-c^2)\\
&= a *_h bc + ha *_h (1-c^2)\\
&= abc + h\{a, bc\} + h(a^2c - ac^2) + h^2\{a, 1-c^2\}\\
&= abc + h\{a,b\}c + hb\{a,c\} + ha^2c - ha^2c + h^2(\{a,1\} - \{a.c^2\})\\
&= abc,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a *_h b) *_h c &= (ab + h\{a,b\}) *_h c = (ab + h(a^2-1)) *_h c\\
&= abc + h\{ab, c\} + h(a^2-1)c + h^2\{a^2-1, c\}\\
&= abc + h(a\{b,c\} + \{a,c\}b) + h(a^2c - ac^2) + h^2(\{a^2,c\} - \{1,c\})\\
&= abc,
\end{aligned}$$

módulo h^2. Las demás posibilidades se establecen en forma análoga. En total

$$t_{ij} *_h (t_{kl} *_h t_{pq}) = (t_{ij} *_h t_{kl}) *_h t_{pq} + O(h^2) \tag{2.2}$$

cualesquiera que sean $t_{ij}, t_{kl}, t_{pq} \in \mathcal{A}_h$. La unidad 1 de $\mathcal{A}$ es la unidad de $\mathcal{A}_h$. Es decir,

$$t_{ij} * 1 = m(t_{ij} \otimes 1) + h\{t_{ij}, 1\} = m(t_{ij} \otimes 1) = t_{ij}, \tag{2.3}$$

pues $\{t_{ij}, 1\} = 0$. Así $(\mathcal{A}_h, *_h)$ es un álgebra asociativa con unidad, y en el límite, el producto $*_h$ y el corchete $\{,\}$ satisfacen

$$m = \lim_{h\to 0}(*_h) \qquad \{t_{ij}, t_{kl}\} = \lim_{h\to 0}(t_{ij} *_h t_{kl} - t_{kl} *_h t_{ij}). \tag{2.4}$$

Es decir, en el límite, las álgebras $\mathcal{A}_h$ y $\mathcal{A}$ coinciden en su estructura. Entonces $(\mathcal{A}_h, *_h)$ es una deformación de $(\mathcal{A}, m)$. En cuanto a la no conmutatividad de $\mathcal{A}_h$, obsérvese que $a *_h b \neq ab + h(1-a^2) = b *_h a$. ☑

Proposición 2.2. *El producto $*_h$ definido sobre los generadores del álgebra $\mathcal{A}_h$ satisface*

$$(x_1 \otimes x_2) *_h (y_1 \otimes y_2) = (x_1 *_h y_1) \otimes (x_2 *_h y_2) \tag{2.5}$$

cualesquiera sean x_1, x_2, y_1, y_2 en $\mathcal{A}_h$.

Demostración. De la definición del producto (2.1) y del corchete (1.36) podemos extender el producto $*_h$ al álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ por

$$\begin{aligned}
(x_1 \otimes x_2) *_h (y_1 \otimes y_2) &= (x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) + h\{x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\}\\
&= x_1y_1 \otimes x_2y_2 + h(x_1y_1 \otimes \{x_2, y_2\} + \{x_1, y_1\} \otimes x_2y_2).
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición del producto (1.13) sobre el álgebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ y de la conmutatividad del producto m se obtiene que

$$\begin{aligned}(x_1 *_h y_1)\otimes(x_2 *_h y_2) =&(x_1y_1 + h\{x_1,y_1\})\otimes(x_2y_2 + h\{x_2,y_2\})\\ =&x_1y_1\otimes x_2y_2 + h\{x_1,y_1\}\otimes x_2y_2 + x_1y_1\otimes h\{x_2,y_2\}\\ &+ h^2\{x_1,y_1\}\otimes\{x_2,y_2\}\\ =&x_1y_1\otimes x_2y_2 + h(\{x_1,y_1\}\otimes x_2y_2 + x_1y_1\otimes\{x_2,y_2\}).\end{aligned}$$

Esto demuestra la proposición. ☑

Proposición 2.3. *El álgebra $\mathcal{A}_h$ es una biálgebra con el co-producto Δ y la co-unidad ϵ dadas por*

$$\Delta(T) = T\otimes T, \qquad \epsilon(T) = I, \tag{2.6}$$

donde T es la matriz (1.10).

Demostración. Por ser Δ un morfismo de álgebras con el producto m (Proposición 1.2), por ser compatible con el corchete (1.36), y por la Proposición 2.2, podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta(x_1 *_h x_2) &= \Delta(x_1x_2) + h\{x_1,x_2\})\\ &= \Delta(x_1x_2) + h\Delta(\{x_1,x_2\})\\ &= \Delta(x_1)\Delta(x_2) + h\{\Delta(x_1),\Delta(x_2)\}\end{aligned}$$

$$\Delta(x_1) *_h \Delta(x_2) = \Delta(x_1)\Delta(x_2) + h\{\Delta(x_1),\Delta(x_2)\}$$

para todo par de elementos x_1, x_2 en $\mathcal{A}_h$. También, por (1.17) y (2.6), ϵ satisface

$$\begin{aligned}\epsilon(a *_h b) &= \epsilon(ab + h(a^2-1))\\ &= \epsilon(a)\epsilon(b) + \epsilon(h(a^2-1)) = 0,\end{aligned}$$

$$\epsilon(a) *_h \epsilon(b) = \epsilon(a)\epsilon(b) + h\{\epsilon(a),\epsilon(b)\} = 0,$$

$$\epsilon(a *_h c) = \epsilon(1) = 1,$$

$$\begin{aligned}\epsilon(a) *_h \epsilon(c) &= \epsilon(a)\epsilon(c) + h\{\epsilon(a),\epsilon(c)\} = 1,\\ \epsilon(b *_h c) &= \epsilon(bc + h(1-c^2)) = 0,\end{aligned}$$

$$\epsilon(b) *_h \epsilon(c) = \epsilon(b)\epsilon(c) + h\{\epsilon(b),\epsilon(c)\} = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}\Delta(\det T) &= \Delta(1) = \Delta(a) *_h \Delta(c) \\ &= (a\otimes a) *_h (c\otimes c) = (a *_h c)\otimes(a *_h c) \\ &= 1\otimes 1 = \det T\otimes \det T.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces Δ y ϵ son morfismos de álgebras con respecto al producto $*_h$. Además, Δ es compatible con el producto $*_h$. Entonces, $\mathcal{A}_h$ es una biálgebra y una deformación de $\mathcal{A}$. ☑

Proposición 2.4. *La biálgebra $\mathcal{A}_h$ es un álgebra de Hopf con el co-producto Δ y la co-unidad ϵ definidas en (2.6), y con la aplicación antípoda S definida sobre los generadores (1.10) por*

$$S(a) = c, \qquad S(b) = -b + h(c-a), \qquad S(c) = a. \tag{2.8}$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{A}_h$ es una biálgebra con el co-producto y la co-unidad (2.6), basta probar que S es una aplicación antípoda. En efecto, S satisface las siguientes tres propiedades:

$$\begin{aligned}&*_h((S\otimes id)\Delta) = *_h((id\otimes S)\Delta) = \epsilon 1, \\ &S(x *_h y) \;=\; S(y) *_h S(x), \qquad x, y\in\mathcal{A}_h, \\ &\sigma(S\otimes S)\Delta \;=\; \Delta S.\end{aligned}$$

Verificaremos la primera propiedad sobre los generadores a, b. Se tiene

$$\begin{aligned}*_h(S\otimes id)\Delta(a) &= *_h((S\otimes id)(a\otimes a) \\ &= *_h(S(a)\otimes a) = *_h(c\otimes a) = ca = 1 = \epsilon(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*_h(id\otimes S)\Delta(a) &= *_h((id\otimes S)(a\otimes a) \\ &= *_h(a\otimes S(a)) = *_h(a\otimes c) = 1 = 1 = \epsilon(1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*_h((S\otimes id)\Delta(b)) &= *_h(S\otimes id)(a\otimes b + b\otimes c) \\ &= *_h(c\otimes b + (-b + h(c-a))\otimes c) \\ &= c *_h b - b *_h c + h(c *_h c - a *_h a) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*_h((id\otimes S)\Delta(b)) &= *_h(id\otimes S)(a\otimes b + b\otimes c) \\ &= *_h(id(a)\otimes S(b) + id(b)\otimes S(c)) \\ &= *_h(a\otimes(-b + h(c-a)) + b\otimes a) \\ &= b *_h a - a *_h b + h(a *_h c - a *_h a) = 0.\end{aligned}$$

La verificación puede hacerse en forma análoga para c. Las otras dos propiedades de una aplicación antípoda se satisfacen por definición de S. Se concluye que el álgebra $\mathcal{A}_h$ es entonces un álgebra de Hopf y una deformación del álgebra $\mathcal{A}$. ☑

El álgebra de Hopf no conmutativa $\mathcal{A}_h$ recibe el nombre de grupo cuántico del grupo de Lie $ST(2)$ (ver [2], [3]).

Agradecimientos. El autor agradece al revisor del artículo su examen cuidadoso de las primeras versiones del mismo, y sus comentarios y sugerencias que contribuyeron a muchas mejoras.

Referencias

1. V. Chari and A. Pressley, *Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.
2. V. Drinfeld, *Quantum Groups*, ICM-86 **1**, 798–820, Academic Press, 1986.
3. V. Drinfeld, *On some unsolved problems in quantum group theory*, Lecture Notes in Mathematics **1510**, 1–8, Springer-Verlag, 1992.
4. H.D. Doebner, J.D. Hennig and W. Lúcke, *Mathematical guide to quantum groups*, Lecture Notes in Physics **370**, 29–66, Springer-Verlag, 1990.
5. D. Gurevich and V. Rubtsov, *Yang-Baxter equation and deformation of associative and Lie algebras*, Lecture Notes in Mathematics 1510, 9–46, Springer-Verlag, 1992.
6. C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer-Verlag, 1995.
7. J.H Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat descompositions*, J. Differential Geometry **31** (1990), 501–526.
8. S. Majid, *Fundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, 1995.
9. N. Y. Reshetikhin, L. Takthajan and L. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Mathematical Journal **1** (1990), 193–225.
10. L.A. Takhtajan, *Introduction to quantum groups*, Lecture Notes in Physics **370**, 3–28, Springer-Verlag, 1990.
11. L.A. Takthajan, *Elementary course on quantum groups*, Lectures on Integrable Systems (proceedings of the CIMPA school, 1991), 319–348, World Scientific Publishing, 1994.

(Recibido en junio de 1997)

Berenice Guerrero
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
COLOMBIA
e-mail:aguerrer@ciencias.ciencias.unal.edu.co