

This is a reprint of the paper  
*Dos generalizaciones de la integral de Hubbell*  
by NINFA GARRIDO DE BARRIOS  
& CARMEN ANDRADE DE FUENMAYOR  
published in **Lecturas Matemáticas**  
16 (1995), pp. 187–207

---

## DOS GENERALIZACIONES DE LA INTEGRAL DE HUBBELL

NINFA GARRIDO DE BARRIOS

CARMEN ANDRADE DE FUENMAYOR

Universidad del Zulia, Maracaibo, VENEZUELA

**ABSTRACT.** The two-parameter integral  $f(a, b)$  introduced by Hubbell for the calculation of the radiation field arising from a plane isotropic rectangular source has been studied by many authors. In this paper we study two integrals  $f_p(a, b, c)$  and  $F_p(a, b, \mu)$  which are four-parameter generalizations of Hubbell's integral  $f(a, b)$ . We obtain series expansions for them which are closely related to their extremal values, each valid for a specific range of the parameters. In each case we represent the integrals as a sum of two terms, one of them being an elementary function, the other, a convergent series expansion. Some interesting particular cases are mentioned.

*Key words and Phrases.* Gamma function, hypergeometric function, hypergeometric identities, asymptotic expressions.

*1991 Mathematic Subject Classification.* Primary 33E20. Secondary 33C05, 78A10.

**RESUMEN.** La integral de Hubbell de dos parámetros  $f(a, b)$  representa la respuesta de un detector de radiación omni-direccional a las radiaciones emanadas de placas rectangulares y ha sido de gran interés para muchos matemáticos. En este trabajo estudiaremos dos integrales,  $f_p(a, b, c)$  y  $F_p(a, b, \mu)$ , las cuales son generalizaciones de cuatro parámetros de la integral  $f(a, b)$ . Obtendremos para ellas desarrollos en serie estrechamente relacionadas con sus valores extremos, cada uno válido en un dominio específico de los parámetros. En cada caso representaremos las integrales como sumas de dos términos, siendo el primero una función elemental y el segundo un desarrollo en serie convergente. Mencionaremos también algunos casos particulares interesantes.

### INTRODUCCIÓN

La penetración de estructuras por la radiación es un fenómeno que ha suscitado innumerables trabajos de investigación.

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

Muchos problemas relacionados con la protección contra la radiación involucran cálculos de la respuesta de un detector isotrópico a la radiación que procede de las superficies que han sido penetradas.

En general, las superficies que actúan como escudo protector pueden tener formas diversas y el detector puede estar ubicado en cualquier posición. J. H. Hubbell et al. han realizado estudios detallados de superficies radiantes de forma rectangular [8] o circular [9]. A su vez, Yamokoshi e Itoh [18] han tratado el mismo problema para radiaciones emitidas dentro de un ducto recto rectangular con intensidades proporcionales a  $\cos^2 \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia de la radiación, trabajo en el cual se señalan algunos errores en las expresiones dadas por Shaeffer [15] y por Selph [14], expresiones éstas citadas en varios libros y revistas del área. Los trabajos de Hubbell han sido de mucha utilidad en diversos problemas de radiación: se utilizaron, por ejemplo, en el análisis del famoso accidente radiactivo conocido como el “síndrome de China”. Por todo esto, Hubbell ha sido nominado para el premio Nobel.

En el tratamiento dado por Hubbell y Lamkin [9] al problema de las superficies radiantes, estos autores determinan que la componente de radiación no dispersada está dada por la expresión

$$I_0(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^b \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - \zeta \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) - \frac{\zeta^2}{2!} a - \frac{\zeta^3}{3!} \left[ \frac{a\sqrt{a^2 + \beta^2 + 1}}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{2} \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) \right] + \dots \right\} d\beta.$$

La integral que aparece en el primer término del segundo miembro es la llamada integral de radiación de Hubbell o, simplemente, la integral de Hubbell:

$$f(a, b) = \int_0^b \frac{\tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\beta^2 + 1}} d\beta; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

La evaluación explícita de  $f(a, b)$  no ha sido posible, lo cual fue presentado por Hubbell [8] como un problema abierto. Este ha sido de interés para muchos matemáticos, quienes han dado soluciones en términos de desarrollos en serie, de funciones hipergeométricas, de funciones de error, etc. Véanse, por ejemplo, M. L. Glasser [6], O. P. Losser [13], A. Sidi [16]. W. B. Jordan [10], M. J. Berger y J. C. Lamkin [2] recurren a la integración numérica de la forma polar; L. V. Spencer [17] deriva una aproximación utilizando funciones escalonadas. S. L. Kalla, S. Conde y B. Al Sagabi [11] han generalizado dicha integral de radiación. Recientemente B. Gabutti, S. L. Kalla y J. Hubbell [4] presentaron cuatro diferentes desarrollos en serie de  $f(a, b)$ , los cuales están estrechamente relacionadas con sus valores extremos. En cada caso representan a  $f(a, b)$ , cuando  $a$  y  $b$  satisfacen ciertas condiciones, como la suma de dos términos, el primero de los cuales es una función elemental y el segundo es una serie convergente.

En el presente trabajo se consideran las integrales

$$f_p(a, b, c) = \int_0^b e^{cx} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{x^2 + p}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}}; \quad 0 \leq b \leq a \leq \infty, \quad p > 0, \quad c \geq 0$$

y

$$F_p(a, b, \mu) = \int_0^b (x^2 + p)^{-\mu} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{x^2 + p}} dx; 0 \leq b \leq a \leq \infty, p > 0, \mu \geq 0,$$

las cuales son generalizaciones de la integral de Hubbell. En la sección 2 se expresa  $f_p(a, b, c)$  como la suma de una función elemental y de una serie convergente en el intervalo  $0 < b < 1, b < a < \infty$ . A su vez, en la sección 3 se presentan cuatro diferentes desarrollos en serie de  $F_p(a, b, \mu)$ . Cada uno de estos desarrollos es válido para un intervalo específico de los parámetros  $a$  y  $b$ , como se indica en cada caso. Estas expresiones se utilizan luego para obtener expresiones asintóticas de  $f_p$  y  $F_p$  cuando  $b \rightarrow 0$ , permaneciendo  $a$  fijo, y cuando  $a \rightarrow \infty$ , manteniéndose  $b$  fijo.

### 1. LA INTEGRAL DE HUBBELL

En esta sección esbozaremos el problema planteado por un campo de radiación emanado de una fuente rectangular, problema estudiado por J. H. Hubbell, R. L. Bach, y J. C. Lamkin [8]. Esto, con el fin de ilustrar el origen de la integral de Hubbell

$$f(a, b) = \int_0^b \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (1.1)$$

en los problemas de radiación.

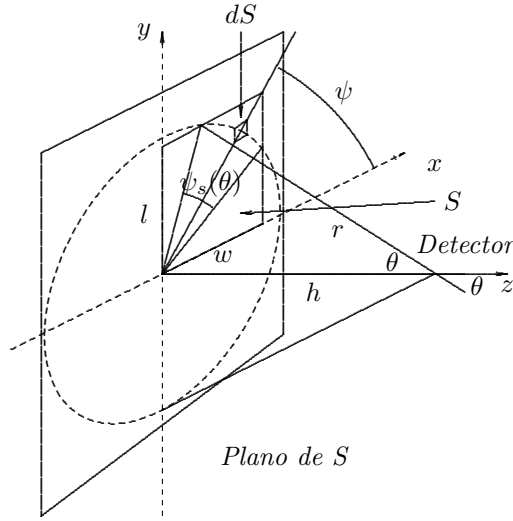


Figura 1.

La figura 1 muestra la situación de una superficie radiante rectangular  $S$ , de ancho  $w$  y longitud  $l$ , ubicada en el plano  $xy$ , y de un detector  $D$ , situado en el eje  $z$ , a una distancia  $h$  del origen de coordenadas. Las esquinas del rectángulo de la figura están en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(w, 0)$ ,  $(0, l)$ ,  $(w, l)$ .

Sea  $dS$  el elemento de área de la fuente de radiación correspondiente al ángulo de inclinación  $\theta$  formado por el eje  $z$  y la recta que une  $dS$  con el detector. Sean  $\mu$  el coeficiente de atenuación de la radiación y  $d\Omega_S(\theta)$  el ángulo sólido en el detector

subtendido por el elemento de area  $dS$  con inclinación  $\theta$  (Fig. 1). Sean  $\psi$  el ángulo azimutal y  $\psi_S(\theta)$  el rango total de  $\psi$  definido por la intersección del cono  $\theta$  con la superficie  $S$ . Consideraremos que el flujo de radiación a través de cada elemento de superficie  $dS$  es independiente de la posición de  $dS$  sobre la superficie  $S$  y que después de la emisión por la superficie no ocurre ninguna desviación.

La intensidad de radiación por ángulo sólido que penetra la superficie viajando en la dirección  $\theta$  con respecto al eje  $z$ , denominada “el flux”, está determinada por la función  $g(\cos \theta)$ ; la respuesta isotrópica del detector, denotada con  $I_S$ , es proporcional a una integral de  $g(\cos \theta)$  sobre el ángulo sólido total  $\Omega_S$ .

Así:

$$I_S = \int_S g(\cos \theta) d\Omega_S(\theta) \quad (1.2)$$

donde  $d\Omega_S = ds \cos \theta / r^2$ .

En coordenadas polares resulta [7],

$$I_S = \int_{-1}^1 g(\cos \theta) \Omega_S(\theta) d(\cos \theta). \quad (1.3)$$

Dado que la integración con respecto al ángulo sólido depende de las distancias relativas más que de las distancias absolutas, el número de parámetros se puede reducir dividiendo por  $h$  todas las dimensiones del rectángulo y sus coordenadas, introduciendo así los nuevos parámetros:  $a = \frac{w}{h}$ ,  $b = \frac{l}{h}$ ,  $\alpha = \frac{x}{h}$ , y  $\beta = \frac{y}{h}$ .

El uso de estas coordenadas escalares en la descripción de un problema típico de fuente rectangular se muestra en la figura 2.

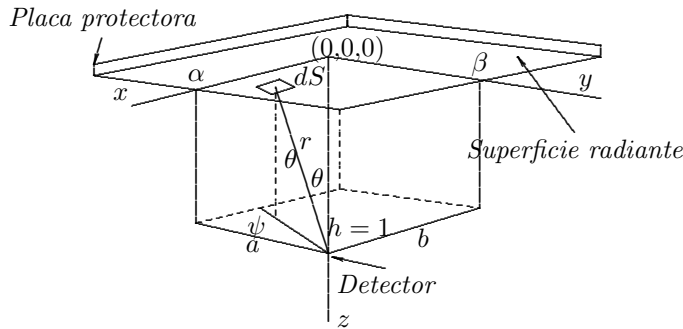


Figura 2.

El material radiactivo está distribuido uniformemente sobre la placa que sirve de techo a un refugio subterráneo, y el problema consiste en calcular la respuesta del detector a las radiaciones transmitidas por la porción de techo rectangular a todo lo que se encuentra debajo de él.

Para evaluar la integral (1.2), Hubbell [8] se basa en el hecho de que  $g(\cos \theta)$  puede ser representado como una suma de polinomios de Legendre,

$$g(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) g_k P_k(\cos \theta), \quad (1.4)$$

donde

$$g_k = \int_{-1}^1 g(\cos \theta) p_k(\cos \theta) d(\cos \theta),$$

así que la integral (1.3) puede expresarse como una suma de integrales elementales

$$I(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) g_k p_k(a, b), \quad (1.5)$$

donde los  $p_k(a, b)$  son los coeficientes del desarrollo

$$\psi(\theta, a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(a, b) p_k(\cos \theta).$$

Los  $p_k$ , los cuales son independientes de variables tales como la energía de la fuente, el grosor de la barrera, el material, etc., están dados por

$$p_k(a, b) = \int_S p_k(\cos \theta) d\Omega_S(\theta)$$

donde  $a$  y  $b$  especifican completamente la superficie  $S$ . Utilizando coordenadas cartesianas a través de las transformaciones (ver. [8])

$$\cos \theta = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}$$

$$d\Omega_S(\theta) = ds \cos \theta / r^2 = d\alpha d\beta (\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{-3/2}$$

se obtiene que

$$p_k(a, b) = \int_0^a d\alpha \int_0^b d\beta (\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{-3/2} p_k \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} \right). \quad (1.6)$$

La evaluación de estas integrales para  $k = 0, 1, 2, 3$  da los siguientes resultados:

$$p_0(a, b) = \tan^{-1} \left( \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \right) \quad (1.7)$$

$$p_1(a, b) = \frac{1}{2} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} \right) + \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \tan^{-1} \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \right] \quad (1.8)$$

$$p_2(a, b) = \frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \left\{ \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \right\}, \dots$$

El término  $p_0(a, b)$  aparece en Spencer [14] para una fuente rectangular difusa y un detector isotrópico y el  $p_1(a, b)$  lo hace con frecuencia en la teoría de la iluminación [3] y en la de intercambio de calor.

En el caso de radiaciones penetrantes, como la lluvia atómica, la convergencia de (1.4) resulta inadecuada, debido a la presencia de componentes de radiación no dispersada, las cuales tienen una distribución angular de la forma

$$g^\circ(\zeta, \cos \theta) = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\exp(\zeta / \cos \theta)}{\cos \theta}, \quad (1.9)$$

donde el simbolo  $g^\circ$  representa radiaciones no dispersadas,  $\sigma$  es la densidad por unidad de superficie del material radiactivo y  $\zeta$  es el espesor de la fuente.

Cuando  $\zeta$  es pequeño,

$$g_0(\zeta, \cos \theta) \approx \frac{\sigma}{4\pi \cos \theta},$$

así que si  $0 \leq \zeta \leq 1$ , los  $g_k^\circ(\zeta)$  correspondientes a los  $g_k$  no convergen rápidamente. Un desarrollo alternativo usado en este caso es

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n q_n(a, b). \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.9) en (1.1), se obtiene [8] que

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_S dS/r^2 \exp(-\zeta/\cos \theta). \quad (1.11)$$

No se ha tenido éxito en la obtención de una expresión de (1.11) en forma cerrada. Sin embargo, desarrollando el integrando en (1.11) en serie de potencias de  $\zeta$  e integrando término a término, los coeficientes  $q_n(a, b)$  de la serie de potencias en (1.10) pueden ser numéricamente evaluados, lo cual sugiere una convergencia adecuada de (1.10). Para evaluar explícitamente  $q_0$ ,  $q_1$  y  $q_2$ , obsérvese que la integral (1.10) puede escribirse en coordenadas cartesianas, en la forma

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^a d\alpha \int_0^\beta \frac{\exp(-\zeta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1})}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} d\beta. \quad (1.12)$$

La sustitución  $\alpha = \sqrt{\beta^2 + 1} \tan \mu$  conduce a que

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^b \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \int_0^{\tan^{-1}(a/\sqrt{\beta^2+1})} \exp(-\zeta\sqrt{\beta^2 + 1} \sec \mu) d\mu \quad (1.13)$$

y, desarrollando la exponencial como una serie de potencias de su argumento, a que

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^b \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \int_0^{\tan^{-1}(a/\sqrt{\beta^2+1})} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\zeta\sqrt{\beta^2 + 1} \sec \mu)^n \right] d\mu \quad (1.14)$$

Las integrales de las primeras potencias de  $\sec \mu$  aparecen en tablas de integrales, obteniéndose de esta manera que

$$I^\circ(\zeta, a, b) = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - \zeta \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) - \frac{\zeta^2}{2!} a \right. \\ \left. - \frac{\zeta^3}{3!} \left[ \frac{a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}{2} \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) \right] + \dots \right\} d\beta \quad (1.15)$$

lo cual es un desarrollo en serie de potencias de  $\zeta$  de la forma de (1.9), en el cual

$$\begin{aligned} q_0(a, b) &= \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) d\beta, \\ q_1(a, b) &= \int_0^b \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) d\beta, \\ q_2(a, b) &= \frac{a}{2!} \int_0^b d\beta, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.16)$$

La evaluación de  $q_0(a, b)$  en forma cerrada no ha sido posible, así que la evaluación de la integral

$$I(a, b) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^b \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \right) \cdot \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}}, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (1.17)$$

la cual representa la respuesta de un detector de radiación omnidireccional, es un problema abierto, el cual, como lo hemos mencionado, fue planteado por Hubbell [8].

## 2. PRIMERA GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DE HUBBELL

Motivados por las múltiples aplicaciones de la integral (1.1), diversos autores han sugerido generalizaciones de la misma. Por ejemplo, S. L. Kalla [11] ha introducido la función  $H \left[ \begin{matrix} a, & b, & p, & \lambda \\ \alpha, & \beta, & \sigma \end{matrix} \right]$  definida por

$$H \left[ \begin{matrix} a, & b, & p, & \lambda \\ \alpha, & \beta, & \sigma \end{matrix} \right] = \frac{\sigma a}{4\pi} \int_0^b x^\lambda (x^2 + p)^{-\alpha} {}_2F_1 \left( \alpha, \beta; \gamma; -\frac{a^2}{x^2 + p} \right) dx \quad (2.1)$$

bajo las hipótesis  $p, a, b > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ ,  $-1 < \lambda < 1$ , donde

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.2)$$

con  $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$ , siendo  $\Gamma$  la función gamma, es la función hipergeométrica.

Para valores particulares de los parámetros,  $H$  se reduce a la integral de Hubell. Por ejemplo, si  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 3/2$ ,  $p = 1$ , entonces

$$H \left[ \begin{matrix} a, & b, & 1, & 0 \\ 1, & 1/2, & 3/2 \end{matrix} \right] = \int_0^b \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(a, b),$$

en virtud de la identidad hipergeométrica

$$\tan^{-1} z = z {}_2F_1(1, 1/2; 3/2; -z^2) \quad (2.3)$$

[12, p. 259]. En esta sección daremos una primera generalización de la integral de Hubbell y derivaremos una representación de dicha integral como la suma de dos términos: el primero comprende funciones elementales; el segundo es, cuando los parámetros satisfacen ciertas condiciones, un desarrollo en serie convergente.

**Definición 2.1.** Definimos  $f_p(a, b, c)$  por

$$f_p(a, b, c) := \int_0^b e^{cx} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{x^2 + p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} \quad (2.4)$$

donde  $0 \leq b \leq a \leq \infty$ ,  $p > 0$ ,  $c \geq 0$ .

La función  $f_p(a, b, c)$  se reduce a la integral de Hubbell haciendo  $c = 0$  y  $p = 1$ .

**Teorema 2.1.** Sea  $f_p(a, b, c)$  definida por (2.4). Entonces,

$$f_p(a, b, c) = \frac{1}{c\sqrt{p}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} (1 - e^{-cb}) + ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1}} e^{-cb} \cdot \left[ \frac{\Gamma(2k)}{(cb)^{2k+1}} - \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{j!}{(cb)^{j+1}} \right] {}_2F_1 \left( k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p} \right), \quad (2.5)$$

siempre que  $0 < b \leq 1$ ,  $b < a < \infty$ ,  $p > 0$ ,  $c > 0$ .

*Demostración.* Puesto que

$$\frac{d}{da} \left\{ \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p+x^2}} \right\} = \frac{1}{p+x^2+a^2},$$

entonces

$$f_p(a, b, c) = \int_0^b e^{-cx} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p+x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{p+x^2}} = \int_0^b e^{-cx} \int_0^a \frac{dy dx}{p+x^2+y^2}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo  $x$  por  $bx$  y  $gy$  por  $ay$  en (2.6) se obtiene que

$$f_p(a, b, c) = ab \int_0^b e^{-cbx} \int_0^1 \frac{dy dx}{p+b^2x^2+a^2y^2}. \quad (2.7)$$

Factorizando el denominador en la forma

$$p+b^2x^2+a^2y^2 = (p+a^2y^2) \left( 1 + \frac{b^2x^2}{p+a^2y^2} \right) \quad (2.8)$$

y teniendo en cuenta que  $a > b$ , se llega a que

$$(p+b^2x^2+a^2y^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k} x^{2k}}{(p^2+a^2y^2)^{k+1}}. \quad (2.9)$$



Insertando en (2.7) el desarrollo en (2.9) se obtiene para el término  $I_1$  correspondiente a  $k = 0$  que

$$\begin{aligned} I_1 &= ab \int_0^1 e^{-cbx} \int_0^1 \frac{dydx}{p+a^2y^2} = \frac{b}{\sqrt{p}} \int_0^1 e^{-cbx} \left[ \tan^{-1} \frac{ay}{\sqrt{p}} \right]_0^1 dx \\ &= \frac{b}{\sqrt{p}} \int_0^1 e^{-cbx} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} dx = \frac{-1}{c\sqrt{p}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} e^{-cbx} \Big|_0^1 \\ &\quad \frac{1}{c\sqrt{p}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} (1 - e^{-cb}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

y para los términos restantes,  $I_2$ , que

$$I_2 = ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1}} \int_0^1 e^{-cbx} x^{2k} dx \int_0^1 (p+a^2y^2)^{k+1} dy.$$

Haciendo  $y^2 = t$  en esta última expresión, ésta toma la forma

$$I_2 = ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1}} \int_0^1 e^{-cbx} x^{2k} dx \int_0^1 (p+a^2t)^{k+1} \frac{1}{2} \sqrt{t} dt$$

la cual, mediante el uso de (2.2) y de la representación integral de Euler de  ${}_2F_1$  [12, p. 240], se puede escribir como

$$I_2 = ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1}} \cdot \int_0^1 e^{-cbx} x^{2k} dx \cdot \frac{1}{2} {}_2F_1 \left( k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{p} \right).$$

La integral en esta expresión se puede evaluar mediante [5, pág. 137], obteniéndose finalmente que

$$I_2 = ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1}} e^{-cb} \left[ \frac{\Gamma(2k)}{(cb)^{2k+1}} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \right] {}_2F_1 \left( k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p} \right) \quad (2.11)$$

siempre y cuando  $0 < b < 1$ ,  $b < a < \infty$ ,  $p > 0$ ,  $c > 0$ , que, junto con (2.10), da el resultado buscando en (2.5).  $\checkmark$

Obsérvese que pasando al límite en (2.10) se obtiene que

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-cb}}{c} \frac{\tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} = \lim_{c \rightarrow 0} b e^{-cb} \frac{\tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} = \frac{b \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},$$

y haciendo lo mismo en (2.11), que

$$\lim_{c \rightarrow 0} ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k} e^{-cb}}{p^{k+1}} \left[ \frac{\Gamma(2k)}{(cb)^{2k+1}} - \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{j!}{(cb)^{j+1}} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \cdot {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k) b^{2k}}{p^{k+1} \Gamma(2k+1)} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{k+1} (2k+1)} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right),
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce, con  $p = 1$ , la expresión

$$f(a, b) = b \tan^{-1}(a) + ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -a^2\right) \quad (2.12)$$

dada por Gabutti [4].

Del desarrollo en serie (2.5) se obtiene inmediatamente la expresión asintótica

$$f_p(a, b, c) \sim \frac{1}{c\sqrt{p}} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} (1 - e^{-cb}), \quad b \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

para  $a$  fijo.

### 3. SEGUNDA GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DE HUBBELL

Daremos ahora otra generalización de la integral de Hubbell, la cual denotaremos con  $F_p(a, b, \mu)$ .

**Definición 3.1.** Si  $0 \leq b \leq a \leq \infty$ ,  $\mu > 0$ , definimos

$$F_p(a, b, \mu) := \int_0^b (x^2 + p)^{-\mu} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{x^2 + p}} dx. \quad (3.1)$$

Es fácil ver que  $F_p(a, b, \mu)$  se reduce a la integral de Hubbell  $f(a, b)$  cuando  $p = 1$  y  $\mu = \frac{1}{2}$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $F_p(a, b, \mu)$  definida por (3.1). Entonces

$$\begin{aligned}
(i) F_p(a, b, \mu) &= \frac{b}{p^\mu} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) + \\
&+ ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{\mu+k+\frac{1}{2}} (2k+1)} \cdot {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) \\
&\quad \cdot {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right)
\end{aligned} \quad (3.2)$$

siempre que  $0 \leq b < 1$  y  $b \leq a < \infty$ , y

$$\begin{aligned}
(ii) F_p(a, b, \mu) &= \frac{\pi}{2} b p^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) - \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+1/2-\mu}}{a^{2k} (2k+1)} \\
&{}_2F_1\left(\mu - k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right)
\end{aligned} \quad (3.3)$$

cuando  $0 \leq b < \infty$  y  $\sqrt{p+b^2} \leq a \leq \infty$ . Además

$$(iii) F_p(a, b, \mu) = \frac{\pi}{2} b p^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) - \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)^2} \cdot \frac{1}{(a^2+p)^k} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; k + \frac{3}{2} - \frac{p}{a^2}\right) {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) \quad (3.4)$$

bajo la condición  $0 \leq b \leq \infty$ ,  $b \leq a \leq \infty$ , y

$$(iv) F_p(a, b, \mu) = \frac{\pi}{2} b p^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) - \frac{b}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+1/2-\mu}}{a^{2k}(2k+1)} \cdot {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, k + 1; \frac{3}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right) \quad (3.5)$$

cuando  $b^2 \leq a^2$ ,  $0 \leq b < \infty$ , y  $\max(1, b) \leq a \leq \infty$ .

*Demostración.* (i) Puesto que

$$\frac{d}{da} \left\{ \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p+x^2}} \right\} = \frac{1}{p+x^2+a^2},$$

$F_p(a, b, \mu)$  puede representarse en la forma

$$F_p(a, b, \mu) = \int_0^b \int_0^a (p+x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} \frac{dy dx}{p+x^2+y^2}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo  $x$  por  $bx$  y  $y$  por  $by$  obtenemos que

$$F_p(a, b, \mu) = ab \int_0^1 \int_0^1 (p+b^2x^2+a^2y^2)^{-1} (p+b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dy dx \quad (3.7)$$

y de

$$(p+b^2x^2+a^2y^2)^{-1} = (p+a^2y^2)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b^2x^2}{p+a^2y^2}\right)^{-1} = (p+a^2y^2)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k} x^{2k}}{(p+a^2y^2)^k}, \quad (3.8)$$

que

$$F_p(a, b, \mu) = ab \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^{2k} \int_0^1 (p+b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} x^{2k} dx \int_0^1 (p+a^2y^2)^{-k-1} dy.$$

Haciendo ahora  $t = y^2$ ,  $z = x^2$ , se obtiene que

$$F_p(a, b, \mu) = ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k} p^{-\frac{1}{2}-\mu-k}}{4} \int_0^1 \left(1 + \frac{b^2z}{p}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} z^{k-\frac{1}{2}} dz \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{a^2t}{p}\right)^{-k-1} t^{-1/2} dt,$$

y calculando la integral con respecto a  $t$  mediante la representación integral de Euler [12. p. 240]

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt \quad (3.9)$$

con  $\beta - 1 = -1/2$ ,  $\gamma - \beta - 1 = 0$ ,  $\alpha = k + 1$ , y  $\frac{a^2}{p} = z$ , o sea, con  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 3/2$ ,  $z = -\frac{a^2}{p}$ , y  $\alpha = k + 1$ , y la integral con respecto a  $z$ , también mediante (3.9), con  $\beta - 1 = k - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma - \beta - 1 = 0$ ,  $-\alpha = \frac{1}{2} - \mu$  y  $z = -\frac{b^2}{p}$ , o sea, con  $\beta = k + \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = k + \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = \mu - \frac{1}{2}$  y  $z = -\frac{b^2}{p}$ , se obtiene, bajo las hipótesis hechas sobre  $a, b$  para (i) y recordando que  $\Gamma(R + 1) = R\Gamma(R)$ , que

$$\begin{aligned} F_p(a, b, \mu) &= \frac{ab}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^{2k} p^{-\mu-k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} {}_2F_1\left(k+1, 1/2; 3/2; -\frac{a^2}{p}\right) \\ &\quad \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+3/2)} {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) \\ &= ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)p^{\mu+k+\frac{1}{2}}} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right) \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right). \end{aligned}$$

Separaremos en dos términos. El primero,  $I_1$ , correspondiente a  $k = 0$ , toma, usando la identidad (2.3), la forma

$$I_1 = \frac{b}{p^\mu} \cdot \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} \cdot {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right). \quad (3.10)$$

El segundo,  $I_2$ , que agrupa los términos de orden  $k \geq 1$ , se escribe

$$\begin{aligned} I_2 &= ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{p^{\mu+k+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2k+1)} {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a^2}{p}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

bajo las hipótesis  $0 \leq b < 1$ ,  $b \leq a < \infty$ . Esto y (3.10) demuestran (i).

Nótese que para  $\mu = \frac{1}{2}$  y  $p = 1$ , (3.2) se reduce a la expresión

$$f(a, b) = b \tan^{-1} a + ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -a^2\right), \quad (3.12)$$

dada por Gabutti [4].

(ii) Para demostrar (3.3) hacemos  $t = ay$  en (3.6) obteniéndose que

$$F_p(a, b, \mu) = b \int_0^1 \int_0^a (p + b^2x^2 + t^2)^{-1} (p + b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dt dx .$$

Expresando la integral interior como suma de dos integrales, se llega a que

$$\begin{aligned} F_p(a, b, \mu) &= b \int_0^1 \int_0^\infty (p + b^2x^2 + t^2)^{-1} (p + b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dt dx \\ &\quad - b \int_0^1 \int_a^\infty (p + b^2x^2 + t^2)^{-1} (p + b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dt dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

y usando en la primera integral,  $I_1$ , que

$$(p + b^2x^2 + t^2)^{-1} (p + b^2x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} = (p + b^2x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{t^2}{p + b^2x^2} \right)^{-1} ,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= b \int_0^1 (p + b^2x^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + \left( \frac{t}{\sqrt{p+b^2x^2}} \right)^2} \\ &= b \int_0^1 (p + b^2x^2)^{-\mu} \tan^{-1} \left( \frac{t}{\sqrt{p+b^2x^2}} \right) \Big|_0^\infty dx \\ &= \frac{\pi}{2} b \int_0^1 (p + b^2x^2)^{-\mu} dx = \frac{\pi}{2} b \int_0^1 p^{-\mu} \left( 1 + \frac{b^2x^2}{p} \right)^{-\mu} dx . \end{aligned}$$

Haciendo  $z = x^2$  y usando la representación integral (3.9) con  $\alpha = \mu$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{3}{2}$  y  $t = -\frac{b^2}{p}$ , es decir, usando (3.9) aplicada a

$$\int_0^1 p^{-\mu} \left( 1 + \frac{b^2z}{p} \right)^{-\mu} \frac{1}{2} z^{-1/2} dz ,$$

se obtiene que

$$I_2 = \frac{\pi}{2} b p^{-\mu} {}_2F_1 \left( \mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p} \right) .$$

A su vez, haciendo  $t = \frac{a}{y}$  en la segunda integral,  $I_2$ , en (3.13), resulta que

$$I_2 = ab \int_0^1 \int_0^1 (py^2 + b^2x^2y^2 + a^2)^{-1} (p + b^2x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}} dy dx . \quad (3.15)$$

Observando ahora que

$$\begin{aligned} (py^2 + b^2x^2y^2 + a^2)^{-1} \cdot (p + b^2x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}} &= a^{-2} \left( \frac{y^2}{a^2} (p + b^2x^2) + 1 \right)^{-1} . \\ (p + b^2x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}} &= a^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{a^{2k}} (p + b^2x^2)^{k-\mu+\frac{1}{2}} , \end{aligned}$$

(3.15) se puede escribir, luego de intercambiar el orden de la integración y la adición, en la forma

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k-\mu+\frac{1}{2}}}{a^{2k}} \int_0^1 y^{2k} dy \int_0^1 \left(1 + \frac{b^2 x^2}{p}\right)^{k-\mu+\frac{1}{2}} dx,$$

o sea, integrando con respecto a  $y$ , en la forma

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k-\mu+\frac{1}{2}}}{a^{2k}} \frac{1}{(2k+1)} \int_0^1 \left(1 + \frac{b^2 x^2}{p}\right)^{k-\mu+\frac{1}{2}} dx.$$

Si ahora hacemos  $t = x^2$  obtenemos que

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k-\mu+\frac{1}{2}}}{(2k+1)a^{2k}} \int_0^1 \left(1 + \frac{b^2 t}{p}\right)^{k-\mu+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$$

que contiene la representación integral (3.9) con  $\alpha = \mu - k - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 3/2$  y  $z = -b^2/p$ . Entonces,

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k-\mu+\frac{1}{2}}}{(2k+1)a^{2k}} {}_2F_1\left(\mu - k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right) \quad (3.16)$$

siempre que  $0 \leq b < \infty$ ,  $\sqrt{p+b^2} \leq a \leq \infty$ . Esto y (3.14) demuestran (ii).

Nótese que para  $\mu = \frac{1}{2}$  y  $p = 1$ , (3.3) se reduce a la expresión

$$f(a, b) = \frac{\pi}{2} \arcsen h(b) - \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)a^{2k}} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -b^2\right), \quad (3.17)$$

también dada en Gabutti [4].

(iii) Para demostrar (3.4) partimos de la segunda integral,  $I_2$ , en (3.13), para obtener, después del cambio de variable  $t = 1/y$ , y usando (2.8), que

$$I_2 = ab \int_0^1 \int_0^1 (py^2 + a^2)^{-1} \left(1 + \frac{b^2 x^2 y^2}{py^2 + a^2}\right)^{-1} (p + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dy dx$$

de lo cual mediante la representación en serie (2.9) se llega a que

$$I_2 = ab \int_0^1 \int_0^1 (py^2 + a^2)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k} x^{2k} y^{2k}}{(py^2 + a^2)^k} (p + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dy dx,$$

y cambiando el orden de integración y adición, dada la convergencia uniforme y absoluta de las integrales involucradas, a que

$$I_2 = ab \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (a^2 + py^2)^{-k-1} y^{2k} \int_0^1 x^{2k} (p + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}-\mu} dx dy .$$

Con los cambios de variable  $y^2 = t$  y  $x^2 = z$ , esta última expresión se transforma en

$$I_2 = ab \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^{2k} a^{-2(k+1)} \int_0^1 \left(1 + \frac{pt}{a^2}\right)^{-k-1} \frac{1}{2} t^{k-\frac{1}{2}} dt \\ \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} z^{k-\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}-\mu} \left(1 + \frac{b^2 z}{p}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} dz,$$

y usando (3.9) con  $\alpha = k + 1$ ,  $\beta = k + \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = k + \frac{3}{2}$ ,  $z = -\frac{p}{a^2}$  para la integral en  $t$  y  $\alpha = \mu - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = k + \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = k + \frac{3}{2}$ ,  $z = -\frac{b^2}{p}$  para aquella en  $z$ , esta expresión se puede escribir a su vez como

$$I_2 = ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)a^{2k+2}} {}_2F_1\left(k+1, k+\frac{1}{2}; k+\frac{3}{2}; -\frac{p}{a^2}\right) \frac{1}{2k+1} \\ \cdot {}_2F_1\left(\mu-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}; k+\frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right).$$

Ahora, mediante la fórmula de Euler

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z) \quad (3.18)$$

[12. p. 248] se deduce que

$${}_2F_1\left(k+1, k+\frac{1}{2}; k+\frac{3}{2}; -\frac{p}{a^2}\right) = \left(\frac{a^2+p}{a^2}\right)^k {}_2F_1\left(1/2, 1; k+\frac{3}{2}; -\frac{p}{a^2}\right),$$

lo cual nos permite concluir que

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k}}{(2k+1)^2} \frac{1}{(a^2+p)^k} {}_2F_1\left(1/2, 1; k+\frac{3}{2}; -\frac{p}{a^2}\right) \\ \cdot {}_2F_1\left(\mu-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}; k+\frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right). \quad (3.19)$$

De esto y de (3.14), (3.4) resulta inmediatamente. Esto demuestra (iii).

Un caso particular de (3.4) es la expresión

$$f(a, b) = \frac{\pi}{2} \operatorname{arcsen}h(b) - \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(1+a^2)^k (2k+1)} \\ \cdot {}_2F_1\left(1/2, 1; k+\frac{3}{2}; -\frac{1}{a^2}\right) \quad (3.20)$$

dada por Gabutti [4], la cual se obtiene cuando en (3.4) se hacen  $p = 1$ ,  $\mu = 1/2$ .

(iv) Para demostrar (3.5) partimos nuevamente de la segunda integral  $I_2$  en (3.13), pero esta vez factorizamos  $(a^2 + b^2 x^2 y^2)$  en el integrando:

$$I_2 = ab \int_0^1 \int_0^1 \frac{(p + b^2 x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{a^2 + py^2 + b^2 x^2 y^2} dx dy = \\ = ab \int_0^1 \int_0^1 (p + b^2 x^2)^{-\mu+\frac{1}{2}} (a^2 + b^2 x^2 y^2)^{-1} \left(1 + \frac{py^2}{a^2 + b^2 x^2 y^2}\right) dx dy$$

Suponiendo que  $a$  y  $b$  satisfacen las condiciones exigidas por (iv) tenemos entonces que

$$I_2 = ab \int_0^1 \int_0^1 (p + b^2 x^2)^{-\mu + \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^k y^{2k}}{(a^2 + b^2 x^2 y^2)^{k+1}} dy dx$$

y cambiando el orden de integración y adición (en virtud de la convergencia uniforme y absoluta de las series involucradas), que

$$I_2 = ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+\frac{1}{2}-\mu}}{a^{2k+2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left(1 + \frac{b^2}{p} x^2\right)^{\frac{1}{2}-\mu} y^{2k}}{\left(1 + \frac{b^2 y^2}{a^2} x^2\right)^{k+1}} dx dy.$$

Haciendo  $x^2 = t$  se llega a que

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+\frac{1}{2}-\mu}}{a^{2k}} \int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^{2k} \left(1 + \frac{b^2}{p} t\right)^{\frac{1}{2}-\mu}}{\left(1 + \frac{b^2 y^2}{a^2} t\right)^{k+1}} t^{-1/2} dt dy,$$

y utilizando nuevamente (3.9), a que

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+\frac{1}{2}-\mu}}{a^{2k}} \int_0^1 y^{2k} {}_2F_1\left(k+1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2 y^2}{a^2}\right) dy.$$

Recordando ahora la expresión [6, pág. 158, A.1.1.51]

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mu^{\alpha-1} (1-\mu)^{e-1} {}_2F_1\left(b, \frac{d+e}{2}; c; x\mu^2\right) \\ &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma(d+e)} {}_3F_2\left(b, \frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}; c; \frac{d+e+1}{2}; x\right), \quad d, e > 0, |x| < 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

y haciendo  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{3}{2}$ ,  $d = 2k + 1$ ,  $e = 1$ ,  $x = -\frac{b^2}{a^2}$ , obtenemos finalmente que

$$I_2 = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{k+\frac{1}{2}-\mu}}{a^{2k}(2k+1)} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, k + 1; \frac{3}{2}; k + \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right), \quad (3.22)$$

de lo cual, conjuntamente con (3.14), (3.5) resulta inmediatamente.

Nótese que para  $\mu = \frac{1}{2}$  y  $p = 1$ , (3.5) se reduce a la expresión

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{arcsenh}(b) - \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{2k}(2k+1)} \\ &\quad \cdot {}_3F_2\left(k + \frac{1}{2}, k + 1, \frac{1}{2}; k + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

válida siempre que  $0 \leq b < \infty$ ,  $\max(1, b) \leq a \leq \infty$  (Gabutti [4]).  $\checkmark$



De las series establecidas en el Teorema 2.1 es fácil derivar expresiones asintóticas de la integral (3.1).

Por ejemplo, de (3.3) se deduce que

$$f_p(a, b, \mu) \sim \frac{b}{p^\mu} \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{p}} {}_2F_1\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right), b \rightarrow 0, a \text{ fijo}, \quad (3.24)$$

y de (3.5) ó (3.7), que

$$f_p(a, b, \mu) \sim \frac{\pi}{2} b p^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{p}\right), a \rightarrow \infty, b \text{ fijo}, \quad (3.25)$$

**Agradecimientos.** Expresamos nuestros agradecimientos al profesor Syam L. Kalla por haber sugerido la idea de investigar el tema del que trata este artículo, y al revisor, por múltiples observaciones, que contribuyeron a mejorar la presentación del mismo.

## REFERENCIAS

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York N. Y., 1972.
- [2] BERGER, M. J., LAMKIN, J. C., *Calculations of gamma ray penetration into shelters, Contribution to sky shine and roof contamination*, J. Research, National Bureau of Standards 109 (1958), R. P. 2827.
- [3] BOAST, W. B., *Illumination Engineering*, Mc. Graw-Hill, New York, N. Y., 1942.
- [4] GABUTTI, B., KALLA, S. AND HUBBELL, J., *Some expansions related to the Hubbell rectangular-source integral*, Universita de Torino, Instituto de Calculo Numerici, Torino Italy, 1985.
- [5] GRANDSHTEYN, I. S. AND RYZHIK, J. M., *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, London, 1980.
- [6] GLASSER, M. L., *Solution to problem 83-6, a Rectangular Source, by J. H. Hubbell (Siam Review 25 (1983), p. 267)*, Siam Review **26** (1984), 276-278.
- [7] EXTON, H. B., *Handbook of Hypergeometric Integrals*, Ellis Horwood, London, 1978.
- [8] HUBBELL, J. H., BOCH., R. L., LAMKIN, J. C., *Radiation field from a rectangular source*, Journal of Research, National Bureau of Standards **640** (1960), 121-138.
- [9] HUBBELL, J. H., BOCH., R. L., HERBOLD, R. J., *Radiation flux from a circular disk source*, Journal of Research, National Bureau of Standards **65C** (1961), 249-264.
- [10] JORDAN, W. B., *Solution to problem 83-6, a Rectangular Source, by J. H. Hubell (Siam Review 25(1983), p. 267)*, Comunicación privada.
- [11] KALLA, S. L., AL-SAQABI, B., CONDE, S., *Some results related to the radiation-field integral*, Hadronic Journal **10** (1987), 221-230.
- [12] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, N. Y., 1972.
- [13] LOSSER, O. P., *Solution to Problem 83-6, a Rectangular Source, by J. H. Hubell (Siam Review 25 (1983), p. 267)*, (Comunicación Privada).
- [14] SELPH, W. E., CLAIBORNE, H. C., *ORNL. RSCI-120* (1968), ?.
- [15] SHAEFFER, M. N., *Reactor shielding for nuclear engineering*, Reports US. AEC. (1973), 362.
- [16] SIDI A., *Solution to problem 83-6, a Rectangular Source, by J. H. Hubbell (Siam Review 25(1983), p. 267)*, Comunicación privada.
- [17] SPENCER, L. V., *Structure shielding against fallout radiation from nuclear weapons*, National Bureau of Standards Monographs.
- [18] TAMAKOSHI, H. AND ITOH, Y., *Errors found in expressions given by Sheffer and Selph for radiation Flux in a rectangular straight duct*, Journal of Nuclear Science and Technology **24** (1987), 881-886.

(Recibido en noviembre de 1993; revisado en mayo de 1995)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
 UNIVERSIDAD DEL ZULIA  
 MARACAIBO, VENEZUELA  
 e-mail: ngarrido@europa.ica.luz.ve