This is a reprint of the paper
Una nota sobre el teorema de Sarkovskii
by JUAN E. NÁPOLES-VALDS
published in **Lecturas Matemáticas**
16 (1995), pp. 211–214

UNA NOTA SOBRE EL TEOREMA DE SARKOVSKII

JUAN E. NÁPOLES-VALDS

Instituto Superior Pedagógico de Holguín, CUBA

ABSTRACT. In this expository note some connections between the well known Sarkovskii's Theorem and the theory of functional equations are presented.

Key words and phrases. Functional equations, periodic solutions, continuous transformations, fixed points, cycles.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 26A18. Secondary 39B12, 47H10, 58F13.

RESUMEN. En esta pequeña nota se exponen algunas conexiones entre el conocido teorema de Sarkovskii y la teoría de las ecuaciones funcionales.

Después de leer el interesante artculo [2], y como ya conocía el trabajo de Sarkovskii al que alude éste (ver [3]), me propuse presentar en esta pequeña nota, sin ánimo de agotar el tema, un tópico no abordado en [2], a saber, las aplicaciones del referido Teorema de Sarkovskii (que como veremos, es la conclusión de varios resultados preliminares) a la teoría de las ecuaciones funcionales.

Sin querer ser reiterativo, creo conveniente recordar el ya aludido Teorema de Sarkovskii y ciertos resultados relacionados con éste.

El trabajo de Sarkovskii, que tiene sus antecedentes en dos trabajos del mismo autor[1], es uno de una serie de artículos relacionados con funciones que transforman un intervalo en sí mismo y cómo podemos caracterizar esa trasformación por un conjunto de puntos bien determinados.

[1] *Uspeiji Matematicheskii Nauk, T. XII, No.4, 1960* y *Doklady Akad. Nauk URSS, T. 189, No.5, 1961.*

Sabemos que toda función continua de variable real $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, genera una transformación continua T de la recta en sí misma: $x \mapsto f(x)$. Resulta que las propiedades de la transformación T quedan definidas en la estructura básica del conjunto de sus puntos fijos.

Recordemos que el punto a se llama *punto fijo de orden* k de la transformación T, si $T^k a = a$ y $T^j a \neq a$ $(1 \leq j < k)$. Los puntos $Ta, T^2a, \dots, T^{k-1}a$ también resultan puntos fijos de orden k y junto con el punto a conforman lo que se llama un *ciclo de orden* k.

En el trabajo [3] se investiga el problema de la dependencia entre la existencia de ciclos de diferentes órdenes y sus principales resultados son enunciados con ayuda del siguiente hecho. Consideremos el conjunto de los números naturales, en el que se introduce la relación n_1 *precede a* n_2 $(n_1 \preceq n_2)$ si para cualquier transformación continua de la recta en sí misma la existencia de un ciclo de orden n_1 implica la existencia de un ciclo de orden n_2. No es difícil probar que tal relación cumple con las propiedades reflexiva, antisimtrica y transitiva, y por tanto, el conjunto $\mathbb{N}$ con esta relación es un *conjunto ordenado* de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \cdots \prec 3\cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec \cdots \\ &\cdots \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec \cdots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1. \end{aligned} \tag{1}$$

En nuestra exposición necesitaremos los siguientes dos resultados obtenidos por Sarkovskii (mantendremos la notación de éste).

Teorema A. *([3], Teorema 6) Si la transformación T tiene ciclos de orden 2^n $(n > 0)$, entonces T admite también ciclos de orden $2^i, i = 0, 1, \dots, n-1$. Si la transformación T admite ciclos de orden $2^n(2m+1)$ con $n \geq 0$ y $m > 0$, entonces T tiene también ciclos de ordenes $2^i, i = 0, 1, \dots, n$, y $2^n(2r+1)$ para $r = m+1, m+2, \dots, 2^p s$, con $p > n$, $s = 1, 2, 3, \dots$.*

Teorema B. *([3], Teorema 7) Entre dos puntos cualesquiera de un ciclo de orden $k > 1$ se encuentra por lo menos un punto de un ciclo de orden $l < k$.*

Lo interesante de los resultados de Sarkovskii, y es a lo que nos referiremos aquí, es que éstos pueden ser extendidos al lenguaje de las soluciones periódicas de la ecuación funcional

$$y(x+1) = f(y(x)), \tag{2}$$

tomando una sucesión discreta de valores del dominio. En particular, utilizando los teoremas antes mencionados, se tiene el siguiente resultado:

Teorema C. *Si la transformación T es continua, entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

(i) *Si la ecuación funcional (2) tiene soluciones periódicas con período k, entonces dicha ecuación tiene soluciones periódicas de cualquier período posterior, con el orden (1), a k.*
(ii) *Si la ecuación funcional (2) no tiene soluciones periódicas con perodo k, entonces tal ecuación no tiene soluciones pediódicas de ningún perodo que preceda a k en (1).*

Ilustremos la anterior afirmación. Tal vez el ejemplo más simple de sistema no lineal sea la ecuación logística

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), \tag{3}$$

donde x_n representa la población del año n con relación a una población de referencia inicial x_0, x_{n+1} es entonces la población del año siguiente, y α es la tasa de crecimiento de dicha población. Esta ecuación aparece de manera natural en el estudio de la evolución de poblaciones biológicas; en particular, (3) se ha mostrado particularmente útil en el estudio de la evolución anual de la población de ciertas mariposas del nordeste de los Estados Unidos que exhiben fluctuaciones imprevisibles de un año a otro.

Queremos examinar un comportamiento a largo plazo de la población x_n. Para mantener la población en el intervalo [0, 1] limitaremos a α a estar entre 0 y 4 (es fácil ver que si $\alpha > 4$ y $x_n = 1/2$ tenemos $x_{n+1} > 1$).

Tomemos $1 < \alpha < 3$. A partir de cualquier población inicial $x_0 \in (0, 1)$, la población se aproxima a un valor constante no nulo $x^* = 1 - \frac{1}{\alpha}$. De nuestros preliminares se tiene que x^* es un punto fijo de orden 1. En este caso no existen soluciones periódicas de ningún período.

A medida que α crece de 3 a 4 existen grandes variaciones en la estructura del sistema.

En primer lugar, el punto fijo se torna inestable y la población converge a un estado de equilibrio donde se alterna entre dos valores, es decir, se tiene una órbita de período 2. Para $\alpha = 3.2$ la población oscila entre $x_n = 0.5$ y $x_n = 0.8$.

Para valores mayores, por ejemplo para $\alpha = 3.5$, el perodo se torna inestable y es sustituido por una solución periódica de período 4.

A medida que α crece, la población converge a ciclos de período 8, 16, 32, 64, $\ldots$.

Este es el fenómeno de *duplicación de los períodos*, y como apunta Rubiano en el trabajo ya citado, este orden de los períodos, no es más que el orden (1) pero invertido.

El análisis del comportamiento del sistema (3) para los restantes valores de α puede ser completado recurriendo a las referencias [1] y a la propia [2].

Referencias

[1] V. C. García, *O Caos*, Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS, Serie C, **6** (1988).

[2] G. Rubiano, *Acerca del Teorema de Sarkovskii*, Lecturas Matemáticas **15** (1994), no. 1, 21–26.

[3] A. N. Sarkovskii, *Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en s misma*, (en ruso), Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal **T. XVI** (1964), no. 1, 61–71.

(Recibido en septiembre de 1995; revisado en julio de 1996)

Instituto Superior Pedagógico de Holguín
Apartado Postal 78
Holgun 80100, CUBA