Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(2): 49–57 (1995)

SOBRE LOS PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS DE UN DIFEOMORFISMO LOCAL DEL PLANO

William Alvarado Jiménez[1]

Resumen

Se demuestra una generalización del λ-lema de J. Palis para un caso de intersección no transversal de las variedades estable e inestable de un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo local de clase $\mathcal{C}^{\in}$ del plano en sí mismo.

Abstract

An extension of J. Palis' λ-lemma is obtained for one case of non-tansversal intersection of the stable and unstable manifolds of an hyperbolic fixed point of a $\mathcal{C}^{\in}$-local diffeomorphism of $\mathbb{R}^2$.

1. Introducción

Consideremos un difeomeorfismo local H de clase $\mathcal{C}^{\nabla}$ de un vecindario del origen de coordenadas $0 \in \mathbb{R}^n$, que admite a 0 en calidad de punto fijo hiperbólico. En la descomposición invariante $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ inducida por el isomorfismo lineal $DH(0)$, consideramos dos bolas abiertas $B^s \subseteq E^s$, y $B^u \subseteq E^u$, contenidas respectivamente en la variedad estable local W^s_{loc}, y el la variedad inestable local W^u_{loc} del difeomorfismo H en el punto $0 \in \mathbb{R}^n$. Sean $V = B^s \times B^u$, $q = (p, 0) \in W^s_{loc} \setminus \{0\}$, y D^k un disco de dimensión k igual a la dimensión del subespacio E^u, que interseca transversalmente la variedad estable local W^s_{loc} en el punto q.

El siguiente resultado, debido a J. Palis, se conoce dentro de la teoría de sistemas dinámicos con el nombre de λ-lema:

Lema (λ-lema).

Sean V, q y D^k como arriba. Si D^k_n denota la componente conexa de la intersección $H^n(D^k) \cap V$ que contiene al n-ésimo iterado $H^n(q)$ del punto q bajo la acción del difeomorfismo H, entonces dado $\varepsilon > 0$, se puede hallar un número natural N, tal que si $n \geq N$, entonces D^k_n es ε $\mathcal{C}'$-próximo de la bola B^u.

Este lema de caracter local se utiliza a menudo en el estudio de sistemas dinámicos en dimensiones mayores o iguales a 2. En particular, el λ-lema se suele utilizar para dar

[1]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

una demostración “geométrica” del Teorema de Grobman-Hartman, o bien para estudiar el comportamiento de trayectorias en un vecindario de un contorno homoclínico estructuralmente estable ([Palis-De Melo]).

Aunque la formulación del λ-lema es bastante “técnica”, geométricamente este resultado afirma que en un vecindario de un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo local de clase $\mathcal{C}^{\nabla}$, de $0 \in \mathbb{R}^n$, si un disco de dimensión igual a la dimensión de la variedad inestable local $W^u_{loc}(0)$ interseca transversalmente a la variedad estable local $W^s_{loc}(0)$, entonces los iterados sucesivos del difeomorfismo “enderezan” el disco, de tal forma que para n suficientemente grande, el n-ésimo iterado del disco no sólo estará muy próximo a W^u_{loc}, sino que también el espacio tangente del n-ésimo iterado del disco es “casi” paralelo al espacio tangente de la variedad inestable local. En el caso particular del plano, la figura 1 da una idea del comportamiento de los iterados del difeomorfismo H.

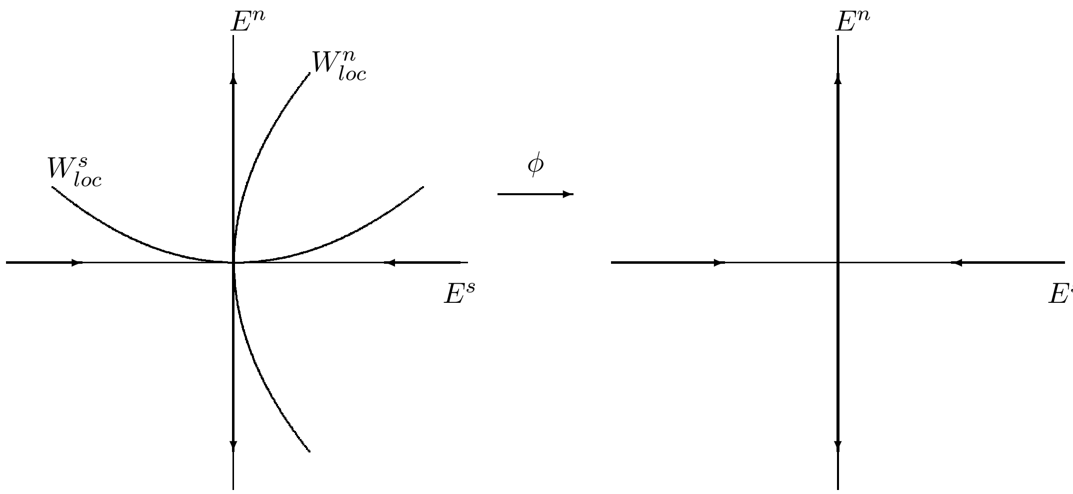

Figura 1:

En el presente trabajo, vamos demostrar, en el plano, un resultado similar al λ-lema para un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo local de clase $\mathcal{C}^{\in}$, en el caso en que la intersección de una curva γ con la variedad estable local W^s_{loc}, sin ser necesariamente transversal, satisfaga condiciones de “normalidad” que se definen más adelante.

2. Resultados preparatorios

En esta sección vamos a enumerar varios resultados preliminares, que son necesarios para la prueba del teorema principal. Las demostraciones de estas afirmaciones, aunque elementales, son bastante largas, y es por esto que hemos preferido omitirlas, refiriendo al lector interesado a los trabajos [Alvarado], [Ivanov], [Palis-de Melo].

En $\mathbb{R}^2$ consideremos un vecindario abierto O del origen de coordenadas, y un difeomorfismo $H : O \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^{\in}$, que tiene un punto fijo hiperbólico en el origen de coordenadas $(0, 0)$.

Vamos a suponer que los valores propios α y β del isomorfismo lineal $DH(0)$ verifican

$|\alpha| < 1 < |\beta|$[2]. Además, vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que el producto $\alpha\beta$ es estrictamente menor a 1.

Consideremos la descomposición del plano: $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ inducida por el isomorfismo lineal $DH(0)$. Como se sabe, la variedad estable local del punto 0, W^s_{loc} corresponde al gráfico de una aplicación de clase $\mathcal{C}^{\in}$,

$$\varphi_s : B^s(0,r) \longrightarrow E^u\,,$$

tal que $\varphi_s(0) = 0$ y $D\varphi_s(0) = 0$, donde $B^s(0,r) \subseteq E^s$ denota la bola abierta de centro 0 y radio r.

Análogamente, la variedad inestable local de 0, $W^u_{loc}(0)$ se puede ver como el gráfico de una aplicación $\mathcal{C}^{\in}$,

$$\varphi_u : B^u(0,r) \longrightarrow E^s\,,$$

que verifica $\varphi_u(0) = 0$ y $D\varphi_u(0) = 0$.

Consideremos la aplicación φ, definida por

$$\varphi : B^s(0,r) \times B^u(0,r) \longrightarrow E^s \oplus E^u$$

$$(x_s, x_u) \mapsto (x_s - \varphi_u(x_u), x_u - \varphi_s(x_s))\,.$$

La aplicación φ es de clase $\mathcal{C}^{\in}$, y además $D\varphi(0) = I$, donde I denota la aplicación identidad de $\mathbb{R}^2$. De esta manera φ es un difeomorfismo local de un vecindario de $0 \in \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la composición $\widetilde{H} = \varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$. $\widetilde{H}$ es un difeomorfismo local de un vecindario del origen de coordenadas, que satisface $\widetilde{H}(0) = 0$ y $D\widetilde{H}(0) = DH(0)$.

De esta manera, hemos probado que la variedad estable local del punto 0 coincide con un vecindario del origen de E^s, y que la variedad inestable local, con un vecindario del origen de E^u.

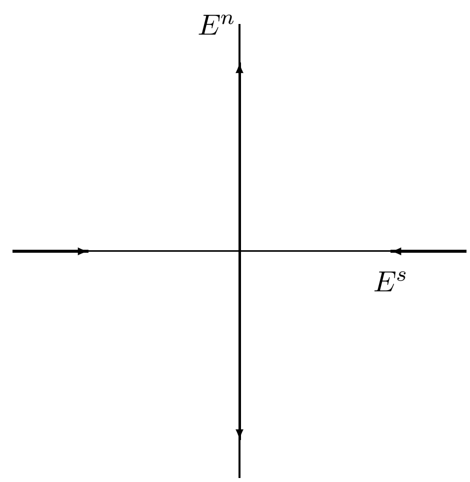

Figura 2:

[2] En otras palabras 0 es un punto fijo hiperbólico del tipo silla de montar (saddle-point)

Gracias a esto, podemos asumir que las variedades estable local e inestable local de un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo local H, son un vecindario del punto fijo en el subespacio estable y en el subespacio inestable respectivamente de la parte lineal de H en este punto.

Consideremos de nuevo nuestro difeomorfismo local H, el cual podemos suponer sin pérdida de generalidad, tiene la forma

$$H(x,y) = (F(x,y), G(x,y)) = (\alpha x + f(x,y), \beta y + g(x,y))\,,$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^{\in}$ en O, satisfacen las condiciones

$$f(0,0) = g(0,0) = f(0,y) = g(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

Las siguientes proposiciones resumen el comportamiento de los iterados de los puntos pertenecientes a un vecindario suficientemente pequeño del origen, bajo la acción del difeomorfismo local H.

Primeramente introducimos dos funciones auxiliares ϕ y ψ:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{\alpha x} & \text{, si } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{, si } x = 0\,, \end{cases}$$

y

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x,y)}{\beta x} & \text{, si } y \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{, si } y = 0\,. \end{cases}$$

En lo que sigue denotamos por $B(\delta)$ la bola abierta de centro 0 y radio δ.

Proposición 1.

Existen constantes $\delta_1 > 0$ y $M > 0$, tal que si $(x,y) \in B(\delta_1)$, entonces

$$\begin{aligned} |\phi(x,y)| &< M(|x| + |y|) \\ |\psi(x,y)| &< M(|x| + |y|)\,. \end{aligned}$$

Sea (x_0, y_0) un punto que pertenece a $B(\delta_1)$, y supongamos que los puntos (x_i, y_i) definidos por la fórmula

$$(x_i, y_i) = H^i(x_0, y_0)\,,$$

donde H^i denota el i-ésimo iterado de la aplicación H, también pertenecen a $B(\delta_1)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Para cada i, $i = 0, \ldots, n-1$, escribimos

$$\phi_i = \phi(x_i, y_i)\,, \qquad \psi_i = \psi(x_i, y_i)\,.$$

De esta forma, se tiene que, para $k = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} x_k &= \alpha^k x_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \phi_i) \\ y_k &= \beta^k y_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \psi_i)\,. \end{aligned}$$

Proposición 2.

Existen $\delta_2 > 0$, $\delta_2 \leq \delta_1$, y constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, independientes de n, que verifican

$$0 < \alpha_1 < |\alpha| < \alpha_2 < 1 < \beta_1 < |\beta|\,,$$

tales que si los puntos (x_i, y_i) pertenecen a $B(\delta_2)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$|x_0|\alpha_1^n < x_n < |x_0|\alpha_2^n\,,$$

y

$$|y_0| < |y_n|\beta_1^{-n}\,.$$

Proposición 3.

Existen $\delta_3 > 0$, $\delta_3 \leq \delta_2$, y una constante $M_1 > 0$ independientes de n, tales que si los puntos (x_i, y_i) pertenecen a $B(\delta_3)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces se satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} |\alpha|^n (1 - M_1\delta)|x_0| &< |x_n| < |\alpha|^n (1 + M_1\delta)|x_0| \\ |\beta|^{-n} (1 - M_1\delta)|y_n| &< |y_0| < |\beta|^{-n} (1 + M_1\delta)|y_n|\,, \end{aligned}$$

para cualquier $0 < \delta \leq \delta_3$.

Proposición 4.

Sea M_1 como en la proposición anterior, y sea $0 < \delta \leq \delta_3$, supongamos que todos los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ pertenecen a $B(\delta)$, entonces

$$1 - M_1\delta < \left| \prod_{i=0}^{n-1} (1 \pm |\phi_i|) \right| < 1 + M_1\delta\,,$$

$$1 - M_1\delta < \left| \prod_{i=0}^{n-1} (1 \pm |\psi_i|) \right| < 1 + M_1\delta\,,$$

y es posible encontrar $\vartheta = \vartheta(n, x_0, y_0, \delta)$ y $\varrho = \varrho(n, x_0, y_0, \delta)$ que verifican $\vartheta, \varrho < M_1\delta$, y

$$x_n = \alpha^n x_0 (1 + \vartheta), \qquad y_0 = \beta^{-n} y_n (1 + \varrho)\,.$$

Proposición 5.

Existen constantes $0 < \delta_4 \leq \delta_3$ *y* $M_2 > 0$ *independientes de* n *tales que si* $0 < \delta \leq \delta_4$, *y si* $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in B(\delta)$, *entonces*

$$\left|\frac{\partial x_n}{\partial x_0} - \alpha^n\right| < |\alpha|^n M_2\delta\,, \qquad \left|\frac{\partial x_n}{\partial y_0}\right| < (\alpha\beta)^n M_2\delta\,,$$

$$\left|\frac{\partial y_n}{\partial x_0}\right| < M_2\delta \qquad , \qquad \left|\frac{\partial y_n}{\partial y_0} - \beta^n\right| < |\beta|^n M_2\delta\,.$$

3. Resultado principal

En esta sección vamos a considerar de nuevo el difeomorfismo local H introducido en la sección anterior, y vamos a suponer que H está definido en un vecindario O' del origen, contenido en la bola $B(\delta_4)$.

Sea $E^s \oplus E^u$ la descomposición de $\mathbb{R}^2$ inducida por el isomorfismo $DH(0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Como vimos más arriba, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $O' = B^s \times B^u$, donde $B^s \subseteq E^s$ y $B^u \subseteq E^u$ son vecindarios del origen, contenidos en la variedad estable local $W^s_{loc}(0)$ y la variedad inestable local $W^u_{loc}(0)$ del punto $0 \in \mathbb{R}^2$. En E^s y E^u definimos una orientación compatible con la orientación usual de $\mathbb{R}^2$, y ponemos

$$B^u_+ = \{x_u \in B^u : x_u > 0\},\ O'_+ = B_s \times B^u_+.$$

Como se vió más arriba, en O' la aplicación H tiene la forma:

$$H(x_s, x_u) = (F(x_s, x_u), G(x_s, x_u)) = (\alpha x_s + f(x_s, x_u), \beta x_u + g(x_s, x_u))\,,$$

donde f, g son funciones de clase $\mathcal{C}^{\in}$ en O', que satisfacen las siguientes condiciones:

$$f(0,0) = g(0,0) = f(0,y) = g(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Por hipótesis, $O' \subseteq B(\delta_4)$, y por lo tanto todas las propiedades enunciadas en las proposiciones 1–5 se verifican en O'.

Consideremos el punto $(p, 0) \in B^s \setminus \{0\}$, y asumamos que $\gamma = \{(\gamma_s(t), \gamma_u(t)) : t \in [-1, 1]\}$ es una curva de clase $\mathcal{C}^{\in}$, tangente a $W^s_{loc}(0)$ en el punto $(p, 0) = (\gamma_s(0), \gamma_u(0))$. Denotemos por γ^n la componente conexa de $H^n\gamma \cap O'$ que contiene al punto $H^n(p, 0)$.

Definición 6.

Sea $(0, q) \in B^u \setminus \{0\}$. Decimos que una curva γ satisface la condición de tangencia normal (abreviada TN) respecto al difeomorfismo H y el punto $(0, q)$, si:

(a) γ'_u tiene un cero aislado en $t = 0$,

(b) para cualquier vecindario A del punto $(p, 0)$, existe un $t_A \in [-1, 1]$ tal que $\gamma(t_A) \in A$, y $\gamma_u(t_A) \neq 0$, si $\beta < 0$; o bien $\gamma_u(t_A)q > 0$, si $\beta > 0$.

Observemos que la condición (b) de la definición anterior supone que en caso orientable ($\beta > 0$) cualquier vecindario de $0 \in [-1, 1]$, existe un punto t_A tal que $(\gamma_s(t_A), \gamma_u(t_A))$ esté en el mismo semiplano que $(0, q)$.

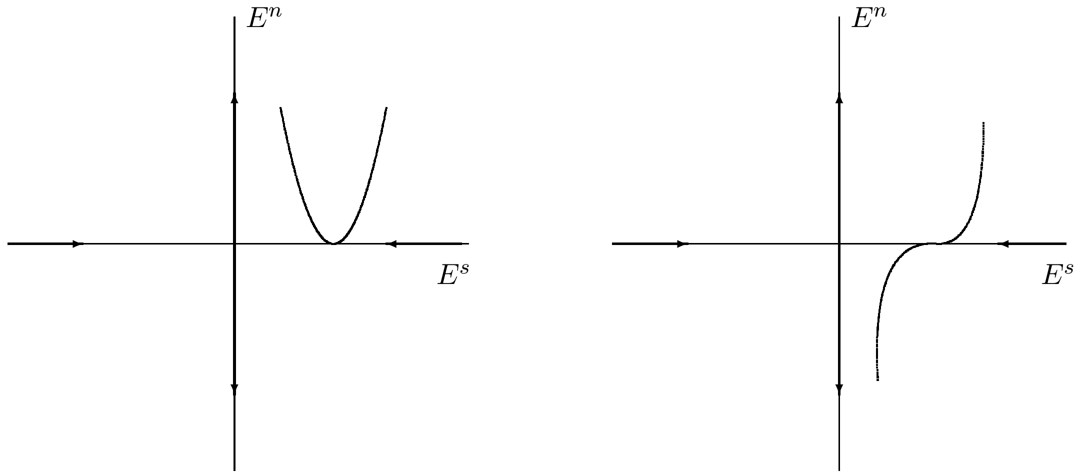

Figura 3:

Teorema 7.

Sea $(0, q) \in B^u_+$. Si la curva γ satisface la condición TN respecto al difeomorfismo H y al punto $(0, q)$, entonces para cualquier $q > \varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ y el punto $(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t}))$ pertenece al conjunto $H^{-n}([-\varepsilon, \varepsilon] \times [q - \varepsilon, q + \varepsilon]) \cap \gamma$, entonces

$$\frac{|\tilde{v}^n_s|}{|\tilde{v}^n_u|} \leq \varepsilon\,,$$

donde $\tilde{v}^n = (\tilde{v}^n_s, \tilde{v}^n_u)$ denota el vector tangente a la curva γ^n en el punto $(\gamma^n_s(\tilde{t}), \gamma^n_u(\tilde{t}))$.

(Vale la pena observar que la condición $|\tilde{v}^n_s|/|\tilde{v}^n_u| \leq \varepsilon$ significa que la inclinación del vector $\tilde{v}^n$ respecto al subespacio E^u es menor que ε, i.e. que el vector $\tilde{v}^n$ es "casi" paralelo a E^u. Por otra parte, es claro que si el punto $(\gamma^n_s(\tilde{t}), \gamma^n_u(\tilde{t}))$ pertenece a $B(\delta_4)$, entonces la distancia entre dicho punto y la variedad $W^u_{loc}(0)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, si tan solo n es suficientemente grande.)

Demostración.

Para comenzar observemos que es suficiente considerar el caso $\beta > 0$, ya que el caso $\beta < 0$ se reduce a éste, si se considera el difeomorfismo H^2 en lugar de H y la curva $H\gamma$ en vez de γ.

Sea $(\gamma_s^n(\tilde{t}), \gamma_u^n(\tilde{t})) \in H^{-n}([-\varepsilon, \varepsilon] \times [q-\varepsilon, q+\varepsilon]) \cap \gamma$. Dado que la curva γ satisface la condición TN respecto al difeomorfismo H y el punto $(0, q)$, podemos suponer que $\gamma'(\tilde{t}) \neq 0$.

Por definición

$$\begin{aligned}\tilde{v}_s^n &= \frac{d}{dt}\gamma_s^n(\tilde{t}) = \frac{d}{dt}F^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t})) = \\ &= \frac{\partial F^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t}))}{\partial \gamma_s} \cdot \gamma_s'(\tilde{t}) + \frac{\partial F^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t}))}{\partial \gamma_u} \cdot \gamma_u'(\tilde{t}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_u^n &= \frac{d}{dt}\gamma_u^n(\tilde{t}) = \frac{d}{dt}G^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t})) = \\ &= \frac{\partial G^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t}))}{\partial \gamma_s} \cdot \gamma_s'(\tilde{t}) + \frac{\partial G^n(\gamma_s(\tilde{t}), \gamma_u(\tilde{t}))}{\partial \gamma_u} \cdot \gamma_u'(\tilde{t}).\end{aligned}$$

Ahora, por la proposición 5, obtenemos:

$$\begin{aligned}|\tilde{v}_s^n| &\leq \alpha^n(1 + M_2\delta_4)|\gamma_s'(\tilde{t})| + (\alpha\beta)^n M_2\delta_4|\gamma_u'(\tilde{t})|, \\ |\tilde{v}_u^n| &\geq |\,\beta^n(1 - M_2\delta_4)|\gamma_u'(\tilde{t})| - M_2\delta_4|\gamma_s'(\tilde{t})|\,|.\end{aligned}$$

Definimos

$$s_n = \sup\left\{\frac{|\gamma_s'(t)|}{|\gamma_u'(t)|} : (\gamma_s(t), \gamma_u(t)) \in H^{-n}([-\varepsilon, \varepsilon] \times [q-\varepsilon, q+\varepsilon])\right\}.$$

(Observemos que como $\{t \in [-1, 1] : (\gamma_s(t), \gamma_u(t)) \in H^{-n}([-\varepsilon, \varepsilon] \times [q-\varepsilon, q+\varepsilon])\}$ es cerrado en $[-1, 1]$, entonces $s_n < +\infty$.)

Hay tres casos a considerar:

(1) $\beta^{-n}s_n$ es acotado cuando $n \to \infty$.

(2) $\alpha^n\beta^{-n}s_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

(3) $\alpha^n\beta^{-n}s_n$ es acotado y $\beta^{-n}s_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

(1): Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{|\tilde{v}_s^n|}{|\tilde{v}_u^n|} &\leq \frac{\alpha^n(1 + M_2\delta_4)s_n + (\alpha\beta)^n M_2\delta_4}{|\beta^n(1 - M_2\delta_4) - M_2\delta_4 s_n|} = \\ &= \frac{\alpha^n\beta^{-n}(1 + M_2\delta_4 s_n + \alpha^n M_2\delta_4}{|(1 - M_2\delta_4) - \beta^{-n}M_2\delta_4 s_n|} \qquad ,\end{aligned}$$

y dado que el denominador de la última expresión es acotado, mientras que el numerador tiende a 0 cuando $n \to \infty$, se sigue que el cociente $|\tilde{v}_s^n|/|\tilde{v}_u^n|$ también tiende a 0, si n tiende a infinito.

(2): Sean

$$Q_n = \frac{\alpha^n\beta^{-n}(1 + M_2\delta_4)s_n}{|(1 - M_2\delta_4) - \beta^{-n}M_2\delta_4 s_n|}\,, R_n = \frac{\alpha^n M_2\delta_4}{|(1 - M_2\delta_4) - \beta^{-n}M_2\delta_4 s_n|}.$$

Puesto que

$$\frac{|\tilde{v}_s^n|}{|\tilde{v}_u^n|} \leq Q_n + R_n\,.$$

es suficiente ver que cada uno de los sumandos en el miembro derecho de esta última desigualdad converge a 0, cuando n tiende a infinito.

Es claro que $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. En lo que respecta a Q_n, consideremos primero Q_n^{-1}:

$$\begin{aligned} Q_n^{-1} &= \frac{|(1 - M_2\delta_4) - \beta^{-n} M_2\delta_4 s_n|}{\alpha^n \beta^{-n}(1 + M_2\delta_4)s_n} \\ &\leq \frac{(1 - M_2\delta_4)}{\alpha^n \beta^{-n}(1 + M_2\delta_4)s_n} + \frac{M_2\delta_4}{\alpha^n(1 + M_2\delta_4)s_n} \end{aligned}$$

El primer sumando en el miembro derecho de la desigualdad tiende a 0, mientras que el segundo tiende a $+\infty$, cuando $n \to \infty$. De esta manera se tiene que $\lim_{n\to\infty} Q_n^{-1} = +\infty$, y en consecuencia $\lim_{n\to\infty} Q_n = 0$.

(3): Se prueba en forma similar al caso (1), sólo hace falta observar que en este caso el numerador es acotado, mientras que el denominador tiende a $+\infty$ junto con n. $\square$

A manera de conclusión debemos hacer un par de observaciones respecto al teorema 7. En primer lugar, el teorema se puede trasladar al semiplano B_-^u, sin necesidad de hacer mayores modificaciones en la demostración. En segundo lugar, hay que mencionar que el teorema admite una generalización "canónica" a dimensiones mayores a 2, una vez hechos los correspondientes cambios en la condición TN de la definición 6.

Bibliografía

[Alvarado] W. Alvarado (1983) Gomokliniqeskie kontury avtonomnyh sistem differentsialnyh urabneniĭ, dissertatsia, Leningradskiĭ Gosudarstvenniĭ Universitet.

[Grobman] D. M. Grobman (1959) O gomeomorfizme sistem differentsialnyh uravneniĭ, DAN SSSR, 128(5): 880–881.

[Ivanov] B. F. Ivanov (1979) K voprosu o sushestbovanii zamknutyh traektoriĭ v okrestnosti gomokliniqeskoĭ krivoĭ, Diff. Uravn., 15(8): 1411–1419.

[Hartman] P. Hartman (1960) "A lemma in the theory of structural stability of differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.* 11: 610–620.

[Palis] J. Palis, "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology* 8(4): 385-404.

[Palis-de Melo] J. Palis, W. de Melo (1979) *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, Rio de Janeiro.