Predicados sortales y cardinalidad en el contexto cuántico

Nicolás Moyano Loza
Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

Predicados sortales y cardinalidad en el contexto cuántico*

Resumen: basándose en la indistinguibilidad de las partículas idénticas, French y Krause han propuesto la existencia de una nueva clase de predicados: los '*Sortales Cuánticos*'. El peculiar comportamiento de semejantes predicados consiste en que, además de establecer un criterio de aplicación, fijan un criterio de (cuasi) cardinalidad que no precisa la individualidad de los ítems que caen en su extensión. Tales ítems no-individuales son llamados *m-átomos* y su falta de individualidad se traduce formalmente en la regla sintáctica: '$x=x$' no es una fórmula bien formada (siendo x una variable de *m-átomos*). El problema evidente en el planteo de French y Krause es que las definiciones usuales de cardinal presuponen la noción de identidad, de modo que, para hablar de cuántos no-individuos hay en la extensión de un sortal cuántico, es necesario desarrollar una noción de cardinalidad diferente de la utilizada en la teoría de conjuntos clásica (y en el sentido común). En este trabajo intentaré argumentar que esta tarea enfrenta dos problemas: 1) que las propuestas que se apartan de la noción clásica de cardinal no permiten responder a la pregunta '¿Cuántos?' en ningún sentido inteligible; y 2) aun suponiendo que lo anterior no sea un problema (porque en contextos cuánticos se suelen decir cosas que nadie entiende con bastante impunidad) las definiciones de cardinal aplicables a sortales no logran independizarse de la identidad. A partir de lo anterior, sugeriré, como conclusión, que la peculiaridad de los sortales cuánticos se debe a la individualidad primitiva de los objetos cuánticos.

Palabras clave: cardinal, identidad, indistinguibilidad, sortal, individualidad.

Sortal Predicates And Cardinality In Quantum Context

Abstract: based on the indistinguishability of the identical particles in the quantum statistics, French and Krause have proposed the existence of a new class of predicates: the 'Quantum sortal'. The peculiar behavior of such predicates is that, besides establishing criterion of application, they assign a criterion of (quasi) cardinality that does not require the individuality of the items that fall on their extension. Such non-individual items are called *m-atoms* and their lack of individuality formally results in syntactic rule: '$x = x$' is not a well-formed formula (being x a variable for m-atoms). The obvious problem with the posing of French and Krause is that the usual definition of cardinal presupposes the notion of identity, so to talk about how many non-individuals are in the extension of a quantum sortal is necessary to develop a notion of cardinality different from that used in the classical sets theory and perhaps common sense. In this paper, I will try to argue that this task faces two problems: 1) that the proposals that deviate from the classical notion of cardinal do not allow to answer the question 'How many?' in any intelligible sense; and 2) even if the above is not a problem (because in quantum contexts people often say things that nobody understands with quite impunity) cardinal definitions applicable to sortal do not achieve become independent of the identity. From the above, I suggest, in conclusion, that the peculiarity of quantum sortal is due to the primitive individuality of quantum objects.

Keywords: cardinal, identity, indistinguishability, sortal, individuality.

Fecha de recepción: 17 de febrero de 2017
Fecha de aceptación: 22 de junio de 2017

Forma de citar (APA): Moyano Loza, N. (2018). Predicados sortales y cardinalidad en el contexto cuántico. *Revista Filosofía UIS*, 17(1), doi: http://dx.doi.org/10.18273/revfil.v17n1-2018011

Forma de citar (Harvard): Moyano Loza, N. (2018). Predicados sortales y cardinalidad en el contexto cuántico. *Revista Filosofía UIS*, 17(1), 225-242.

Nicolás Moyano Loza: argentino. Licenciado en Filosofía. Profesor Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

Correo electrónico: nicolasmoyanoloza@gmail.com

* Artículo de reflexión derivado de investigación.

Predicados sortales y cardinalidad en el contexto cuántico

1. Primera sección

Según la concepción heredada (ver French y Krause, 2006, cap. 3) el hecho de que las partículas cuánticas no obedezcan a las estadísticas clásicas se debe a que ellas son no-individuales. Esquemáticamente, si tenemos dos partículas y dos estados, *A* y *B*, las distribuciones posibles de esas partículas en esos estados se puede dar de dos maneras, de acuerdo al tipo de partícula. En caso de tratarse de ***bosones idénticos***, tendríamos tres casos: 1) que las partículas se encuentren en *A*; 2) que las partículas se encuentren en *B*; 3) que una partícula se encuentre en *A* y otra en *B*. Por otro lado, si se tratase de ***fermiones idénticos***, tendríamos, de acuerdo con el *Principio de exclusión de Pauli*, sólo un caso: una partícula en *A* y otra en *B*.

Lo destacable de estos resultados es que, a diferencia de las estadísticas de *Maxwell-Boltzmann* para partículas clásicas, las estadísticas para bosones y fermiones no dan lugar a una nueva distribución al permutar las partículas que se encuentran en estados diferentes. Dicho más claro, si tratamos con partículas clásicas, es significativo decir que una partícula puede estar en A y otra en B o a la inversa, ya que la permutación da lugar a una nueva situación física; en cuántica, eso no ocurre, ya que no hay modo de distinguir la disposición original de las partículas de la que resulta de permutarlas (salvo una diferencia de signo en los estados fermiónicos). Tal resultado se conoce como *Postulado de Indistinguibilidad*.

2. Segunda sección

Lo anterior nos servirá para entender los motivos que conducen a hablar de no-individuos en cuántica. Para verlo con claridad, analicemos primero de qué manera sería posible suponer que las partículas cuánticas son individuos. Utilizando la terminología de Adams (1979) hay dos fuentes de individualidad: la estedad primitiva (*primitive thisness*), y la talidad (*suchnesses*); es decir, ser *esto* o ser de *tal y cual manera*. La primera se conecta con hechos metafísicos brutos de auto-identidad y distinción numérica, mientras que la última con propiedades (cualitativas) a las que es reducible la individualidad (Dorato y Morganti, 2013).

Ahora bien, la estedad primitiva supone un fundamento no analizable y no empírico para fundamentar la auto-identidad de un objeto y su distinción numérica con otros objetos. Pero, si la estedad es una característica no empírica, no tenemos ninguna razón para pensar que los resultados experimentales puedan mostrarnos que estamos en presencia de ella. No hay nada en los datos empíricos de una teoría científica que pueda servir para justificarla. Por lo tanto, afirmar que los bosones o los fermiones poseen estedad primitiva es un agregado gratuito, que no guarda ninguna relación lógica con las estadísticas mencionadas. Por supuesto, esto no descarta la estedad, pero remarca el hecho de que tal cosa no parece ser sugerida por la indistinguibilidad. (Volveré sobre este tema al final del artículo).

Por otro lado, la estedad es una forma de la metafísica de la modalidad llamada *haeccetismo* (Pérez Otero, 1999, p. 161). En un sentido fuerte, es la tesis según la cual mundos posibles cualitativamente idénticos pueden, sin embargo, diferir *de re*. Esto significa que no hay restricciones sobre las posibilidades de un objeto, y tiene la extraña consecuencia de permitir mundos en los cuales "tú eres un huevo cocido" (Lewis, 1986, p. 239)[1]. En un sentido débil, el *haeccetismo* implica que las posibilidades de un objeto son restringidas por sus propiedades substanciales. No discutiré los argumentos para defender o rechazar tales tesis modales; (El lector interesado, puede encontrar un análisis de las dificultades del haeccetismo en Lewis, 1986, pp. 220-248) en cambio, remarco que, al no imponer restricciones sobe las propiedades posibles de, por ejemplo, dos fermiones, el *haeccetismo*, en cualquiera de sus dos sentidos, implica que el mundo w en el que una partícula está en A y la otra en B es *diferente* del mundo cualitativamente idéntico w′, que resulta de permutar el estado de las partículas. Pero semejante resultado contradice el Postulado de Indistingubilidad y da lugar a una disposición posible que la estadística no permite; por tal motivo, debe ser rechazado.

Por su parte, la talidad, que es la otra fuente de individualidad, da lugar a la teoría del cúmulo. Ésta nos dice que, de acuerdo con la Ley de Leibniz, son las propiedades las que dan individualidad a un objeto. Si bien no presuponen propiedades no empíricas, como la estedad, presentan otro inconveniente. La ley de Leibniz nos dice que $x = y$ si y sólo si toda propiedad de x es una propiedad de y, y a la inversa. Los objetos (cúmulos de propiedades) van a ser individualizados dependiendo del alcance de la expresión "toda propiedad". Para el caso de las partículas clásicas, si bien pueden considerarse "idénticas"

[1] Si bien tal consecuencia es rara –y acaso inútil– permite justificar que, a través de los mundos posibles, "*uno es lo que come*". De todas maneras, el refrán es falso y la pluralidad de mundos es una idea difícil de digerir.

por compartir sus mismas propiedades monádicas o intrínsecas, no lo son debido a que no comparten sus propiedades relacionales o extrínsecas: si incluimos las propiedades dinámicas en el alcance de la expresión "toda propiedad", la trayectoria espacio-temporal permitirá individualizar cada partícula. Sin embargo, para el caso cuántico, esto no ocurre: sin importar que tan amplio sea el alcance de la expresión "toda propiedad", no será posible individualizar partículas cuánticas a partir de sus propiedades (French, 1988, 1989). Dicho de otro modo, las partículas cuánticas de un mismo género comparten *todas* sus propiedades (relacionales y monádicas), y sin embargo no son *una*, como se esperaría de la Ley de Leibniz. (En este caso, no me refiero a las partículas en tanto bosones o fermiones, que es una clasificación que depende de tener o no espín entero, sino a que, por ejemplo, todos los electrones o todos los protones (ambos fermiones) tendrán todas sus propiedades en común).

Ante esta situación, Simon Saunders ha intentado salvar la Ley de Leibniz, sosteniendo que, sin que importe que compartan la totalidad de sus propiedades intrínsecas y extrínsecas, las partículas cuánticas son *débilmente discernibles* a partir de relaciones simétricas e irreflexivas que se mantienen entre ellas (Saunders, 2003, 2006). Así, si tenemos dos electrones (que son ejemplos de fermiones) y tomamos las dos direcciones opuestas de espín como sus posibles estados, la relación simétrica e irreflexiva "*x* tiene una dirección opuesta de espín que *y*" nos permite discernir débilmente los electrones en cuestión. La simetría nos asegura que no hay un orden privilegiado entre los electrones, y la irreflexividad nos asegura que hay *dos* electrones relacionados. De este modo, la discernibilidad débil permitiría recuperar la individualidad de las partículas cuánticas.

Sin embargo, esta idea ha sido criticada porque las relaciones suponen la existencia de aquello que se quiere discernir mediante ellas (French y Krause, 2006; Arenhart y Krause, 2014); porque conduce a que existan objetos absolutamente indistinguibles (Hawley, 2006); o porque los objetos de los que habla Saunders no son individuales, sino relacionales (Morganti, 2011). En todo caso, este tipo de relaciones no parecen ser relaciones físicas: tenemos que el espín de *x* es arriba y el de *y* abajo y a partir de esas propiedades monádicas se construye la relación '*x* tiene diferente espín que *y*'.

Un intento diferente a los anteriores consiste en sugerir que la individualidad de las partículas cuánticas descansa en el postulado según el cual no hay estados no simétricos. El motivo por el cual esto es así es, simplemente, que las características fundamentales de la naturaleza impiden su existencia (French, 1989; French y Redhead, 1988). Por supuesto, la idea no fue aceptada entre los filósofos de la física, debido a su evidente matiz *ad hoc*.

3. Tercera sección

Dado que, a partir de lo reseñado en la sección anterior, no parece que existan fuentes de individualidad basadas en propiedades empíricas ni metafísicas para las partículas cuánticas, se debería aceptar que éstas son objetos de un género especial: *no-individuos*. Según Arenhart y Krause, un no-individuo tiene las siguientes características: 1) cuenta como *una* entidad; 2) no tienen una identidad definida (no responden a la teoría clásica de la identidad); 3) en ciertas circunstancias son *discernibles* de otros no individuos y en otras son *indiscernibles*; y 4) cualquier permutación de no individuos del mismo género no conduce a diferentes estados de cosas (Arenhart y Krause, 2013). Ahora, si entendemos la expresión "estado de cosas" como "probabilidad relevante", la no individualidad parece ser la característica de los objetos que satisfacen las estadísticas para fermiones y bosones.

Ahora bien, la teoría de conjuntos clásica con *urelementos* (ZFU) no tiene los recursos necesarios para tratar con colecciones de no-individuos. Por este motivo, Decio Krause (1992) (y luego French y Krause, 2006; y luego, con correcciones, French y Krause, 2009) ha desarrollado una extensión de ZFU, llamada *Teoría de Cuasi-conjuntos* (TCC), que permite sistematizar las propiedades formales de los conjuntos de objetos indistinguibles o no-individuos.

La estrategia de TCC consiste en agregar a los urelementos clásicos (es decir, a los individuos que pueden estar en relaciones de identidad) otros a los cuales no es posible aplicar la teoría estándar de la identidad. A estos nuevos urelementos se los llama *m*-átomos y a los tradicionales *M-átomos*[2]. Esto da lugar a una nueva clasificación de los conjuntos en cuasi-conjuntos *puros*, que son los que contienen sólo *m-átomos*, y cuasi-conjuntos *impuros*, que contienen al menos un *M*-átomo.

A pesar de que la noción usual de identidad no se aplica a los *m-átomos* (es decir, que si x e y son *m-átomos*, $x=y$ no es una fórmula bien formada) en TCC hay una relación primitiva de indistinguibilidad '$\equiv$' que se da entre ellos; además, hay un concepto definido de *identidad extensional* '$=_E$' que tiene las propiedades de la identidad estándar de las teorías de conjuntos clásicas, y que sólo se da entre *M-átomos*. Estos dos tipos de relaciones permiten que los elementos de un cuasi-conjunto puro puedan ser considerados *indistinguibles* sin que esto implique que sean *idénticos* (es decir, sin que sean el mismo objeto).

Cuando TCC se usa para interpretar la física cuántica, los *m-átomos* representan objetos cuánticos, tales como fotones, electrones, protones, etc. Por su parte, los cuasi-conjuntos puros representan las extensiones de predicados tales como 'x es un fotón', 'x es un electrón' o 'x es un protón'. Estos predicados presentan

[2] La *M* y la *m* fueron elegidas para referir a *macro* y *micro*, respectivamente.

algunas semejanzas con los *sortales*, ya que cuentan con un *criterio de aplicación* (por ejemplo, sabemos qué características debe tener algo para ser clasificado como un electrón: cierta masa, cierta carga eléctrica, etc) y, si bien no tienen asociado, como los *sortales*, un criterio de identidad, sí cuentan con un *criterio de cardinalidad* (French y Krause, 2006, p. 350; 2007)[3]. Esto, que posean un criterio de cardinalidad pero no de identidad, significa que, aunque no podamos distinguir o individualizar cada electrón particular (en caso de que existan los electrones *particulares*) hay situaciones en las que el predicado '*x* es un electrón' se aplica a un número bien definido de objetos.

Llegados a este punto, nos enfrentamos al problema fundamental de la no individualidad de los objetos cuánticos: ¿cómo es posible atribuir un cardinal a un conjunto de objetos que carecen de identidad? El problema fue ya anunciado por French y Krause, pero sólo en artículos recientes se ha prestado atención al carácter fundamental que presenta esta cuestión en la interpretación de la mecánica cuántica basada en TCC.

4. Cuarta sección

Intuitivamente, el cardinal de un conjunto es la cantidad de elementos que tiene ese conjunto. Desde un punto de vista lógico, hay dos maneras de concebirlo. Por un lado, tenemos la definición de Frege y Russell, que en un preciso trabalenguas expresa que el cardinal de un conjunto es *el conjunto de todos los conjuntos que le son coordinables*. Así, el cardinal *uno* es el conjunto de todos los conjuntos de un miembro, el *dos* el conjunto de todos los conjuntos de dos miembros, etc. Esta manera de definir el cardinal no tiene en cuenta ni la naturaleza de los elementos de un conjunto ni el orden en que tales elementos puedan estar dados. Por otro lado, la versión estilo von Neumann, empieza definiendo el número *ordinal*, que sí tiene en cuenta el orden entre los elementos del conjunto, y luego define el cardinal de un conjunto como *el menor ordinal con el que es coordinable*. Así, el ordinal *uno* es $\{\varnothing\}$, el ordinal *dos* $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, etc., y un conjunto tendrá el cardinal *n* si es coordinable con el ordinal *n*. Una diferencia obvia entre las dos maneras de entender el cardinal es que en la versión de Frege y Russell un conjunto tiene dos miembros si *pertenece a 2*, mientras que en la versión de von Neumann tendrá dos elementos si es *coordinable con 2* (es decir, con $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$).

[3] Además de las características mencionadas, French y Krause sostienen que "en ciertas situaciones, como en aquellas que involucran entidades cuánticas indistinguibles, la extensión del predicado no está bien definida" ya que "otra colección de objetos similares con la misma cardinalidad puede actuar también como su extensión". En este sentido, los límites de aplicación de un predicado sortal cuántico son difusos. Pero esto no se debe a que tales predicados sean vagos, sino a que se predican de objetos que carecen de individualidad (French y Krause, 2006, p. 250). Este comportamiento de los cuasi-conjuntos puros con la misma cantidad de elementos del mismo tipo es capturado en TCC por el *Axioma de extensionalidad débil*, según el cual, tales cuasi-conjuntos son indistinguibles.

Dejemos de lado el problema filosófico de saber cuál de las dos nociones de número cardinal es la más adecuada, y atendamos a una cuestión de importancia para el tema de este trabajo: ambas definiciones utilizan la identidad, ya sea para definir la coordinación, o para definir cada número en particular (en la versión de Frege y Russell)[4] o para definir el orden (en la versión de von Neumann). Luego, no es posible utilizarlas para establecer el cardinal de un cuasi-conjunto puro, para cuyos miembros carece de sentido hablar de identidad. Semejante resultado deja sin fundamento la estrategia de Krause y French para caracterizar los sortales cuánticos.

Dorato y Morganti refieren la dificultad, en el contexto de la mecánica cuántica, del siguiente modo: estamos en condiciones de *contar* un número bien definido de partículas, antes de enunciar para ellas el formalismo en el espacio de Hilbert; pero esto muestra que la mecánica cuántica presupone una cardinalidad bien definida para las colecciones de partículas. Dado que las nociones de cardinal utilizan la identidad, no es posible aplicarlas a colecciones de *m-átomos*. Por lo tanto, los objetos cuánticos no pueden ser no individuos a la manera de TCC (Dorato y Morganti, 2013). Además, podemos agregar, los cuasi-conjuntos puros no pueden ser la extensión de los predicados sortales cuánticos. La consecuencia que Dorato y Morganti pretenden extraer es que sólo la individualidad primitiva (entendida como distinción numérica y auto-identidad) puede explicar la cardinalidad de las partículas.

Ahora bien, Arenhart y Krause (2014, 2016) sostienen que tales argumentos contra la no individualidad suponen una conexión necesaria entre la cardinalidad y el *conteo* (que hace uso de la identidad). Por tal motivo, si se quiere seguir hablando de *m-átomos*, *cuasi-conjuntos puros*, etc..., se debe desarrollar una noción de cardinalidad diferente, no clásica, disociada del proceso de conteo que, al menos en la versión de von Neumann, conecta un cardinal con un ordinal. Un intento de desarrollar tal noción se encuentra en Arenhart y Krause (2016), que tiene su origen en la definición de conteo expuesta en Domenech y Holik (2007). La siguiente sección la desarrolla brevemente.

[4] Curiosamente, aunque la definición de Frege y Russell hace un uso evidente de la identidad, French y Krause (2006, p. 286) suponen que la noción de cardinal para cuasi-conjuntos podría ser de ese estilo. No ofrecen ningún argumento para tal afirmación, pero supongo que su idea se basa en que la definición de Frege y Russell, atendiendo a la idea de Cantor sobre los cardinales, hace abstracción del orden de los elementos del conjunto; y el orden requiere relaciones asimétricas que se definen usando la identidad. La idea de French y Krause, entonces, sería que al prescindir del orden se evita el problema con la identidad. Pero, como ya mencioné, la coordinación y la definición de cada número particular también utiliza la identidad, de modo que no tendría sentido aplicar tal definición a los cuasi-conjuntos puros.

5. Quinta sección

Un primer intento de separar la noción de cardinal y ordinal (junto con su definición asociada de conteo) se encuentra en la versión usual de TCC (Krause 1992; French y Krause, 2006, cap. 7). Consiste, sencillamente, en tratar la cardinalidad de un conjunto adoptando como primitiva la noción más débil de *cuasi-cardinalidad*. Esta manera de encarar el asunto impone axiomáticamente que todo cuasi-conjunto tiene un cardinal, pero algunos cuasi-conjuntos (los puros) no tienen asociado un ordinal[5].

La introducción axiomática de los cardinales no es un patrimonio exclusivo de TCC. En ZF, una de las maneras de obtener los cardinales es a través de la introducción del término primitivo 'número cardinal' junto con el *Axioma para números cardinales*, (que no es otra cosa que el *Principio de Hume* utilizado por Frege). Tal axioma nos dice que dos conjuntos tienen el mismo cardinal si y sólo si son coordinables. Ahora bien, hay una interpretación natural e intuitiva de la noción estándar de cardinal, usada en ZF, que permite elucidar su correlato formal y captar claramente el significado del axioma. Pero esto no ocurre en TCC: al atribuir la cuasi-cardinalidad por axiomas, se puede objetar que se solucionan los problemas de manera aparente, ya que no se ha explicado por qué las colecciones de no-individuos tienen un cardinal.

Reconociendo esta dificultad, Arenhart y Krause recurren a una definición de conteo que, según ellos, puede aplicarse a los cuasi-conjuntos finitos sin presuponer la auto-identidad o la distinguibilidad de sus elementos. Su nueva definición se basa en una idea de Domenech y Holik (2007). Estos autores notaron que en la mecánica cuántica *relativista* hay sistemas que no tienen un número de partículas bien definido. Ahora bien, esto impide interpretar tales estados como cuasi-conjuntos, ya que en la versión usual de TCC todo cuasi-cuasi conjunto tiene asociado un cuasi-cardinal[6]. Un modo de incorporar tales casos en el formalismo de TCC es tomar la cuasi-cardinalidad como un concepto derivado, y no primitivo. La idea básica para lograr tal derivación se inspira en procedimientos empíricos que no requieren la individualidad de los elementos contados para fijar un cardinal. El ejemplo utilizado por Domenech y Holik consiste en contar el número de electrones en un átomo de Helio colocándolo en una cámara de niebla y usando radiación para ionizarlo. La primera vez se observa el trazo de un ión y el trazo de un electrón, y sabemos que el trazo del electrón cuenta como *un* electrón. El átomo se vuelve a ionizar y, nuevamente, se ve el trazo de un ión (de

[5] Esta última afirmación quiere decir que *no tienen un ordinal asociado por medio de una biyección. Pero el hecho de que los cardinales sean también ordinales, implica que todo cuasi-conjunto que tenga un cardinal tendrá también un ordinal* (Arenhart y Krause (2016)). Lo que cambia es que en TCC las dos nociones se conectan sin presuponer la individualidad.

[6] Este resultado llevó a que en French y Krause (2009) se debilite uno de los axiomas para los cuasi-cardinales, con el objetivo de seguir manteniendo tal noción como primitiva.

carga 2e) y el trazo de un nuevo electrón. ¿Cuál es el electrón responsable de cada trazo? La pregunta no tiene importancia. Dado que en este punto ya no es posible extraer un nuevo electrón, el proceso de conteo termina y se debe concluir que el átomo tenía sólo *dos* electrones.

A partir del ejemplo anterior, la idea de definir el cuasi-cardinal de un cuasi-conjunto como el resultado de un proceso se puede resumir así: para saber cuántos elementos hay en un conjunto sin tener que identificarlos ni etiquetarlos, alcanza con idear un procedimiento a través del cual puedan eliminarse los miembros del conjunto, uno a uno, hasta que el conjunto quede vacío. *El número de elementos en el conjunto es el número de veces que aplicamos el anterior procedimiento*. Ahora bien, para lograr esto se debe estar en condiciones de extraer *un* elemento de un cuasi-conjunto. Con este objetivo, se debe atender a la noción de cuasi-conjunto unitario, al que, según Domenech y Holik, se debería asignar el cardinal 1. Entonces, el procedimiento para asignar un cardinal a un cuasi-conjunto *X* consistiría en contar cuántos cuasi-conjuntos unitarios pueden extraerse de *X* hasta dejarlo vacío. Esto permitiría definir los (cuasi)-cardinales en TCC imitando el procedimiento experimental de ionización de un átomo, mencionado anteriormente.

Como ya mencioné, Arenhart y Krause (2014) toman las ideas de Domenech y Holik para definir la cardinalidad dentro de TCC. Aunque su definición es más simple, la idea básica es la misma: construir los cuasi-conjuntos unitarios y utilizarlos para definir la cardinalidad. Sin entrar en detalles innecesarios, un cuasi-conjunto unitario se construye del siguiente modo. Sea *X* un conjunto *finito* no vacío del cual *x* es alguno de sus miembros; y sea $\boldsymbol{P}(X)$ el conjunto potencia de *X*. Podemos derivar, entonces, la existencia del cuasi-conjunto A_x de todos los miembros de $\boldsymbol{P}(X)$ que contienen a *x*. Así, el cuasi-conjunto unitario $<x>$ es el conjunto intersección de todos los miembros de A_x. Domenech y Holik prueban que los únicos sub-cuasi-conjuntos de $<x>$ son Ø o el propio $<x>$, y esto es lo que se esperaría de un cuasi-conjunto con cuasi-cardinal 1.

En este punto, el método de Arenhart y Krause se separa del de Domenech y Holik, pero llega a resultados similares de un modo más simple. Una vez que tenemos los cuasi-conjuntos unitarios, el paso siguiente es diseñar un procedimiento para extraerlos a partir de cualquier colección dada, *X*. Para esto se construye una función de sustracción *h* que, intuitivamente hablando, se aplica a *X* para dar lugar a un conjunto *X′*, que sólo difiere del anterior en que le falta un elemento. Luego, se aplica *h* a *X′*, y luego a *X′′*, etc., hasta que llega a un conjunto vacío. El paso siguiente en la definición de Arenhart y Krause consiste en construir una función recursiva *f* que tiene como dominio el cuasi-conjunto de los números naturales y como rango a $\boldsymbol{P}(X)$. Así, dado *X*, la función *f* le asigna a 0 el propio *X* y a $n+1$ le asigna el cuasi-conjunto que se obtiene al aplicar *n* veces *h*, menos un miembro. Finalmente, el cardinal de *X* se define como el número *n* al que *f* le asigna el conjunto vacío[7].

[7] Formalmente, *f* queda definida así: $f(0)=X$; y $f(n+1)=h(f(n))$.

Si toda esta construcción es adecuada, se habrá logrado caracterizar de una manera coherente la idea de una colección de no individuos con una cardinalidad definida, sin introducirla como un concepto primitivo, y separada del concepto de identidad. Esto, además, permitiría explicar el motivo por el cual es posible atribuir un criterio de cardinalidad, pero no de identidad, a los predicados sortales cuánticos. A pesar de todo, la sección siguiente está destinada a sugerir que las ideas anteriores no parecen adecuadas.

6. Sexta sección

¿Qué es un cuasi-conjunto unitario? French y Krause, afirman que hay dos tipos: el débil y el fuerte. En la construcción de Domenech y Holik se hace uso del segundo, y de ahora en adelante nos referiremos sólo a éste. Se lo define así:

> El conjunto unitario fuerte de x […] es un cuasi-conjunto x' cuyo único elemento es indistinguible de x. En las teorías estándar de conjuntos, este cuasi-conjunto es, por supuesto, el conjunto unitario *stricto sensu* cuyo único elemento es el propio x, pero aquí x puede ser un *m-átomo*, por lo que no hay ningún modo de hablar de algo *que sea idéntico a* x (French y Krause, 2006, p. 292)[8].

A pesar de que en TCC no es posible probar que algo sea idéntico a x (básicamente, porque la prueba recurriría a la relación de identidad, que no es aplicable a *m-átomos*) sí se puede probar que no hay un cierto y que sea indistinguible de x. A pesar de esto, “informalmente podemos razonar como si el elemento del conjunto unitario fuerte fuera x, aunque esto debe ser comprendido como un modo de hablar” (Franch y Krause, 2009, p. 10). Es decir, aunque no se pueda probar, es razonable suponer, a pesar de ser x un *m-átomo*, que no hay ningún elemento indistinguible en su conjunto-unitario.

En las primeras versiones de TCC, en las que el cuasi-cardinal era una noción primitiva, se establecía, también por definición, que al conjunto unitario de x le correspondía el cardinal 1. Posteriormente, cuando el cardinal pasó a definirse mediante el procedimiento reseñado más arriba, se demostró que un conjunto unitario tiene los subconjuntos que es esperable encontrar en un conjunto con cardinal 1, aunque éste se le atribuyó mediante un procedimiento más elaborado que una definición. Ahora bien, Jantzen (2011) señala que tal procedimiento permite definir una relación de identidad para los *m-átomos* que pertenecen al conjunto base del que se extraen los conjuntos unitarios. Su argumento es el siguiente: al suponer la existencia de $\boldsymbol{P}(X)$, siendo X un cuasi-conjunto puro, se puede establecer, por definición, la relación $x \sim y$ que mantienen todos los $y \in \langle x \rangle$. Disponiendo de esta definición, Jantzen prueba que la relación $x \sim y$ es equivalente a la fórmula de indiscernibilidad de primer orden para TCC, restringida al conjunto

[8] La cursiva pertenece al original.

potencia de X. Es decir, prueba que $y \in \langle x \rangle$ implica que x e y pertenecen a los mismos elementos de $\boldsymbol{P}(X)$[9]. Esta última afirmación, sumada a la finitud del lenguaje de TCC, hace evidente que la relación $x \sim y$ cumple con las propiedades de reflexividad y sustitutividad que, como sostiene Ketland (2006, p.307), son las propiedades formales de la identidad de primer orden. Así, '$\sim$' simula o define la identidad para *m*-átomos[10]. De este modo, la definición de conjunto unitario de Domenech y Holik permite distinguir con respecto a '$\sim$' los elementos de X, y no logra separar la cardinalidad de la identidad. Además, nos permite afirmar que sólo pertenece a $\langle x \rangle$ lo que mantiene una relación de identidad con x, cosa que en la exposición usual de TCC se insinuaba "*informalmente*", pero que estaba lejos de ser expresable. De este modo, la afirmación de Arenhart y Krause "no hay necesidad de usar la identidad en la definición del cardinal de una colección de entidades cuánticas" (2014b, p. 277) es, sino falsa, al menos cuestionable.

Una objeción a lo anterior, adelantada por Jantzen, es que '$\sim$' es una relación de identidad de primer orden, pero no una identidad estricta. Sin embargo, la crítica, aunque verdadera en su enunciación, también puede aplicarse a '$=_E$', que se supone que captura la identidad clásica para los *M-átomos* y la parte de la teoría que se corresponde con ZF. De modo que, si alguien quiere llevar tal crítica hasta sus últimas consecuencias, debe abandonar tanto '$\sim$' como '$=_E$'. Así, o se rechazan las dos relaciones y se abandona TCC, o se aceptan ambas y se reconoce que hay relaciones de identidad para los dos tipos de urelementos de la teoría; en ambos casos, la cardinalidad seguiría aplicándose a colecciones de elementos para los cuales tiene sentido hablar de relaciones de identidad o diferencia.

Es interesante notar, además, que French y Krause suelen ser poco claros con respecto al modo de comprender las expresiones de identidad dentro TCC. Un ejemplo es el uso de la expresión '$=_E$' que, sostienen, carece de sentido cuando se aplica a *m-átomos*, pero que aparece en la expresión $\neg(x =_E x)$, la cual se sigue de las definiciones de TCC al suponer que x es un *m-átomo*. La pregunta obvia es: ¿cómo es posible que la fórmula $\neg\phi$ sea significativa si no lo es ϕ? La respuesta

[9] Formalmente, $y \in \langle x \rangle$ implica $\forall_{z \in P(x)}(x \in z \leftrightarrow y \in z)$.

[10] La afirmación de Ketland, que fundamenta la crítica de Jansen, según la cual la identidad puede ser definida por una relación que cumpla con la reflexividad y la sustitutividad, se basa en la reflexión que hace Quine en el capítulo 5 de su *Filosofía de la Lógica*. En resumen, Quine sostiene que, si tenemos un lenguaje que conste de un predicado unario '*A*' y un predicado binario '*C*', podemos definir $x=y$ como una abreviatura de $(Ax \leftrightarrow Ay) \wedge \forall z((Cxz \leftrightarrow Cyz) \wedge (Czx \leftrightarrow Czy))$. Es decir, podemos afirmar que hay identidad cuando x e y son indistinguibles con respecto a los predicados '*A*' y '*C*'. Se puede probar con relativa sencillez (aunque no lo haré en esta nota) que, al reemplazar '=' por su abreviatura, tanto la reflexividad, '$x = x$', como la sustitutividad, '$x=y \rightarrow (Fx \rightarrow Fy)$', son esquemas válidos. Y, dado que Gödel mostró que estos dos esquemas son suficientes para obtener un cálculo de primer orden con identidad *completo*, nuestra abreviatura bastaría para capturar las propiedades formales de la identidad de primer orden. Es importante notar que, si el número de predicados del lenguaje es infinito, el procedimiento anterior no podría realizarse.

que ofrecen es que, "intuitivamente, quizá podamos decir que, como el concepto de identidad no debe tener sentido para *m*-objetos, sería bastante natural que ellos no puedan ser idénticos a sí mismos." (French y Krause 2009, p. 11). A pesar de esta explicación, y de mi deseo real por intuir aquello que intuyen los autores, me resulta imposible entender que si niego algo que no tiene sentido, afirmo que no se da aquello que no tiene sentido. Tal vez esto sea sólo una limitación de mi parte, pero no veo, presuponiendo las ideas básicas de TCC, en qué se diferencia $\neg(x =_E x)$ de ¬ (chancho moneda la taza).

Por último, quisiera mencionar otra posible objeción a las observaciones que se han realizado. Se podría decir que los conjuntos unitarios $<x>$ que se extraen de *X* representan, cuando el formalismo se interpreta como un proceso físico, fases del conteo. Sólo allí tiene sentido aplicar '~' y establecer relaciones de identidad entre los elementos de *x*, ya que lo que se cuenta son esas fases y no los elementos del conjunto. Pero, en este caso, sería falsa la frase que justificaba la definición de cuasi-cardinal, "el número de elementos en el conjunto es el número de veces que aplicamos el procedimiento de extracción", ya que el número de aplicaciones sería idéntico al número de elementos extraídos, pero no al de elementos en el conjunto. De hecho, la función recursiva *f* que utilizan French y Krause sólo nos da el número de elementos extraídos y no el de elementos en el conjunto. Por supuesto, *intuitivamente* ambos números son iguales pero, habría que agregar, sólo si nuestra intuición es clásica. Estrictamente, la sugerencia de French y Krause requiere una explicación adicional acerca de los motivos por los cuales es verdadera la afirmación "*el número de extracciones = el número de elementos en el cuasi-conjunto*". ¿Acaso es porque cada miembro del cuasi-conjunto se puede diferenciar del resto, al igual que los objetos extraídos, a través de '~' (o de alguna otra manera)? Si la respuesta es afirmativa, se debe aceptar que hay relaciones de identidad y diferencia entre *m-átomos*; por otro lado, si la respuesta es negativa, no veo cómo justificar la identidad numérica del conteo y de la colección de *m-átomos*, sin apelar a intuiciones basadas en el comportamiento teórico-conjuntista de los individuos clásicos (por ejemplo, los de ZF).

7. Séptima sección

La propuesta de French y Krause tiene su origen en la imposibilidad de aplicar la ley de Leibniz a los objetos cuánticos, ya que éstos pueden tener todas sus propiedades en común y aun así ser diferentes. Como argumentan que el *Postulado de Indistinguibilidad* descarta que tal diferencia sea resultado de algún tipo de individualidad primitiva, concluyen que los objetos cuánticos son no individuales. A pesar de todo, no descartan que existan predicados *sortales* cuánticos que nos permitan asignar un cardinal a colecciones de tales objetos no individuales. El parecido con los *sortales* clásicos es evidente: un físico sabe a qué aplicar el predicado '*x* es un electrón' y puede contar electrones, del mismo modo que cualquier hablante competente puede aplicar el predicado '*x* es un gato' y puede contar gatos; la diferencia entre los predicados del lenguaje natural y los de la mecánica cuántica no reside en el predicado en sí, sino en los ítems que tales predicados agrupan[11]. Todo esto presupone que tiene sentido aplicar la noción de cardinal a conjuntos de objeto s indistinguibles. Pero, como ya vimos, esta idea está lejos de ser incuestionable.

Surge, entonces, el problema: ¿si los objetos cuánticos no son individuales ni no individuales, cómo caracterizarlos? Ante esta pregunta, se me ocurren dos respuestas. La primera es eliminar tales objetos de nuestra ontología. Esta es la propuesta de la ontología de no individuos de la *Interpretación Modal Hamiltoniana* (IMH) que ha sido desarrollada extensamente en Lombardi y Castagnino (2008). En ésta, los objetos cuánticos son cúmulos de propiedades, representados en un álgebra de operadores en cuyo espacio se definen los estados del sistema cuántico. Esto permite abandonar la idea de un sustrato al cual se aplican las propiedades, ya que el vector de estado pierde su prioridad con respecto a los operadores (que representan, ontológicamente, a las propiedades posibles). Sin embargo, la idea de cúmulo no debe confundirse con la tradicional versión empirista. Para entender el por qué, se debe atender a lo siguiente: en IMH, los operadores representan propiedades tipo, en tanto que los autovalores representan propiedades caso de esos operadores. Dado que en IMH el sistema es representado por un grupo de operadores, y dado que, por el teorema de Kochen-Specker, no es posible asignar un valor *a todos* ellos de manera consistente, se sigue que *el sistema no queda caracterizado por sus propiedades caso* (autovalores). Por lo tanto, es un cúmulo de propiedades (operadores) *posibles*. No entraré en los detalles de IMH, ya que no se puede ofrecer una imagen abreviada sin evitar detalles importantes (cada afirmación ontológica está vinculada a su correlato formal). No obstante, mencionaré que el problema de la indistinguibilidad de las partículas idénticas se resuelve deduciendo la simetría o anti-simetría de las posibles distribuciones estadísticas, a partir de la simetría de los observables del sistema compuesto.

La otra opción es volver a la idea de individualidad primitiva y repasar los motivos que se ofrecieron para descartarla. Supongamos que tenemos un sistema cuántico de dos partículas idénticas, $|\Psi\rangle$. Sabemos, por el *Postulado de Indistinguibilidad* (PI), que al permutar las partículas no hay ninguna diferencia observable. Además, sabemos que si $|\Psi\rangle$ es un estado bosónico, $\boldsymbol{P}|\Psi\rangle=|\Psi\rangle$, y si es un estado fermiónico, $\boldsymbol{P}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$. Si ahora tenemos que las dos partículas de $|\Psi\rangle$ sólo pueden estar distribuidas en los estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$, pueden

[11] En este punto me separo un poco de la idea original de *sortal cuántico* desarrollada en French y Krause (2007), ya que al publicar su artículo, los autores todavía consideraban al cuasi-cardinal como un concepto primitivo. Sin embargo, creo que el modo en que presento la idea no modifica en nada importante la original, y se adapta de manera adecuada a la idea de contar los elementos de un cuasi-conjunto puro, que a la que prestan atención a partir de (2009) y a la que Krause adhiere en sus trabajos con Arenhart, a partir de (2014).

ocurrir dos cosas: si las partículas son fermiones idénticos, los estados $|\Psi> = |A>|A>$ y $|\Psi>=|B>|B>$ quedan descartados, ya que al intercambiar los dos factores volvemos a tener $|\Psi>$ y no su negativo. Sin embargo, tales estados estarían permitidos si se tratase de bosones idénticos. Por otro lado, el estado $|\Psi>=|A>|B>$ queda descartado tanto para fermiones como para bosones, ya que al intercambiar sus factores no obtenemos $|\Psi>$ ni su negativo. Que no exista tal estado es el motivo por el cual no se puede nombrar o etiquetar a las partículas en $|\Psi>$, ni establecer un orden entre ellos: no tiene sentido decir *"el primer protón está en A y el segundo en B"*; sin embargo, si se puede atribuir un cardinal a $|\Psi>$, ya que no hay ninguna dificultad específica con la oración *"hay dos protones"*. Dado que el anterior estado se ha descartado, el modo correcto de representar la distribución en los dos estados es $|A>|B> - |B>|A>$, si se trata de fermiones idénticos y $|A>|B> + |B>|A>$ si se trata de bosones[12]. En resumen, $|\Psi>$ puede tener los estados:

$|A>|A>$
$|B>|B>$
$|A>|B> + |B>|A>$
$|A>|B> - |B>|A>$

Es evidente que los estados 1) – 3) son estados bosónicos, ya que $\boldsymbol{P}|\Psi> = |\Psi>$ y que 4) es el único estado fermiónico, ya que sólo para él $\boldsymbol{P}|\Psi> = -|\Psi>$.

Al observar los cuatro casos, se ve claramente que la ley de Leibniz no permite diferenciar dos partículas en los casos 1) y 2). Los casos 3) y 4) son más difíciles de ver, pero no tanto: dado que hay una superposición de estados, cada partícula participa de $|A>$ y de $|B>$, impidiendo que la ley de Leibniz haga su trabajo. Por otro lado, la permutación aplicada a estados fermiónicos muestra la imposibilidad de aplicar la ley de Leibniz a los estados como un todo, ya que aunque $|\Psi>$ y $-|\Psi>$ sean indistinguibles, no son idénticos. Si lo fueran, $|\Psi> = \boldsymbol{P}|\Psi> = -|\Psi> = 0$, de modo que no representaría ningún estado. Esto, por supuesto, se debe a que tal permutación incorpora el *Principio de Exclusión de Pauli*. Estas consideraciones tiran abajo cualquier intento de individualizar objetos a partir de sus propiedades.

Ahora bien, ¿ocurre lo mismo con principios de individualidad primitiva? La crítica fundamental es que la permutación debería dar lugar a una nueva distribución de las partículas, pero que tal caso no se observa. Sin embargo, al observar 3) y 4), vemos que la crítica no tiene demasiado sentido, ya que las partículas no se encuentran separadamente ni en $|A>$ ni en $|B>$, sino que participan de ambos estados. Así, no parece adecuado objetar que la identidad primitiva atribuye a cada estado un peso estadístico erróneo. Para el caso de los bosones, cada uno de los estados 1) – 3) tienen el valor 1/3, ya que los individuos pueden estar en el

[12] En los dos casos, las expresiones se multiplican por un factor de normalización $1/\sqrt{2}$. Pero, para los fines de este trabajo, el asunto no es relevante.

mismo estado |A> o en el mismo estado |B> o en una superposición de ambos estados; y para el caso de tratarse de fermiones individuales, el estado 4) tiene valor 1, ya que sólo pueden estar en la superposición de ambos estados. La crítica basada en el peso estadístico de cada distribución, tiene su origen, posiblemente, en la aceptación implícita de otra premisa: que los individuos cuánticos deben tener propiedades o estados definidos. Pero esto no es algo con lo que deba comprometerse un defensor de la identidad primitiva.

Además, aceptando que cada individuo se encuentra en un estado de superposición, el argumento contra el *haeccetismo* también pierde fuerza. Porque ya no es posible imaginar un mundo *w'* que sólo difiera del actual en que las partículas están en estados diferentes. De modo que, si la individualidad primitiva debiera comprometerse con el *haeccetismo* (cosa con la que no todos parecen estar de acuerdo), entonces tampoco tendríamos razones para rechazarla.

Por otro lado, hay dos ventajas más en la individualidad comprendida de esta manera. En primer lugar, permite entender el motivo por el cual los predicados cuánticos tienen un criterio de aplicación pero no de identidad: *no son sortales*, ya que el trabajo de individuación no es realizado por los predicados. En segundo lugar, la individualidad primitiva no genera conflictos con la cardinalidad. Por supuesto, una modesta idea metafísica no presenta toda la pirotecnia de un elaborado formalismo; pero –y esta tal vez sea su mayor virtud– tampoco busca encandilarnos para ocultar lo que de todas maneras se oculta a nuestra mirada.

Dado que las anteriores parecen ser alternativas adecuadas para interpretar el extraño comportamiento estadístico de los objetos cuánticos; y dado que tales alternativas no nos obligan a desacreditar creencias muy bien fundadas acerca de la cardinalidad de un conjunto, no parece que tengamos que dar demasiado crédito a la no individualidad. Esto no debe sonar despectivo: los trabajos de Krause y sus colaboradores son de un rigor formal destacable. Su falla, creo, es confundir la claridad de tales formalismos con lo que podría entenderse como una mayor comprensión de un fenómeno extremadamente confuso.

Referencias

Adams, R. (1979). Primitive thisness and primitive identity. *The Journal of Philosophy*, 76, 5-26.

Arenhart, J. and Krause, D. (2014a). Why non-individuality?A discussion on individuality, identity, and cardinality in the quantum context. *Erkenntnis*, 79, 1-18.

Arenhart, J. and Krause, D. (2014b). From primitive identity to the non-individuality of quantum objects. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 46, 273-282.

Arenhart, J. and Krause, D. (2016). Individuality, quantum physics, and a metaphysics of non-individuals. The role of the formal. En Guay, A. y Pradeu, T. (Eds.), *Individuals Across the Sciences*. Oxford: Oxford University Press.

Domenech, G. y Holik, F. (2007). A discussion on particle number and quantum indistinguishability. *Foundations of Physics*, 37(6), 855-878.

Dorato, M. y Morganti, M. (2013). Grades of individuality. A pluralistic view of identity in quantum mechanics and in the sciences. *Philosophical Studies*, 163, 591-610.

French, S. y Redhead, M. (1988). Quantum mechanics and the identity of the indiscernibles. *British Journal for the Philosophy of Science*, (39), 233-246.

French, S. (1989). Identity and individuality in classical and quantum physics. *Australasian Journal of Philosophy*, (67), 432-446.

French, S. y Krause, D. (2006). *Identity in physics. A historical, philosophical and formal analysis*. Oxford: Oxford University Press.

French, S. y Krause, D. (2007). Quantum sortal predicates. *Synthese*, (154), 417-430.

French, S. y Krause, D. (2009). Remarks on the theory of quasi-set. *Studia Logica*, (99), 1-24.

Hawley, K. (2006). Weak discernibility. *Analysis*, 66(4), 300-303.

Jantzen, B. (2011). No two entities without identity. *Synthese*, (181), 433-450

Ketland. (2006). Structuralism and the identity of indiscernibles. *Analysis*, (66), 303-315.

Krause, D. (1992). On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (33), 402-411.

Lewis, D. (1986). *On the plurality of worlds*. Oxford: Basil Blackwell.

Lombardi, O. y Castagnino, M. (2008). A modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science Part B*, 39(2), 380-443.

Morganti, M. (2011). Identity in physics: statistics and the (non-) individuality of quantum particles. En De Regt, H. W.; Hartmann, S. y Okasha, S. (Eds.), *EPSA Philosophy of Scienc.* Amsterdam, Springer, Berlin: Springer.

Pérez Otero, M. (1999). *Conceptos Modales e Identidad*. Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona.

Saunders, S. (2003). Physics and Leibniz's principles. En Brading, K. y Castellani, E. (Eds), *Symmetries in Physics: New Reflections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Saunders, S. (2006). Are quantum particles objects? *Analysis*, (66), 52-63.