Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2001 **8**(1) : 33–46
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

ISOMORFISMO DE CONJUNTOS DE RELACIONES*

Mijail Bulat**

Recibido: 16 Noviembre 1999

Abstract

It is recommended to use a solving method for relations sets in order to solve the isomorphism problem. This method allows to solve the same problem for big size graphs, homogeneous graphs, graph systems, k-signs logic functions and their systems.

Keywords: graphs isomorphism, graphs systems, equivalence systems, simple substitution, multiple substitution.

Resumen

Se propone un método de solución del problema del isomorfismo para conjuntos de relaciones. El método permite resolver el mismo problema para grafos de grandes tamaños, grafos homogéneos, sistemas de grafos, funciones de lógicas de k-signos y sistemas de las mismas.

Palabras clave: isomorfismo de grafos, sistemas de grafos,sistemas de equivalencias, sustitución simple,sustitución múltiple.

Mathematics Subject Classification: 05C60, 68R10

1. Introducción

La resolución del problema del isomorfismo de grafos se complica cuando los grafos son de grandes tamaños o sus matrices de adyacencias son homogéneas [1, 3, 5, 6]. En ambos casos el problema se resuelve más facil presentando los grafos por un conjunto de relaciones correspondientes a matrices de tamaños razonables y no homogéneas.Con tal presentación aumenta el número de restricciones que permiten eliminar muchas variantes y con esto

*El artículo fue enviado cuando el autor trabajaba en Universidad Americana, Managua, Nicaragua

**Facultatea de Matematica si Informatica, Universitatea de Stat din Moldova, Str. A Mateevici, 60, Chisinav, Moldavia. E-Mail: bulat@araximfo.com

facilita la resolución del problema. En este trabajo se resuelve el problema del isomorfismo para tales conjuntos y se dan las aplicaciones de éstos en grafos y en funciones lógicas. Ya que cualquier sistema de grafos o hípergrafos es un conjunto de relaciones, entonces se puede resolver el problema del isomorfismo para tales sistemas.

2. Sistemas de equivalencias

Dado el conjunto $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1 = \{x_{11}, \ldots, x_{m_1 1}\}, \ldots, X_n = \{x_{1n}, \ldots, x_{m_n n}\}$. Sobre X por medio del conjunto $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$ están definidas las relaciones $R_{X_i X_j}$

$$R_{X_i X_j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_{1j} & \ldots & x_{m_j j} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m_i i} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} r_{11}^{ij} & \ldots & r_{1m_j}^{ij} \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ r_{m_i 1}^{ij} & \ldots & r_{m_i m_j}^{ij} \end{array} \right] \end{array}, \; r_{11}^{ij}, \ldots, r_{m_i m_j}^{ij} \in \Omega \; .$$

Designemos por R el conjunto de estas relaciones. Análogamente sobre otro conjunto $X^* = \{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$, donde $X_1^* = \left\{x_{11}^*, \ldots, x_{m_1 1}^*\right\}, \ldots, X_n^* = \left\{x_{1n}^*, \ldots, x_{m_n n}^*\right\}$, están definidas otras relaciones por medio del mismo conjunto Ω . Designemos este conjunto de relaciones por R^*.

Sea S_{X,X^*} la sustitución en la primera fila de la cual están los elementos de X y en la segunda los de X^* :

$$S_{X,X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ X_{k_1}^* & X_{k_2}^* & \ldots & X_{k_n}^* \end{pmatrix}, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, n\} \tag{1}$$

Según esta sustitución componemos las equivalencias

$$R_{X_i X_j} \cong R^*_{X^*_{k_i} X^*_{k_j}} \tag{2}$$

$$\forall R_{X_i X_j} \in R, \forall R^*_{X_{k_i^*} X_{k_j^*}} \in R^*$$

Llamaremos este conjunto **sistema de equivalencias por la sustitución** S_{X,X^*}.

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} X &= \{X_1, X_2, X_3\}, \; X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}, S_{X,X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_3^* & X_1^* & X_2^* \end{pmatrix}, \\ R &= \{R_{X_1X_3}, R_{X_3X_1}, R_{X_2X_3}\} \; y \; R^* = \left\{R^*_{X_3^* X_2^*}, R_{X_1^* X_2^*}, R^*_{X_2^* X_3^*}\right\} \end{aligned}$$

entonces el sistema de equivalencias por esta sustitución es:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{X_1X_3} \cong R^*_{X_3^* X_2^*} \\ R_{X_3X_1} \cong R^*_{X_2^* X_3^*} \\ R_{X_2X_3} \cong R^*_{X_1^* X_2^*} \end{array} \right.$$

La solución del sistema (2) se llama un conjunto de n sustituciones

$$
\begin{aligned}
S_{X_1X^*_{k_1}} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m_1 1} \\ x^*_{1_1k_1} & x^*_{1_2k_1} & \dots & x^*_{1_{m_1}k_1} \end{pmatrix} \\
S_{X_2X^*_{k_2}} &= \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m_2 2} \\ x^*_{2_1k_2} & x^*_{2_2k_2} & \dots & x^*_{2_{m_2}k_2} \end{pmatrix} \\
& \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{X_nX^*_{k_n}} &= \begin{pmatrix} x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{m_n n} \\ x^*_{n_1k_n} & x^*_{n_2k_n} & \dots & x^*_{n_{m_n}k_n} \end{pmatrix} \\
1_1 , \dots , n_{m_n} &\in \{1, \dots , n\}
\end{aligned}
$$

que satisfacen las equivalencias del sistema.

Si la solución existe, entonces el sistema se llama **compatible** y en el caso contrario-**incompatible**.

Por medio de las sustituciones de la solución un conjunto, por ejemplo R, se transforma en otro. En este caso escribimos

$$R(S_{X_1X^*_{k_1}}, \dots , S_{X_n,X^*_{k_n}}) = R^* \tag{3}$$

Al conjunto R corresponde un grafo G cuyos vértices son los conjuntos de X. Los pesos de las aristas son las relaciones respectivas de R .

Este grafo tiene su matriz de adyacencias A_G con los elementos $a_{ij} = \begin{cases} 1, \; si\, R_{X_iX_j} \in R \\ 0, \; si\, R_{X_iX_j} \notin R \end{cases}$ y su matriz A_{P_G} de los pesos de las aristas.

$$
A_{P_G} = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} R_{X_1X_1} & \cdots & R_{X_1X_n} \\ & \ddots & \\ R_{X_nX_1} & \cdots & R_{X_nX_n} \end{bmatrix} \end{array}
$$

Si $R_{X_iX_j} \notin R$, entonces todos los elementos de esta matriz en A_{P_G} se designan por el símbolo *. Para $m_1 = \ldots = m_n = 1$ este grafo se transforma en un grafo habitual con los vértices $x_{11}, \dots , x_{1n}$.Los pesos de las aristas son elementos de Ω.

Igualmente al conjunto R^*corresonde un grafo G^*con su matriz de adyacencias A_{G^*} y con la matriz $A_{P_{G^*}}$de los pesos de las aristas.Si el sistema (1) es compatible entonces entre X y X^*se establece una correspondencia biunívoca. Para $X_i \longleftrightarrow X_{k_i}$ y $X_j \longleftrightarrow X_{k_j}$ debe verificarse la condición

$$R_{X_iX_j} \cong R^*_{X^*_{k_i}X^*_{k_j}} \tag{4}$$

Esto significa que $G \cong G^*$ y también $R \cong R^*$. Para hallar el conjunto $\{S_{X,X^*}\}$ de sustituciones por medio de las cuales se establece la correspondencia biunívoca entre los elementos de X y X^* hace falta resolver el problema de equivalencia para las matrices A_G y A_{G^*} [1]. Es evidente que si $\{S_{X,X^*}\} = \emptyset$ entonces el sistema es incompatible y, por consiguiente, los conjuntos no son isomorfos. Si $\{S_{X,X^*}\} \neq \emptyset$ y $\exists S_{X,X^*}$ por medio de la cual el sistema de equivalencias es compatible, entonces $R \cong R^*$. Para hallar la solución del sistema (2) escribimos la matriz A_{P_G} en la forma desarrollada y designamos sus filas y columnas respectivamente por $y_1, \ldots, y_q$ y $z_1, \ldots, z_q$.

$$A_{P_G} = \begin{array}{cc} y_1 & x_{11} \\ \vdots & \vdots \\ y_{m_1} & x_{m_1 1} \\ \vdots & \vdots \\ y_p & x_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ y_q & x_{m_n n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} z_1 & \cdots & z_{m_1} & \cdots & z_p & \cdots & z_q \\ x_{11} & \cdots & x_{m_1 1} & \cdots & x_{1n} & \cdots & x_{m_n n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{11}_{11} & \cdots & r^{11}_{1m_1} \\ & \ddots & \\ r^{11}_{m_1 1} & \cdots & r^{11}_{m_1 m_1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} r^{1n}_{11} & \cdots & r^{1n}_{1m_n} \\ & \ddots & \\ r^{1n}_{m_1 1} & \cdots & r^{1n}_{m_1 m_n} \end{bmatrix} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \begin{bmatrix} r^{n1}_{11} & \cdots & r^{n1}_{1m_1} \\ & \ddots & \\ r^{n1}_{m_n 1} & \cdots & r^{n1}_{m_n m_1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} r^{nn}_{11} & \cdots & r^{nn}_{1m_n} \\ & \ddots & \\ r^{nn}_{m_n 1} & \cdots & r^{nn}_{m_n m_n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{array},$$

$$q = m_1 + \ldots + m_n$$

Igualmente construimos la matriz desarrollada $A_{P_{G^*}}$. Para esta matriz aplicamos la sustitución (1) y la designamos por $A^*_{P_{G^*}}$. Para las filas y columnas de esta matriz usamos las mismas designaciones que para las de A_{P_G} (ver Ejemplo 1). Resolviendo el problema de equivalencia para A_{P_G} y $A^*_{P_{G^*}}$[1], obtendremos la solución del sistema (2). Según (1) se obtienen las primeras sustituciones:

$$\hat{S}_{1;Y,Y} = \begin{pmatrix} \{y_1, \ldots, y_{m_1}\} & \cdots & \{y_p, \ldots, y_q\} \\ \{y_1, .., y_{m_1}\} & \cdots & \{y_p, \ldots, y_q\} \end{pmatrix} \text{ y } \hat{S}_{1;Z,Z} = \begin{pmatrix} \{z_1, \ldots, z_{m_1}\} & \cdots & \{z_p, \ldots, z_q\} \\ \{z_1, .., z_{m_1}\} & \cdots & \{z_p, \ldots, z_q\} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ya que por y_i e $z_i$está designado el mismo elemento del mismo conjunto entonces

$$y_i \longleftrightarrow y_j \Longleftrightarrow z_i \longleftrightarrow z_j \tag{6}$$

Según [1] para que $A_{P_G} \cong A^*_{P_{G^*}}$ es necesario y suficiente que se cumpla

$$Lím\tilde{S}_{1;Y,Y} = S_{Y,Y} \cong S_{Z,Z} = Lím\tilde{S}_{1;Z,Z} \tag{7}$$

Para despejar los elementos simples de las sustituciones (5) componemos las matrices B [1]. En la matriz B_Y el elemento b^{kl}_{ij} es igual a la multiplicidad del elemento ω_j en la fila y_i de la matriz $R_{X_k X_l}$ incluida en la matriz A_{P_G}. En la matriz B_Z el elemento b^{kl}_{ij} es igual a la multiplicidad del elmento ω_i en la columna z_j de la matriz $R_{X_k X_l}$ incluida en A_{P_G}. De la misma manera se construyen las matrices B^*_Y e B^*_Z por la matriz $A^*_{P_{G^*}}$.

$$
B_Z = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} z_1 & \cdots & z_{m_1} & \cdots & z_p & \cdots & z_q \end{array} \\
\begin{array}{c} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_t \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_t \end{array} &
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} b^{11}_{11} & \cdots & b^{11}_{1m_1} \\ & \ddots & \\ b^{11}_{t1} & \cdots & b^{11}_{tm_1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b^{1n}_{1p} & \cdots & r^{1n}_{1q} \\ & \ddots & \\ b^{1n}_{tp} & \cdots & b^{1n}_{tq} \end{bmatrix} \\
\ddots & \ddots & \ddots \\
\begin{bmatrix} b^{n1}_{11} & \cdots & b^{n1}_{1m_1} \\ & \ddots & \\ b^{n1}_{t1} & \cdots & b^{n1}_{tm_1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b^{nn}_{1p} & \cdots & b^{nn}_{1q} \\ & \ddots & \\ b^{nn}_{tp} & \cdots & b^{nn}_{tq} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
B_Y = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \omega_1 & \cdots & \omega_t & \cdots & \omega_1 & \cdots & \omega_t \end{array} \\
\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_1} \\ \vdots \\ y_p \\ \vdots \\ y_q \end{array} &
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} b^{11}_{11} & \cdots & b^{11}_{1t} \\ & \ddots & \\ b^{11}_{m_1 1} & \cdots & b^{11}_{m_1 t} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b^{1n}_{11} & \cdots & r^{1n}_{1t} \\ & \ddots & \\ b^{1n}_{m_1 1} & \cdots & b^{1n}_{m_1 t} \end{bmatrix} \\
\ddots & \ddots & \ddots \\
\begin{bmatrix} b^{n1}_{p1} & \cdots & b^{n1}_{pt} \\ & \ddots & \\ b^{n1}_{q1} & \cdots & b^{n1}_{qt} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} b^{nn}_{p1} & \cdots & b^{nn}_{pt} \\ & \ddots & \\ b^{nn}_{q1} & \cdots & b^{nn}_{qt} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Comparando B_Y con B^*_Y, B_Z con B^*_Z, despejamos elementos simples en las sustituciones (5) y componemos las sustituciones

$$
\hat{S}_{2;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_{a_1} & \cdots & y_{a_r} & \{y_{b_1}, \ldots, y_{b_h}\} & \cdots & \{y_{c_1}, \ldots, y_{c_s}\} \\ y_{a^*_1} & \cdots & y_{a^*_r} & \left\{y_{b^*_1}, \ldots, y_{b^*_h}\right\} & \cdots & \left\{y_{c^*_1}, \ldots, y_{c^*_s}\right\} \end{pmatrix} \tag{8}
$$

$$
\hat{S}_{2;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_{d_1} & \cdots & z_{d_g} & \{z_{e_1}, \ldots, z_{e_k}\} & \cdots & \{z_{f_1}, \ldots, z_{f_l}\} \\ z_{d^*_1} & \cdots & z_{d^*_g} & \left\{z_{e^*_1}, \ldots, z_{e^*_k}\right\} & \cdots & \left\{z_{f^*_1}, \ldots, z_{f^*_l}\right\} \end{pmatrix} \tag{9}
$$

Designando

$\{y_{b_1}, \ldots, y_{b_h}\} = M_{1,y}, \ldots, \{y_{c_1}, \ldots, y_{c_s}\} = M_{u,y}, \left\{y_{b^*_1}, \ldots, y_{b^*_h}\right\} = M^*_{1y}, \ldots, \left\{y_{c^*_1}, \ldots, y_{c^*_s}\right\} = M_{u,y}^{\ *}$

$\{z_{e_1}, \ldots, z_{e_k}\} = M_{1,z}, \ldots, \{z_{f_1}, \ldots, z_{f_l}\} = M_{v,z}, \left\{z_{e^*_1}, \ldots, z_{e^*_k}\right\} = M^*_{1,z}, \ldots, \left\{z_{f^*_1}, \ldots, z_{f^*_l}\right\} = M^*_{v,z}$

obtendremos

$$
\tilde{S}_{2;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_{a_1} & \cdots & y_{a_r} & M_{1,y} & \cdots & M_{u,y} \\ y_{a^*_1} & \cdots & y_{a^*_r} & M^*_{1,y} & \cdots & M^*_{u,y} \end{pmatrix} \tag{10}
$$

$$
\tilde{S}_{2;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_{d_1} & \cdots & z_{d_g} & M_{1,z} & \cdots & M_{v,z} \\ z_{d^*_1} & \cdots & z_{d^*_g} & M^*_{1,z} & \cdots & M_{v,z} \end{pmatrix} \tag{11}
$$

Designemos tambien por $N_{i,y}, N_{j,z}, N^*_{i,y}, N^*_{j,z}$ los conjuntos de los subíndices de los elementos de $M_{i,y}, M_{j,z}, M^*_{i,y}, M^*_{j,z}$ respectivamente. Según (6) y (7) debe cumplirse la igualdad

$$
\forall i, j \, |N_{i,y} \cap N_{j,z}| = \left|N^*_{i,y} \cap N^*_{j,z}\right|, \tag{12}
$$

$$i \in \{1, \ldots, u\}, j \in \{1, \ldots, v\}$$

Si esta condición no se cumple por lo menos para un par (i, j) entonces la hipótesis según la cual se obtuvieron las sustituciones (10) y (11) es falsa.

Supongamos que (12) se cumplen. En este caso se realizan las correspondencias

$$\forall i, j N_{i,y} \cap N_{j,z} \longleftrightarrow N^*_{i,y} \cap N^*_{j,z} \tag{13}$$
$$\forall i, j N_{i,y} \setminus (N_{i,y} \cap N_{j,z}) \longleftrightarrow N^*_{i,y} \setminus \left(N^*_{i,y} \cap N^*_{j,z}\right) \tag{14}$$
$$\forall i, j N_{j,z} \setminus (N_{i,y} \cap N_{j,z}) \longleftrightarrow N^*_{j,z} \setminus \left(N^*_{i,y} \cap N^*_{j,z}\right) \tag{15}$$

Por medio de estas correspondencias se transforman los conjuntos M de las sustituciones (10) y (11).Si, por ejemplo, $M_{i,y} = \{y_1, y_3, y_4\}$, $M_{j,z} = \{z_1, z_2, z_4\}, M^*_{i,y} = \{y_4, y_5, y_6\}, M^*_{j,z} = \{z_3, z_5, z_6\}$,entonces según (13), (14) y (15) se realizan respectivamente las correspondencias $\{1, 4\} \longleftrightarrow \{5, 6\}$, $\{3\} \longleftrightarrow \{4\}$ y $\{2\} \longleftrightarrow \{3\}$. Estas correspondencias implican las correspondencias $\{y_1, y_4\} \longleftrightarrow \{y_5, y_6\}, \{z_1, z_4\} \longleftrightarrow \{z_5, z_6\}, \{y_3\} \longleftrightarrow \{y_4\}, \{z_2\} \longleftrightarrow \{z_3\}$. De esta manera se obtienen otros conjuntos M. Los conjuntos M pueden transformarse también por medio de los elementos simples. Supongamos que se cumple (16)

$$\{a_1, \ldots, a_r\} \neq \{d_1, \ldots, d_g\} \tag{16}$$

Según (6) los elementos de la diferencia simétrica $\{a_1, \ldots, a_r\} \triangle \{d_1, \ldots, d_g\}$ transforman los conjuntos M en los cuales pueden aparecer elementos simples. Formando de nuevo la diferencia simétrica efectuamos otras transformaciones. Continuamos el proceso hasta que se cumpla (17).

$$\forall i \exists j \ N_{i,y} = N_{j,z}, N^*_{i,y} = N^*_{j,z} \tag{17}$$

Otras transformacines de (10) y (11) se efectúan con las matrices C y D [1] y se construyen las sucesiones de sustituciones con el cumplimiento de (7).

3. Aplicaciones en grafos

Vamos a ver cómo se aplican los conjuntos de relaciones en la solución del problema del isomorfismo para grafos.Están dados dos grafos G y G^*por sus matrices de adyacencias o por sus matrices de los pesos de las aristas. Designemos las filas y las columnas de ambas matrices por $y_1, \ldots, y_n$ e $z_1, \ldots, z_n$ respectivamente. Supongamos que según una hipótesis se obtienen las sustituciones (10) y (11).

$$A_G = \begin{array}{cc} & \\ & \\ y_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_n & x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & \cdots & z_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G^*} = \begin{array}{cc} & \\ & \\ y_1 & x^*_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_n & x^*_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & \cdots & z_n \\ x^*_1 & \cdots & x^*_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ & \ddots & \\ a^*_{n1} & \cdots & a^*_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Designamos

$$M_{1,y} = X_1, \ldots, M_{u,y} = X_u, M_{1,z} = X_{u+1}, \ldots, M_{v,z} = X_{u+v}$$

$$M_{1,y}^* = X_1^*, \ldots, M_{u,y}^* = X_u^*, M_{1,z}^* = X_{u+1}^*, \ldots, M_{v,z}^* = X_{u+v}^*$$

Se obtienen los conjuntos $X = \{X_1, \ldots, X_{u+v}\}$ y $X^* = \left\{X_1^*, \ldots, X_{u+v}^*\right\}$ para los cuales se verifican las correspondecias $X_i \longleftrightarrow X_i^*, i = 1, 2, \ldots, u+v$. Por eso en este caso

$$S_{X,X^*} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_{u*v} \\ X_1^* & X_2^* & \ldots & X_{u+v}^* \end{pmatrix} \tag{18}$$

Por las matrices A_G y A_{G^*} hallamos las matrices $R_{X_iX_j}$ y $R^*_{X_i^*X_j^*}$ y componemos los conjuntos de relaciones R y R^* $(i = 1, \ldots, u; j = u+1, \ldots, u+v)$. A estos conjuntos corresponden dos grafos bipartidos G_1 y G_1^*.

Los pesos de las aristas son elementos de R y R^*. Si $R \cong R^*$ entonces $G_1 \cong G_1^*$ y $G \cong G^*$. Si los conjuntos no son isomorfos entonces la hipótesis según la cual se obtuvieron las sustituciones (10) y (11) es falsa y tenemos que verificar otra hipótesis. De esta manera el problema del isomorfismo de dos grafos se reduce al problema del isomorfismo de dos conjuntos de relaciones. Es conveniente hacer esto cuando los grafos son de grandes tamaños o cuando las matrices de adyacencias o de pesos de las aristas son homogéneas. La investigación de los grafos de grandes tamaños se reduce a la investigación de grafos de tamaños razonables con unas restricciones adicionales que permiten excluir muchas variantes. Las matrices homogéneas se reducen a las no homogéneas (ver Ejemplo 2).

Un sistema de grafos es un conjunto de relaciones y, por eso, lo expuesto puede aplicarse en la solución del problema del isomorfismo para tales sistemas (ver Ejemplo 1).

4. Aplicaciones en funciones de lógicas de k-signos

La función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de una lógica de $k-$signos (3) se puede considerar como un conjunto de relaciones. Tal función puede ser prefijada por los conjuntos M_f^ε $(\varepsilon = 0, 1, \ldots, k-1)$ del modo siguiente: $M_f^\varepsilon = \{\alpha : f(\alpha) = \varepsilon\}$ donde α es un cortejo $n-$dimensional de k signos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Designemos

$$\begin{aligned}
&X = \{x_1, \ldots, x_n\} \\
&Y_0 = \{y_{10}, \ldots, y_{p0}\} = M_f^0 \\
&Y_1 = \{y_{11}, \ldots, y_{q1}\} = M_f^1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Y_{k-1} = \{y_{1k-1}, \ldots, y_{rk-1}\} = M_f^{k-1} \\
&M = \{X, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{k-1}\} \\
&R = \{R_{Y_0X}, R_{Y_1X}, \ldots, R_{Y_{k-1}X}\} \\
&\Omega = \{0, 1, \ldots, k-1\}
\end{aligned}$$

Igualmente para otra función $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ hallamos el conjunto R^*. A estos conjuntos corresponden dos grafos bipartidos G y G^* con sus matrices de adyacencias A_G y A_{G^*}.

$$A_G = \begin{array}{c} \\ X \\ Y_0 \\ \vdots \\ Y_{k-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y_0 & \cdots & Y_{k-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G^*} = \begin{array}{c} \\ X^* \\ Y_0^* \\ \vdots \\ Y_{k-1}^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X^* & Y_0^* & \cdots & Y_{k-1}^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para que las funciones sean isomorfas es necesario que se realicen las correspondencias

$$X \longleftrightarrow X^*, Y_0 \longleftrightarrow Y_o^*, Y_1 \longleftrightarrow Y_1^*, \ldots, Y_{k-1} \longleftrightarrow Y_{k-1}^*$$

Es decir

$$S_{M,M^*} = \begin{pmatrix} X & Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_{k-1} \\ X^* & Y_0^* & Y_1^* & \cdots & Y_{k-1}^* \end{pmatrix}$$

El sistema de equivalencias por esta sustitución es

$$\begin{cases} R_{Y_0X} \cong R^*_{Y_0^*X^*} \\ R_{Y_1X} \cong R^*_{Y_1^*X^*} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{Y_{k-1}X} \cong R^*_{Y_{k-1}^*X^*} \end{cases} \tag{19}$$

Es evidente que en este sistema deben verificarse las condiciones

$$X = X^*, |Y_0| = |Y_0^*|, |Y_1| = |Y_1^*|, \ldots, |Y_{k-1}| = \left|Y_{k-1}^*\right| \tag{20}$$

Para hallar la solución del sistema (19) componemos las matrices A_{P_G} y $A_{P_{G^*}}$.

$$A_{P_G} = \begin{array}{c} \\ Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{k-1} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} R_{Y_0X} \\ R_{Y_1X} \\ \vdots \\ R_{Y_{k-1}X} \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{P_{G^*}} = \begin{array}{c} \\ Y_0^* \\ Y_1^* \\ \vdots \\ Y_{k-1}^* \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} R^*_{Y_0^*X} \\ R^*_{Y_1^*X} \\ \vdots \\ R^*_{Y_{k-1}^*X} \end{bmatrix} \end{array}$$

Pasemos a la forma desarrollada y investiguemos las matrices en la equivalencia. Si éstas son equivalentes entonces las funciones son isomorfas.

5. Ejemplos

Ejemplo 1 Investigar en el isomorfismo los sistemas de grafos prefijados por

$$R = \{R_{X_1X_1}, R_{X_2X_2}, R_{X_3X_3}, R_{X_1X_2}, R_{X_2X_3}, R_{X_3X_1}\},$$

$$R^* = \left\{R^*_{X_1^*X_1^*}, R^*_{X_2^*X_2^*}, R^*_{X_3^*X_3^*}, R^*_{X_2X_1^*}, R^*_{X_1^*X_3^*}, R^*_{X_3^*X_2^*}\right\},$$

$$X_1 = \{x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}\}, X_2 = \{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}\}, X_3 = \{x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}\},$$

$$X_1^* = \{x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*\}, X_2^* = \{x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*\}, X_3^* = \{x_{13}^*, x_{23}^*, x_{33}^*, x_{43}^*\},$$

$$X = \{X_1, X_2, X_3\}, X^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\},$$

$$\Omega = \{0, 1\},$$

$$R_{X_1X_1} = \begin{array}{c|c} & x_{11}x_{21}x_{31}x_{41} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, R_{X_2X_2} = \begin{array}{c|c} & x_{12}x_{22}x_{32}x_{42} \\ \begin{array}{c} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R_{X_3X_3} = \begin{array}{c|c} & x_{13}x_{23}x_{33}x_{43} \\ \begin{array}{c} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, R_{X_1X_2} = \begin{array}{c|c} & x_{12}x_{22}x_{32}x_{42} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R_{X_2X_3} = \begin{array}{c|c} & x_{13}x_{23}x_{33}x_{43} \\ \begin{array}{c} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, R_{X_3X_1} = \begin{array}{c|c} & x_{11}x_{21}x_{31}x_{41} \\ \begin{array}{c} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R^*_{X_1^*X_1^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{11}x^*_{21}x^*_{31}x^*_{41} \\ \begin{array}{c} x^*_{11} \\ x^*_{21} \\ x^*_{31} \\ x^*_{41} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, R^*_{X_2^*X_2^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{12}x^*_{22}x^*_{32}x^*_{42} \\ \begin{array}{c} x^*_{12} \\ x^*_{22} \\ x^*_{32} \\ x^*_{42} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R^*_{X_3X_3^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{13}x^*_{23}x^*_{33}x^*_{43} \\ \begin{array}{c} x^*_{13} \\ x^*_{23} \\ x^*_{33} \\ x^*_{43} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, R^*_{X_2^*X_1^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{11}x^*_{21}x^*_{31}x^*_{41} \\ \begin{array}{c} x^*_{12} \\ x^*_{22} \\ x^*_{32} \\ x^*_{42} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R^*_{X_1^*X_3^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{13}x^*_{23}x^*_{33}x^*_{43} \\ \begin{array}{c} x^*_{11} \\ x^*_{21} \\ x^*_{31} \\ x^*_{41} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, R^*_{X_3X_2^*} = \begin{array}{c|c} & x^*_{12}x^*_{22}x^*_{32}x^*_{42} \\ \begin{array}{c} x^*_{13} \\ x^*_{23} \\ x^*_{33} \\ x^*_{43} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Solución. Construimos las matrices de adyacencias A_G y A_{G^*}.

$$A_G = \begin{array}{c|c} & X_1X_2X_3 \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G^*} = \begin{array}{c|c} & X_1^*X_2^*X_3^* \\ \begin{array}{c} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por medio de las matrices C [1] hallamos que $A_G \cong A_{G^*}$. El conjunto $\{S_{X,X^*}\}$ contiene tres sustituciones:

$$a) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2^* & X_1^* & X_3^* \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1^* & X_3^* & X_2^* \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_3^* & X_2^* & X_1^* \end{pmatrix}$$

Construimos los sistemas de equivalencias por cada una de estas sustituciones

$$a)\begin{cases} R_{X_1X_1} \cong R^*_{X_2^*X_2^*} \\ R_{X_2X_2} \cong R^*_{X_1^*X_1^*} \\ R_{X_3X_3} \cong R^*_{X_3^*X_3^*} \\ R_{X_1X_2} \cong R^*_{X_2^*X_1^*} \\ R_{X_2X_3} \cong R^*_{X_1^*X_3^*} \\ R_{X_3X_1} \cong R^*_{X_3^*X_2^*} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} R_{X_1X_1} \cong R^*_{X_1^*X_1^*} \\ R_{X_2X_2} \cong R^*_{X_3^*X_3^*} \\ R_{X_3X_3} \cong R^*_{X_2^*X_2^*} \\ R_{X_1X_2} \cong R^*_{X_1^*X_3^*} \\ R_{X_2X_3} \cong R^*_{X_3^*X_2^*} \\ R_{X_3X_1} \cong R^*_{X_2^*X_1^*} \end{cases} \qquad c)\begin{cases} R_{X_1X_1} \cong R^*_{X_3^*X_3^*} \\ R_{X_2X_2} \cong R^*_{X_2^*X_2^*} \\ R_{X_3X_3} \cong R^*_{X_1^*X_1^*} \\ R_{X_1X_2} \cong R^*_{X_3^*X_2^*} \\ R_{X_2X_3} \cong R^*_{X_2^*X_1^*} \\ R_{X_3X_1} \cong R^*_{X_1^*X_3^*} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema a). Construimos las matrices A_{P_G} y $A^*_{P_{G^*}}$.

$$A_{P_G} \quad = \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc|cccc|cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & x_{11} \\ y_2 & x_{21} \\ y_3 & x_{31} \\ y_4 & x_{41} \\ y_5 & x_{12} \\ y_6 & x_{22} \\ y_7 & x_{32} \\ y_8 & x_{42} \\ y_9 & x_{13} \\ y_{10} & x_{23} \\ y_{11} & x_{33} \\ y_{12} & x_{43} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ * & * & * & * & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A_{P_{G^*}} \quad = \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc|cccc|cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ x^*_{12} & x^*_{22} & x^*_{32} & x^*_{42} & x^*_{11} & x^*_{21} & x^*_{31} & x^*_{41} & x^*_{13} & x^*_{23} & x^*_{33} & x^*_{43} \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & x^*_{12} \\ y_2 & x^*_{22} \\ y_3 & x^*_{32} \\ y_4 & x^*_{42} \\ y_5 & x^*_{11} \\ y_6 & x^*_{21} \\ y_7 & x^*_{31} \\ y_8 & x^*_{41} \\ y_9 & x^*_{13} \\ y_{10} & x^*_{23} \\ y_{11} & x^*_{33} \\ y_{12} & x^*_{43} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Al investigar las matrices sobre equivalencia por medio de las matrices B y C hallamos las sustituciones

$$S_{Y,Y} \quad = \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_4 & y_3 & y_1 & y_2 & y_5 & y_7 & y_8 & y_6 & y_9 & y_{12} & y_{10} & y_{11} \end{pmatrix}$$

$$S_{Z,Z} \quad = \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ z_4 & z_3 & z_1 & z_2 & z_5 & z_7 & z_8 & z_6 & z_9 & z_{12} & z_{10} & z_{11} \end{pmatrix}$$

La condición (7) se cumple. Por lo tanto $A_{P_G} \cong A^*_{P_{G^*}}$,el sistema a) es compatible y los sistemas de grafos son isomorfos y no es necesario resolver los sistemas b) y c). De las sustituciones obtenidas resulta la solución del sistema a):

$$S_{X_1X_2^*} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x^*_{42} & x^*_{32} & x^*_{12} & x^*_{22} \end{pmatrix}, S_{X_2X_1^*} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x^*_{41} & x^*_{31} & x^*_{11} & x^*_{21} \end{pmatrix},$$

$$S_{X_3X_3^*} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x^*_{43} & x^*_{33} & x^*_{13} & x^*_{23} \end{pmatrix}$$

Por medio de estas sustituciones un sistema de grafos se transforma en otro.

Ejemplo 2 Investigar en el isomorfismo los grafos G y G^* prefijados por las matrices A_G y A_{G^*} de los pesos de las aristas:

$$A_G \quad = \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \\ y_4 & x_4 \\ y_5 & x_5 \\ y_6 & x_6 \\ y_7 & x_7 \\ y_8 & x_8 \\ y_9 & x_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Delta & \Delta & \Phi & \Phi & \Phi \\ \Phi & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Delta & \Delta & \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Delta & \Delta & \Phi \\ \Phi & \Delta & \Phi & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Phi & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Phi & \Phi & \Delta & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Phi & \Delta \\ \Delta & \Phi & \Phi & \Phi & \Delta & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Phi & \Phi & \Phi & \Sigma & \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Delta & \Delta & \Delta & \Phi & \Phi & \Phi & \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Sigma & \Delta & \Phi & \Phi & \Phi & \Delta & \Delta & \Sigma \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{G^*} \quad = \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \\ y_4 & x_4 \\ y_5 & x_5 \\ y_6 & x_6 \\ y_7 & x_7 \\ y_8 & x_8 \\ y_9 & x_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Sigma & \Phi & \Delta & \Phi & \Sigma & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta \\ \Delta & \Sigma & \Phi & \Sigma & \Delta & \Phi & \Delta & \Phi & \Sigma \\ \Delta & \Sigma & \Sigma & \Sigma & \Phi & \Phi & \Delta & \Phi & \Delta \\ \Sigma & \Phi & \Phi & \Sigma & \Delta & \Phi & \Delta & \Delta & \Sigma \\ \Phi & \Delta & \Delta & \Delta & \Sigma & \Sigma & \Phi & \Sigma & \Phi \\ \Phi & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta & \Phi \\ \Delta & \Phi & \Delta & \Phi & \Sigma & \Delta & \Sigma & \Sigma & \Phi \\ \Phi & \Delta & \Sigma & \Delta & \Phi & \Sigma & \Phi & \Sigma & \Delta \\ \Sigma & \Delta & \Phi & \Phi & \Phi & \Delta & \Sigma & \Delta & \Sigma \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución. $\Omega = \{\Sigma, \Phi, \Delta\}$. Los grafos son homogéneos. Por eso desde el principio las matrices B no sirven para despejar los elementos simples. Designamos por $y_1, \ldots, y_9$ las filas y por $z_1, \ldots, z_9$ las columnas de las matrices. Las primeras sustituciones múltiples son:

$$\tilde{S}_{1;Y,Y} \quad = \quad \begin{pmatrix} \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\} \\ \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_{1;Z,Z} \quad = \quad \begin{pmatrix} \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\} \\ \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\} \end{pmatrix}$$

Sea $y_1 \longleftrightarrow y_1$. Entonces según (4) $z_1 \longleftrightarrow z_1$. Construimos la tabla T_1 de las matrices C (la parte de arriba).

G	$y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9$	G^*	$y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9$
y_1		$\Sigma\,\Sigma\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Phi\,\Phi\,\Phi$	y_1		$\Phi\,\Delta\,\Phi\,\Sigma\,\Delta\,\Sigma\,\Phi\,\Delta$
z_1	$\Phi\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Sigma\,\Sigma$		z_1	$\Delta\,\Delta\,\Sigma\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Phi\,\Sigma$	
G	$y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9$	G^*	$y_1y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_1z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9$
y_1		$\Sigma\,\Sigma\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Phi\,\Phi\,\Phi$	y_2		$\Delta\,\Phi\,\Sigma\,\Delta\,\Phi\,\Delta\,\Phi\,\Sigma$
z_1	$\Phi\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Sigma\,\Sigma$		z_2	$\Phi\,\Sigma\,\Phi\,\Delta\,\Sigma\,\Phi\,\Delta\,\Delta$	
G	$y_2y_3y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9$	G^*	$y_1y_2y_4y_5y_6y_7y_8y_9$	$z_1z_2z_4z_5z_6z_7z_8z_9$
y_1		$\Sigma\,\Sigma\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Phi\,\Phi\,\Phi$	y_3		$\Delta\,\Sigma\,\Sigma\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Phi\,\Delta$
z_1	$\Phi\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Delta\,\Delta\,\Sigma\,\Sigma$		z_3	$\Delta\,\Phi\,\Phi\,\Delta\,\Sigma\,\Delta\,\Sigma\,\Phi$	

T_1

De esta tabla se obtienen las sustituciones

$$\hat{S}_{2;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_1 & \{y_2,y_3,y_4\} & \{y_5,y_6,y_7\} & \{y_8,y_9\} \\ y_1 & \{y_5,y_6,y_8\} & \{y_2,y_3,y_7\} & \{y_4,y_9\} \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\hat{S}_{2;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_1 & \{z_4,z_5,z_6\} & \{z_7,z_8,z_9\} & \{z_2,z_3\} \\ z_1 & \{z_3,z_6,z_9\} & \{z_2,z_4,z_8\} & \{z_5,z_7\} \end{pmatrix}$$

Observamos que $|\{2,3,4\} \cap \{7,8,9\}| \neq |\{5,6,8\} \cap \{2,4,8\}|$. Es decir la condición (12) no se cumple. Por eso $z_1 \longleftrightarrow z_1$ e $y_1 \longleftrightarrow y_1$ no existen. Análogamente hallamos que tampoco existen $z_1 \longleftrightarrow z_2$ e $y_1 \longleftrightarrow y_2$. Examinemos las correspondencias $z_1 \longleftrightarrow z_3$ e $y_1 \longleftrightarrow y_3$. De T_1 (la parte de abajo) resulta que

$$\hat{S}_{4;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_1 & \{y_2,y_3,y_4\} & \{y_5,y_6,y_7\} & \{y_8,y_9\} \\ y_3 & \{y_2,y_4,y_9\} & \{y_1,y_5,y_7\} & \{y_6,y_8\} \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\hat{S}_{4;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_1 & \{z_4,z_5,z_6\} & \{z_7,z_8,z_9\} & \{z_2,z_3\} \\ z_3 & \{z_1,z_7,z_9\} & \{z_5,z_6,z_8\} & \{z_2,z_4\} \end{pmatrix}$$

Para estas sustituciones la condición (12) se cumple. Aplicando (13), (14) y (15) se obtiene:

$$\hat{S}_{4;Y,Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_4 & y_7 & \{y_2,y_3\} & \{y_5,y_6\} & \{y_8,y_9\} \\ y_3 & y_9 & y_5 & \{y_2,y_4\} & \{y_1,y_7\} & \{y_6,y_8\} \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\hat{S}_{4;Z,Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_7 & \{z_2,z_3\} & \{z_5,z_6\} & \{z_8,z_9\} \\ z_3 & z_9 & z_5 & \{z_2,z_4\} & \{z_1,z_7\} & \{z_6,z_8\} \end{pmatrix}$$

Las condiciones (20) se cumplen. Construimos las matrices de los pesos y las matrices B.

$$A_{P_{G_1}} = \begin{array}{c} \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_8 \\ y_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_2\ z_3 & z_5\ z_6 & z_8\ z_9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \\ \Phi & \Sigma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta & \Delta \\ \Sigma & \Delta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Delta & \Phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \\ \Delta & \Sigma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi & \Delta \\ \Sigma & \Delta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta & \Delta \\ \Sigma & \Delta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \\ \Delta & \Sigma \end{bmatrix} \end{array} \right] \end{array}$$

$$A_{P_{G_1^*}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} z_2 & z_4 & z_1 & z_7 & z_6 & z_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_2 \\ y_4 \\ y_1 \\ y_7 \\ y_6 \\ y_8 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \Sigma & \Sigma & \Delta & \Delta & \Phi & \Phi \\ \Phi & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Phi & \Delta \\ \Phi & \Phi & \Sigma & \Sigma & \Delta & \Phi \\ \Phi & \Phi & \Delta & \Sigma & \Delta & \Sigma \\ \Sigma & \Delta & \Phi & \Phi & \Sigma & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Phi & \Phi & \Sigma & \Sigma \end{array}\right] \end{array}$$

$$B_Y = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \Sigma & \Phi & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta \end{array} \\ \begin{array}{c} y_2 \\ y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_8 \\ y_9 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$B_Y^* = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \Sigma & \Phi & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta & \Sigma & \Phi & \Delta \end{array} \\ \begin{array}{c} y_2 \\ y_4 \\ y_1 \\ y_7 \\ y_6 \\ y_8 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$B_Z = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} z_2 & z_3 & z_5 & z_6 & z_8 & z_9 \end{array} \\ \begin{array}{c} \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$B_Z^* = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} z_2 & z_4 & z_1 & z_7 & z_6 & z_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \\ \Sigma \\ \Phi \\ \Delta \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

De $\hat{S}_{4;Y,Y}$ e $\hat{S}_{4;Z,Z}$ y de las matrices B resultan las sustituciones simples:

$$S_{Z,Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ z_3 & z_2 & z_4 & z_9 & z_1 & z_7 & z_5 & z_8 & z_6 \end{pmatrix}$$

$$S_{Y,Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ y_3 & y_2 & y_4 & y_9 & y_1 & y_7 & y_5 & y_8 & y_6 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido dos sucesiones convergentes [1] para las cuales se cumple (7). Por consiguente $G_1 \cong G_1^*$ y $G \cong G^*$.

6. Conclusión

Lo expuesto se puede aplicar:

1. En sistemas algebraicos [3, 4],
2. En la solución del problema del isomorfismo:
   a) para grafos y hipergrafos de grandes tamaños [3, 6],
   b) para sistemas de grafos y hipergrafos,
   c) para grafos homogéneos [5, 6],
   d) para funciones lógicas y sistemas de ellas [2].

Sería bueno aplicar matrices multidimensionales en la resolución de sistemas de equivalencias. En este dominio todavía faltan investigaciones.

Referencias

[1] Bulat, M. (1998) "Isomorfismo de grafos y de funciones lógicas con algunas aplicaciones", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **5**(2): 87–112.

[2] Bulat M.S.; Goryuk I.V. (1978) *Síntesis de Estructuras Lógicas* Instituto Politécnico de Kishinev. (En ruso).

[3] Gorbátov, V.A. (1988) *Fundamentos de la Matemática Discreta*. Editorial MIR, Moscu.

[4] Máltsev, A.I. (1970) *Sistemas Algebraicos*. Editorial NAUKA, Moscu (en ruso).

[5] Skliar, O.; Lascaris, T.; Medina, V. (1994) "Enfoque compartimental para la solución del problema del isomorfismo de grafos", in: G. Mora (Ed.) *II Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*, I parte, Sede de Occidente UCR: 113–131.

[6] Zykov, A.A. (1987) *Fundamentos de la Teoría de los Grafos*. Editorial NAUKA, Moscú (en ruso).