Dalcín, M. (2016). Paradigmas para pensar la creación y fundamentación geométrica. *Reloj de agua*, 13, 21-34.

Paradigmas para pensar la creación y fundamentación geométrica

Mario Dalcín[1]

RESUMEN

Se comunica una experiencia de indagación y fundamentación en el ámbito de la geometría euclidiana que tuvo como punto de partida un cuadrilátero y los puntos de intersección de las rectas que contienen a sus lados opuestos. Los paradigmas geométricos propuestos por Houdement y Kuzniak (1999) y Kuzniak (2006) se usan para ubicar grosso modo los argumentos puestos en juego en la creación y fundamentación de las ideas geométricas que se manejaron en la experiencia.
PALABRAS CLAVES: paradigmas geométricos, fundamentación geométrica.

ABSTRACT

We communicate an experience of inquiry and foundation in the field of Euclidean geometry which had as its starting point a quadrilateral and the points of intersection of the lines that include opposite sides. The geometric paradigms proposed by Houdement and Kuzniak (1999) and Kuzniak (2006) are used to locate roughly the arguments brought into play in the creation and foundation of geometric ideas that were handled on experience.
KEYWORDS: geometric paradigms, geometric reasoning.

INTRODUCCIÓN

Este artículo busca comunicar parte de una experiencia de indagación en el ámbito de la geometría euclidiana. Dicha indagación se desarrolló durante tres meses, los comprendidos entre mediados de febrero y mediados de mayo de 2016. Al iniciar la experiencia –en forma individual– me propuse registrar la forma en que iba trabajando, es decir anotando las ideas y preguntas que se me iban ocurriendo y lo que hacía para responder dichas preguntas, el tiempo diario o semanal que le dedicaba así como los momentos del día que me involucraba en la tarea. Todo esto lo fui registrando en un diario escrito en *Word* que tiene alrededor de cuarenta páginas así como en archivos de *The Geometer's Sketchpad* que contienen figuras dinámicas que dan cuenta de las construcciones y

[1] Profesor de Educación Media en la Especialidad Matemática (IPA), Magíster en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Actualmente Profesor de Geometría en el Instituto de Profesores Artigas.

mediciones que fui realizando en el transcurso de la experiencia. Parte de este diario fue expuesto en el 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática y puede leerse en Dalcín (en prensa). En el presente artículo rescato centralmente la parte geométrica del diario mencionado, dejando en un segundo plano los aspectos emocionales.

UN REFERENTE TEÓRICO

En Houdement y Kuzniak (1999), así como en Kuzniak (2006), se proponen tres paradigmas para concebir el trabajo geométrico:

- Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.
- Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.
- Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Obsérvese que estos tres paradigmas dan cabida a todo trabajo geométrico que pueda concebirse, desde el que pueda realizar un niño en la enseñanza primaria hasta el que pueda realizar un matemático en el ámbito de la geometría. Estas Geometría I, Geometría II y Geometría III no deben concebirse como una jerarquía donde la Geometría II es mejor que la Geometría I y a su vez la Geometría III es mejor que la Geometría II, sino como tres geometrías posibles que nos pueden permitir reconocer en cuál de estas geometrías estamos trabajando en cada momento.

PRIMERA PARTE

> “12 de febrero. La verdad que no sé cómo se dio el enganche de lo anterior con esto que sigue. Lo que sí sé es que ayer volví a enredarme con un cuadrilátero ABCD –consideré uno convexo– y los puntos L y M de corte de sus lados opuestos. No recuerdo por qué construí las circunferencias circunscritas a algunos –no sé decir cuáles ni por qué– de los triángulos determinados por los seis puntos. Y me llamaron la atención cuatro de estos centros, los correspondientes a los triángulos LBD, LCD, LAB, LAC, que pueden verse en la figura 1, figura de la cual se eliminaron otras circunferencias y sus centros que no vienen al caso para mostrar lo que me llamó la atención.

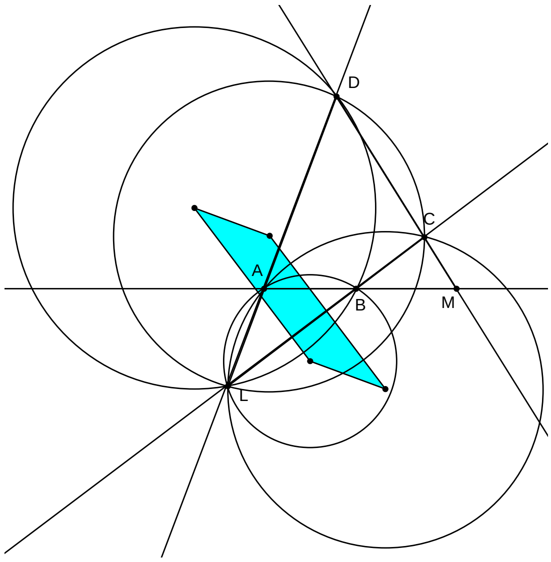

Fig. 1

¿Había visto esto antes? No lo creía. La verdad que en caso de haberlo visto antes no lo recordaba para nada. Ayer fue un día en el que hice varias vueltas fuera de casa, algunas más por obligación, otras más por placer, y en la tarde tuve un rato en el que estuve haciendo esta figura. Me alegré de encontrarle una explicación a por qué surgía el paralelogramo que se veía. Me fui aclarando al ir escribiéndolo en un papel."

Observemos que en lo recogido en esta parte del diario mi pensamiento estuvo trabajando en el ámbito de la Geometría I al haber identificado visualmente la presencia de cuatro puntos (en medio de unos cuantos más que no se incluyen en la figura) que me parecían eran vértices de un paralelogramo. Seguí pensando en el ámbito de la Geometría I al construir el cuadrilátero, resaltar su interior y arrastrar alguno de los puntos originales A, B, C, D para constatar que visualmente se mantenía el paralelogramo. Pasé a pensar en el ámbito de la Geometría II cuando busqué una explicación de por qué en esas condiciones surgía el paralelogramo y luego de recurrir a un papel para hacer anotaciones conseguí elaborar una demostración. Dejo al lector la posibilidad de poner en juego sus propias ideas en el ámbito de la Geometría II para demostrar que el paralelogramo que ve con los ojos en la Geometría I también es un paralelogramo en la Geometría II.

"¿Habría otros paralelogramos? Ahí fue que me surgió la pregunta de ¿cuántos triángulos había en la configuración de los puntos A, B, C, D, L, M?"

Nuevamente dejo al lector la posibilidad de que elabore su propia respuesta a estas preguntas, sobre todo a la segunda. En mi caso, que tengo una especial aversión a los problemas de contar, confieso que di con una respuesta que me satisfizo definitivamente recién después de varios intentos fallidos y de haber estado convencido de varias respuestas intermedias que posteriormente me daba cuenta eran erradas. Al formularme la segunda pregunta confiaba en que teniendo todos los triángulos posibles tendría que construir todos sus respectivos circuncentros y de esa manera podría construir nuevos paralelogramos. Pero de hecho seguí otro camino.

> "En cuanto abrí *Sketchpad* pudo más el buscar otro paralelogramo y procediendo por analogía con el que ya tenía hecho –después de algunos fracasos que oculto– lo obtuve, lo hice aparecer."

Los triángulos considerados en esta ocasión fueron MBD, MAD, MCB, MCA (Fig. 2).

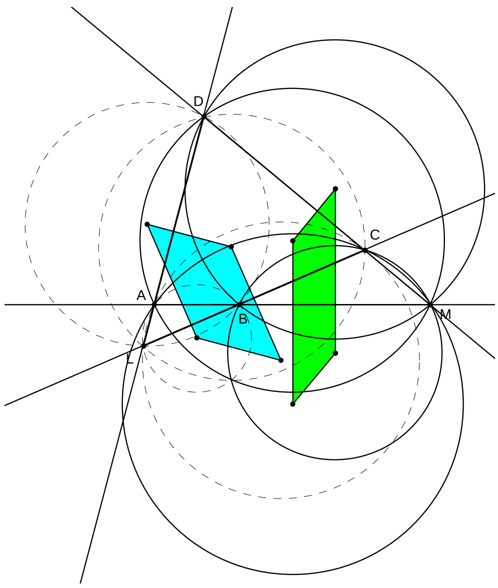

Fig. 2

Seguía sin saber cuántos eran todos los triángulos que se podían formar a partir de los seis puntos iniciales A, B, C, D, L, M. A pesar de esto seguí identificando triángulos y construyéndoles sus respectivos circuncentros y circunferencias circunscritas. En esta nueva figura logré identificar un tercer paralelogramo (Fig. 3).

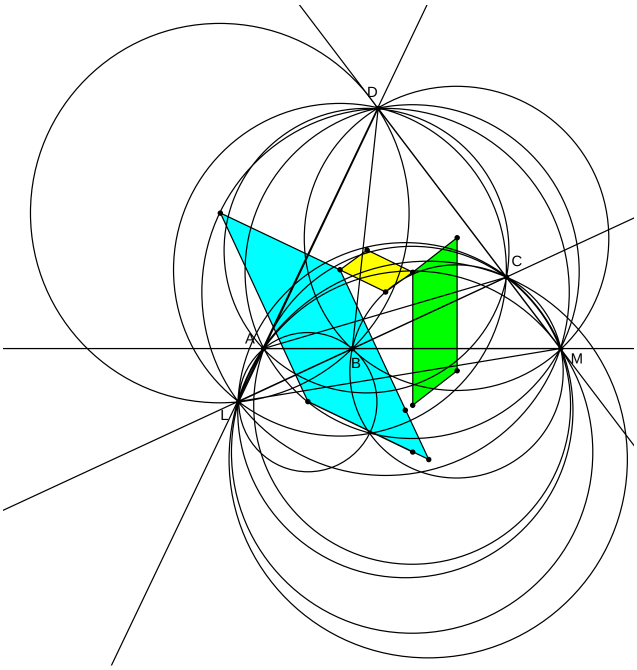

Fig. 3

¿Circuncentros de qué triángulos eran los que generaban este tercer paralelogramo? De ADC, ADM, LDC, LDM (Fig. 4).

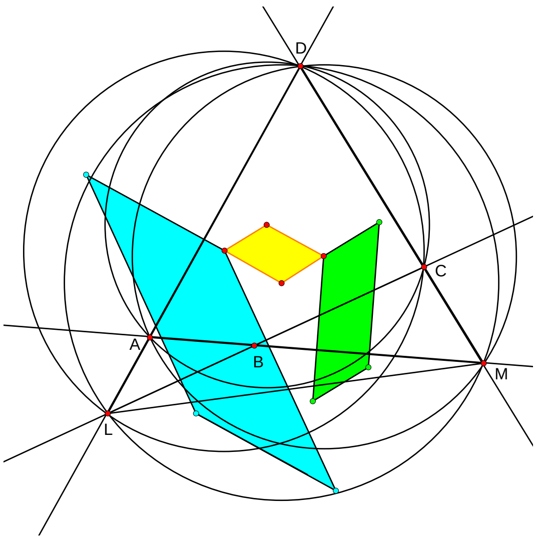

Fig. 4

El 13 de febrero sí estuve seguro de cuántos triángulos había en la configuración de puntos A, B, C, D, L, M. Eran los siguientes (ver Fig. 5): LAB, MCB, LBM, DAB, DCB, ABC, LBD, MBD, ADC, LCD, MAD, DLM, LCM, MAL, LCA, MAC.

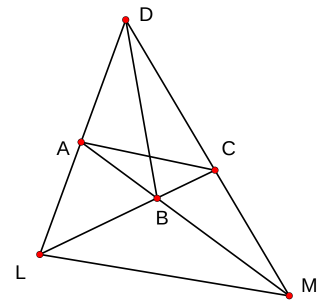

Fig. 5

Sabiendo qué triángulos eran y que los tenía a todos, me puse a construir sus respectivos circuncentros y circunferencias circunscritas. Eran 16 circuncentros y 16 circunferencias las que me proponía construir. La figura me resultaba cada vez más abigarrada, como puede apreciarse en la siguiente figura (Fig. 6). Estaba en eso cuando vi un cuarto paralelogramo.

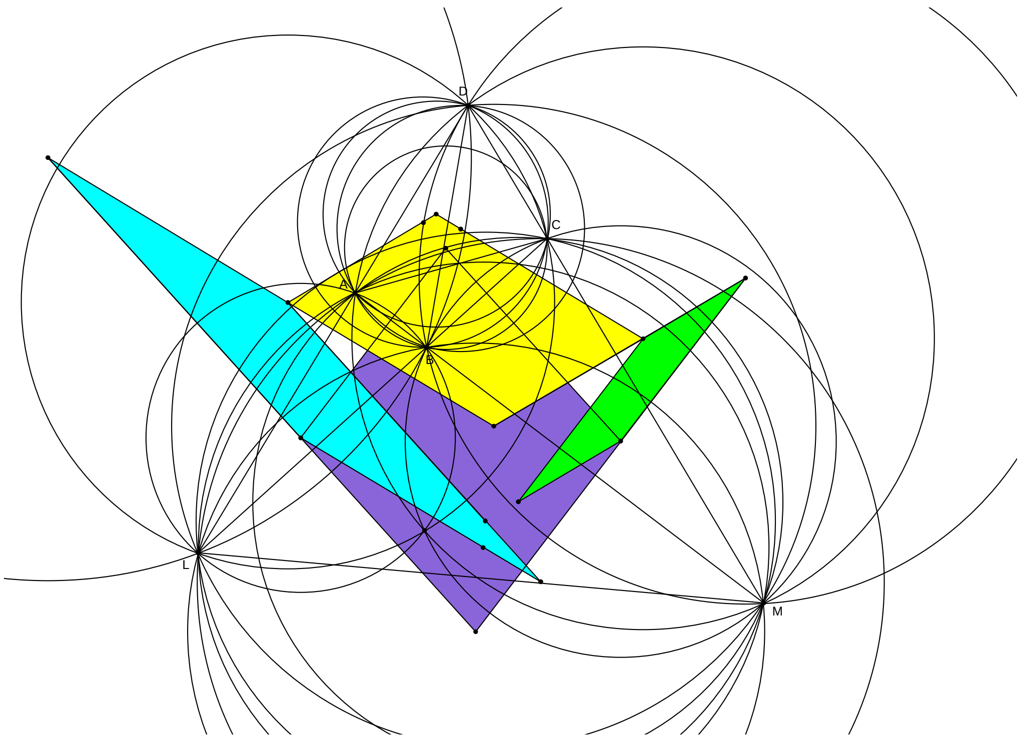

Fig. 6

Los triángulos que le daban origen a sus vértices eran BAL, BLM, BMC, BCA (ver Fig. 7).

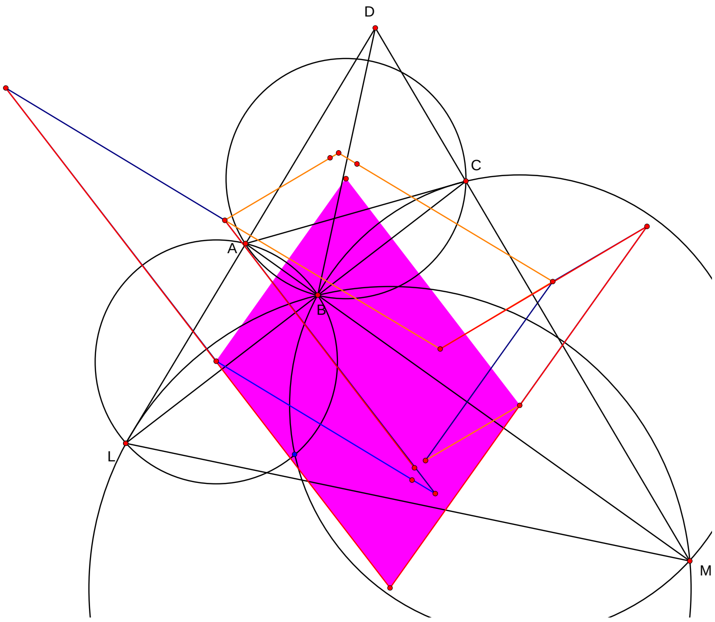

Fig. 7

“13 de febrero. Me surgía una nueva pregunta: ¿pasa algo interesante con los centros de los cuatro paralelogramos? Lo que fantaseaba es que podían determinar un nuevo paralelogramo.

Arrastrando A y pensando por dónde estarían ubicados esos centros de paralelogramo ya se me terminó la fantasía. No me parecía que determinaran ningún paralelogramo. De todas maneras construí los centros de los paralelogramos. Para ello consideré una diagonal de cada paralelogramo y construí su punto medio. De las dos diagonales –de cada uno de los cuatro paralelogramos– elegí construir la que unía vértices comunes a dos paralelogramos (segmentos punteados en la figura siguiente). De esa manera surgió un nuevo cuadrilátero cuyos puntos medios eran los centros que necesitaba. Los construí. Y ahí pensé: ¡pero qué tarado!

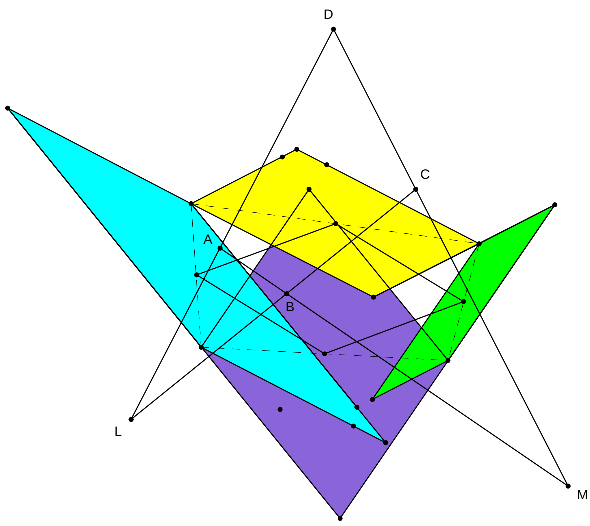

Fig. 8

> Si los centros de los paralelogramos eran puntos medios de un cuadrilátero, entonces -según ya lo había creado Varignon- determinaban un paralelogramo.
>
> Me quedó una sensación ambigua. ¿Era interesante que surgiera ese quinto paralelogramo? Inicialmente me pareció que no. La sensación fue generada por no haber predicho que ese paralelogramo necesariamente iba a surgir, por haberlo visto primero con los ojos antes de que con el pensamiento siendo la propiedad de Varignon tan conocida por mí. Pero después me pareció que sí era interesante. Le daba a la configuración un equilibrio, una simetría. Y a mí cierta tranquilidad, cierta paz."

Releyendo esta parte del diario caigo en la cuenta que inicialmente al pensar en el ámbito de la Geometría I me había llevado a engaño considerando que los centros de los cuatro paralelogramos no determinaban un quinto paralelogramo. Fue recién al pensar en el ámbito de la Geometría II que me resultó claro, deductivamente claro, que el quinto cuadrilátero era un paralelogramo.

SEGUNDA PARTE

El 2 de abril volví a releer la parte del diario referida a los cuatro paralelogramos determinados por algunos circuncentros de triángulos que surgían de los seis puntos A, B, C, D, L, M. Mientras lo hacía me surgió la pregunta ¿pasará algo similar si se consideran los baricentros de los mismos triángulos de los que consideré sus circuncentros?

Construí en *Sketchpad* los baricentros de las mismas cuatro cuaternas de triángulos que había considerado antes: LBD, LCD, LAB, LAC; MBD, MAD, MCB, MCA; ADC, ADM, LDC, LDM; BAL, BLM, BMC, BCA.

¡Y los baricentros de cada cuaterna determinaban cada una de ellas un paralelogramo!

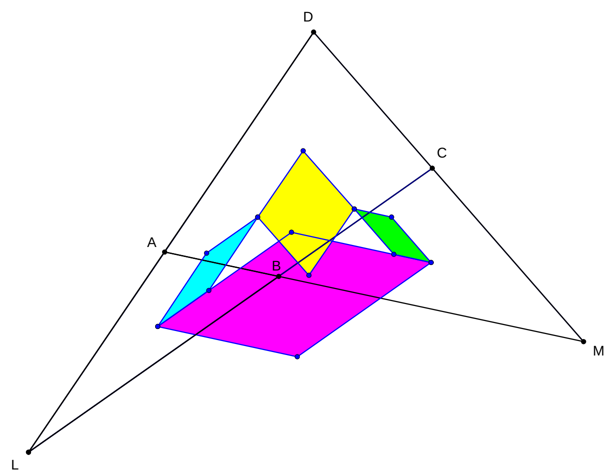

Fig. 9

¿Pasará algo interesente con los centros de estos cuatro paralelogramos? Hice una construcción en *Sketchpad* y tuve la respuesta en el ámbito de la Geometría I.

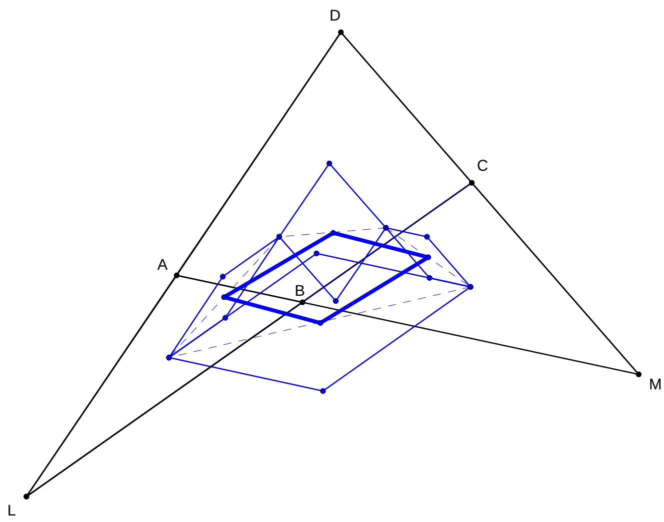

Fig. 10

¡Los cuatro centros determinaban un quinto paralelogramo! En base a la Fig. 10 pude elaborar una demostración en el ámbito de la Geometría II. ¿Y si se consideran los ortocentros de las mismas cuatro cuaternas de triángulos?

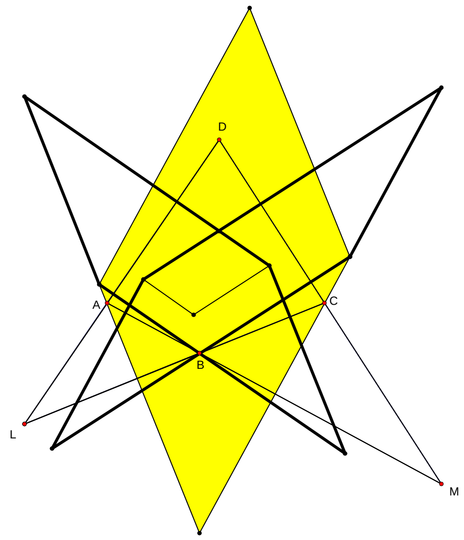

Fig. 11

¡Y los ortocentros de cada cuaterna determinaban cada una de ellas un paralelogramo!
(Para que puedan apreciarse mejor, en la figura se resaltaron los lados de dos de estos paralelogramos y se resaltó el interior de los otros dos).

¿Pasará algo interesente con los centros de estos cuatro paralelogramos?
Nuevamente hice una figura dinámica y busqué responder la pregunta en el ámbito de la Geometría I.

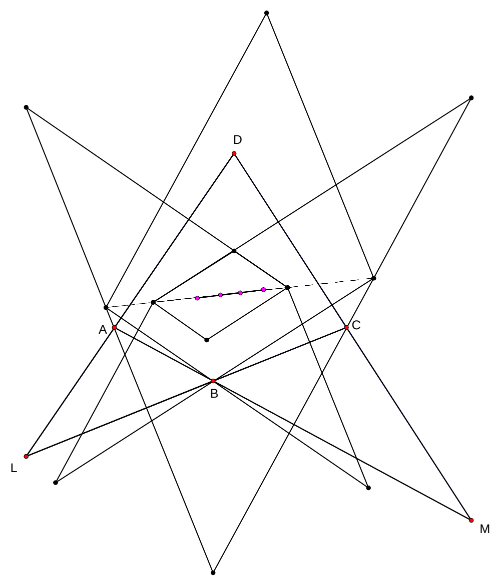

Fig. 12

Y me llevé una sorpresa: ¡los cuatro puntos estaban alineados! Pero observando con más atención los puntos no estaban alineados de cualquier manera sino que mantenían las distancias de unos respecto de los otros como en un paralelogramo que se hubiese achatado, que hubiera degenerado en cuatro puntos alineados.

No se me ocurrió cómo demostrar la alineación de los cuatro puntos que determinaban el paralelogramo degenerado en el ámbito de la Geometría II.

La tercera pregunta que me surgió fue acerca de si pasaría algo interesante si consideraba los centros de los tres paralelogramos que habían surgido en quinto lugar, es decir los centros de los quintos paralelogramo surgidos de los circuncentros, los baricentros y ortocentros. A sus centros les llamé *o, g* y *h* respectivamente.

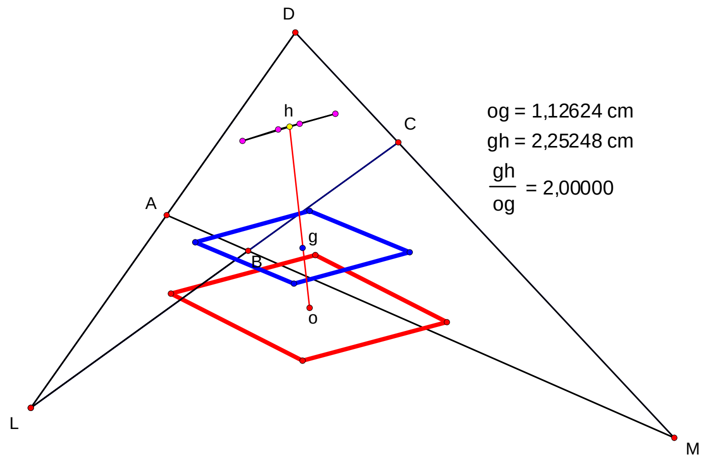

Fig. 13

En la Geometría I no me quedaba ninguna duda que los puntos *o*, *g*, *h* estaban alineados y que la relación entre sus distancias era 2.*og* = *gh*. En la Geometría II no tenía la más remota idea de cómo demostrarlo.

Lo que había construido al final del proceso no era ni más ni menos que una relación análoga a la construida por Euler para los triángulos.

TERCERA PARTE

Sabía de la existencia de una relación de Euler para cuadriláteros (Miakyshev, 2006) pero tenía un origen distinto a la que había conseguido construir mediante los paralelogramos. Busqué en Internet si había algo referido a esta configuración recién construida. En Ehrmann (2004) me enteré que la alineación de los cuatro ortocentros era obra de Jacobo Steiner en 1828. El mismo artículo incluía una demostración actual del hecho. No encontré otro artículo que mencionara ni siquiera algo parecido a lo que estaba buscando. Pero sí encontré la página de *Mathematics* de Chris van Tienhoven (van Tienhoven, 2012), quien busca escribir una *Encyclopedia of Quadri-Figures* cuya primera parte ha logrado completar; tiene una extensión de 250 páginas y está disponible en su página. A este autor lo consulté vía correo electrónico sobre mi construcción. Tuve su respuesta el mismo día y en ella dice que en su *Encyclopedia of Quadri-Figures* hace una distinción entre:

> "Cuadrángulo: sistema de 4 puntos/vértices con 6 rectas; Cuadrilátero: sistema de 4 rectas con 6 puntos de intersección/vértices; Cuadrígono: sistema de 4 puntos unidos en forma ordenada por 4 rectas."

Y a continuación:

> "Tu primer paralelogramo viene del cuadrígono ACDB con punto de corte de diagonales L. El centro del paralelogramo es QG-P9.
> Tu segundo paralelogramo viene del cuadrígono ACDB con punto de corte de diagonales M. El centro del paralelogramo es QG-P9.
> Tu tercer paralelogramo viene del cuadrígono ACLM con punto de corte de diagonales D. El centro del paralelogramo es QG-P9.
> Tu cuarto paralelogramo viene del cuadrígono CALM con punto de corte de diagonales E. El centro del paralelogramo es QG-P9."

Me pregunto, ¿qué es esto de QG-P9? El mismo link que me agrega en su correo me lleva a la sección QG-P9: 2nd QG-*Quasi Circumcenter* de su página.

> "Hay incluso un conjunto de dos cuadrígonos adicionales que también dan origen a estos paralelogramos: DLMB (con punto de corte de diagonales C), DBLM (con punto de corte de diagonales A)."

Con las indicaciones de Chris vuelvo a observar mi figura dinámica y efectivamente puedo construir nuevos paralelogramos que no había visto inicialmente. Es verdad que sí había reparado en ciertos puntos (que también eran centros de circunferencias circunscritas a triángulos de la configuración inicial) sueltos pero no se me había ocurrido que podían ser vértices de nuevos paralelogramos.

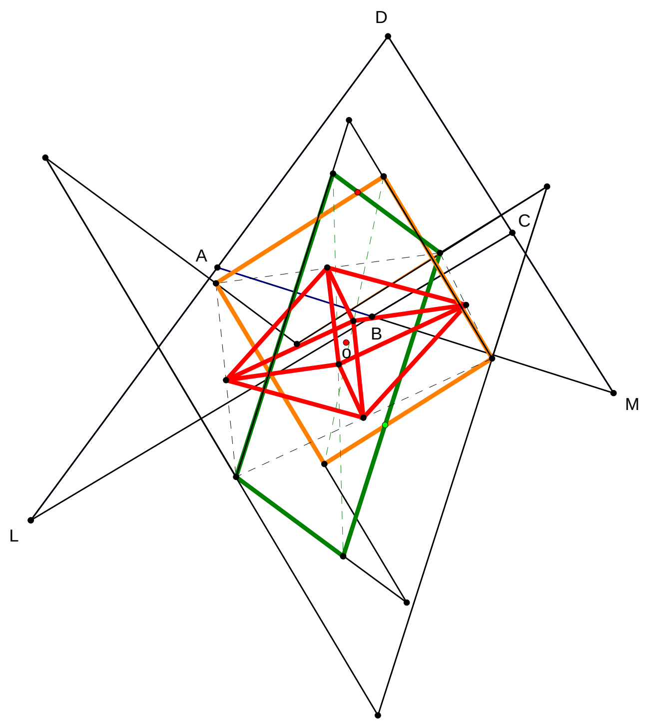

Fig. 14

Considero que los argumentos de Chris están dados en el ámbito de la Geometría III y esto hizo posible aclarar la presencia de algunos puntos sueltos así como unificar bajo la idea rectora de cuadrígono la existencia de estos paralelogramos. Este pensar en la Geometría III deja al descubierto que básicamente hay una única propiedad –cada cuadrígono genera un paralelogramo y este paralelogramos genera a su vez un punto QG-P9– que se aplicó a distintos cuadrígonos. Esta propiedad ordena, unifica, aclara y posibilita un trabajo exhaustivo donde yo –mediante la consideración de circuncentros de triángulos– me había estado moviendo en una zona de bruma en la cual había conseguido construir solo algunos de los paralelogramos posibles y sus respectivos centros.

El correo electrónico de Chris sigue así:

> "Cuando se trabaja con centros de gravedad el centro del paralelogramo es QG-P8. Cuando se trabaja con ortocentros el centro del paralelogramo es QG-P10".
>
> "Tus centros *o*, *g*, *h* son puntos conocidos, que son en realidad: QL-P6, QL-P12, QL-P2".[2]

[2] Se sugiere acceder a las secciones QL-P6: *Dimidium Point*, QL-P12: QL-*Centroid or Lateral Centroid*, QL-P2: *Morley Point* de la página *Mathematic*s de Chris van Tienhoven.

Después de explicarme en términos de cuadriláteros y cuadrígonos cuál fue mi proceder agrega:

> "Por cierto, tu forma de trabajar es un método nuevo para mí. Por lo visto, cuando se trabaja en forma combinacional de una manera consistente se obtienen lindos resultados."

A MODO DE FINAL

Lo que me interesa rescatar aquí de la experiencia es la presencia de las Geometría I, Geometría II y Geometría III conviviendo en forma armoniosa y complementaria. El pensar y fundamentar acorde al paradigma que implica cada una de estas geometrías aportó a la forma de pensar y fundamentar de las otras, es decir que cada una de estas tres formas de pensar la geometría se vio enriquecida por las ideas y argumentos provenientes de las otras.

En esta experiencia intervinimos solamente dos personas pensando en paradigmas geométricos distintos y ambos resultamos enriquecidos por el intercambio, obvio que yo fui el más favorecido por todo lo que me enteré y me sigo enterando que existe.

Considero que Geometría I, Geometría II y Geometría III pueden sernos de utilidad, tanto para estudiantes como para profesores ya sea de enseñanza primaria, secundaria o terciaria, para dar cabida a todas las ideas que puedan surgir en los cursos cuando abordamos situaciones geométricas. Parece natural que en una clase, donde intervienen más de dos personas, las ideas geométricas que se pongan en juego sean variadísimas y por lo tanto que el proceso de producción y consideración de ideas geométricas sea frondoso. Tener en cuenta estos tres paradigmas geométricos puede ser una buena vía de dar cabida y hacer concientes los argumentos que se manejan en los cursos tanto por parte de estudiantes como del profesor y de desarrollar nuestras formas de pensar la geometría.[3]

REFERENCIAS

Dalcín, M. (en prensa). *Crear en geometría euclidiana: diario de una experiencia personal*. Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo. Estará disponible en http://www.semur.edu.uy/curem/home.php

Ehrmann, J-P. (2004). Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. *Forum Geometricorum*, V. 4, 35–52.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 283–312.

[3] Agradezco a todos los que leyeron versiones previas de este artículo y manifestaron sus puntos de vista o hicieron sugerencias tendientes a hacerlo más legible y así más comprensibles las ideas que busca comunicar.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6(2), 167-187.

Myakishev, A. (2006). On Two Remarkable Lines Related to a Quadrilateral. *Forum Geometricorum*, V. 6, 289–295. Recuperado desde http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200634.pdf

van Tienhoven, C. (2012). *On the formal description of Quadrilateral and Quadrangle Centers. A first start for a Quadri Catalogue*. Recuperado desde http://www.chrisvantienhoven.nl/index.php