Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 31 • núm. 2 • agosto de 2019

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 31 • núm. 2 • agosto de 2019*

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de julio de 2019.

www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

DOI: 10.24844/EM3102.00

La revista Educación Matemática como un foro para la colaboración internacional

Desde hace ya un tiempo he tenido interés en la producción académica de mis colegas mexicanos, principalmente en su producción en términos de publicaciones científicas. Muy seguramente es un interés alimentado por la competencia académica que de maneras implícitas y explícitas se manifiesta en la academia.

Recientemente he tenido la oportunidad de estudiar de manera más sistemática la productividad científica de los educadores matemáticos mexicanos, como se ve reflejada en las revistas de investigación. Todo esto gracias al trabajo de investigación que Valeria Cruz Milán está desarrollando al respecto en el Instituto Politécnico Nacional de México, y el cual tengo el gusto de supervisar.

El trabajo de Valeria me ha permitido descubrir que la producción científica de los colegas mexicanos en las revistas mejor posicionadas tiene rasgos característicos. Uno de ellos es su grado de colaboración internacional, el cual es generalmente bajo: salvo algunas excepciones, los educadores matemáticos mexicanos tienden a publicar en colaboración con personas de su misma institución, y en menor medida con otras instituciones mexicanas. Cuando se trata de colaboración internacional, una parte considerable de ésta tiende a ser con España. Esta observación es corroborada por Machado, Fanjul, López y Povedano (2015).

Tomemos como ejemplo la revista Educación Matemática, una de las revistas donde más mexicanos publican sus investigaciones. Si consideramos los artículos de investigación publicados en los dos volúmenes completos más recientes

–volúmenes 30 y 29 de los años 2018 y 2017 respectivamente–, veremos que 19 de ellos fueron escritos por autores mexicanos. Cinco de ellos en colaboración internacional, de los cuales dos son con España (el resto de los colaboradores provienen de Costa Rica, EUA y Uruguay).

La investigación muestra que la colaboración en la investigación tiene efectos positivos en la productividad científica. Por ejemplo, puede facilitar el acceso al financiamiento, proveer de visibilidad, e incrementar la productividad (e.g. Lee y Bozeman 2005). En particular se ha evidenciado que la colaboración internacional produce resultados notables en el desempeño científico de los individuos y los grupos de investigación (e.g. Van Raan, 1998; Nguyen, Ho-Le y Le, 2017).

La revista Educación Matemática ha sido un foro donde se ha manifestado la colaboración internacional no solo con México, sino entre autores provenientes de países de otras regiones. Sin embargo, pienso que la revista Educación Matemática estaría abierta a recibir aún más colaboraciones internacionales que reúnan el talento y la creatividad de educadoras y educadores matemáticos de diferentes latitudes. Un ejemplo de tal tipo de cooperación es el trabajo de Camilo Andrés Rodríguez-Nieto y colaboradores que se incluye en este nuevo número de la revista y que representa una colaboración entre personas e instituciones de México y Chile.

Mario Sánchez Aguilar
Editor Asociado

REFERENCIAS

Lee, S. y Bozeman, B. (2005). The impact of research collaboration on scientific productivity. *Social Studies of Science*, *35*(5), 673–702. doi: 10.1177/0306312705052359

Machado, A. M., Fanjul, N. J., López, R. B. y Povedano, N. A. (2015). Análisis bibliométrico de la revista RELIME (1997-2011). *Investigación Bibliotecológica*, *29*(66), 91–104. doi: 10.1016/j.ibbai.2016.02.027

Nguyen, T. V., Ho-Le, T. P. y Le, U. V. (2017). International collaboration in scientific research in Vietnam: an analysis of patterns and impact. *Scientometrics*, *110*(2), 1035–1051. doi: 10.1007/s11192-016-2201-1

Van Raan, A. F. J. (1998). The influence of international collaboration on the impact of research results. *Scientometrics*, *42*(3), 423–428. doi: 10.1007/BF02458380

ARTÍCULO INVITADO DOI: 10.24844/EM3102.01

Micromundos, Construccionismo y Matemáticas[1]

Microworlds, Constructionism and Maths[2]

Richard Noss[3]
Celia Hoyles[4]

Resumen: En este artículo, esbozamos la idea del construccionismo y cómo puede ser puesta en práctica a través del diseño de "micromundos", islas aisladas y accesibles de actividad, dónde se encuentren pepitas de conocimiento relevante a través de herramientas y secuencias de actividades especialmente diseñadas y con pedagogías adecuadamente orientadas. En la segunda parte del artículo, describimos el diseño, implementación y evaluación de una intervención construccionista, ScratchMaths, introducida en Inglaterra, país en el que la computación es obligatoria para todos los niveles educativos (de los 5 a los 16 años). Este estudio de caso pone de manifiesto la tensión entre la fidelidad de una innovación al implementarla y su adaptación por parte de los

Fecha de recepción: 16 de enero de 2019. **Fecha de aceptación:** 2 de abril de 2019.

[1] Este artículo se basa en parte en el de "Constructionism and Microworlds", publicado en Duval, E., Sharples, M., & Sutherland, R. (2017). (Eds.). *Technology Enhanced Learning: Research Themes* (pp. 29–35). Cham, Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-02600-8_3

[2] Traducción del inglés: Ana Isabel Sacristán Rock

[3] UCL Knowledge Lab, UCL Institute of Education, University College London, r.noss@ucl.ac.uk, orcid.org/0000-0001-6301-6489

[4] UCL Knowledge Lab, UCL Institute of Education, University College London, c.hoyles@ucl.ac.uk, orcid.org/0000-0001-5724-7600

profesores, especialmente en el contexto de las matemáticas, la cuál es una materia muy exigente tanto para los docentes como para los alumnos.

Palabras clave: *construccionismo; micromundos; ScratchMaths; fidelidad*

Abstract: In this paper, we outline the notion of constructionism and how it might be put into practice through the design of "microworlds", insulated and accessible islands of activity in which nuggets of relevant knowledge are encountered through specially designed tools, sequences of activities with suitably oriented pedagogies. In the second part of the paper, we describe the design, implementation and evaluation of a constructionist intervention, ScratchMaths, introduced in England where computing is compulsory throughout schooling (from 5 to 16 years). This case study highlights the tension between the fidelity of implementation of an innovation and its adaptation by teachers, especially the context of mathematics, which is high stakes for both teachers and learners.

Keywords: constructionism; *microworlds; ScratchMaths; fidelity*

1. INTRODUCCIÓN

Empezamos con una observación que Seymour Papert escribió en la cubierta del libro *Geometría de la Tortuga* (Abelson and diSessa, 1981) donde explica que ese libro representa "el primero de una nueva generación de libros de texto de matemáticas". Parece que eso era una expectativa demasiado grande: aún el observador más optimista tendría que admitir que los cambios no se dieron tal como Papert lo contempló. Pero cabe notar que en su observación de que habría algo sobre lo cual se querrían escribir libros y que la gente los leyera, hay un currículo (o al menos un currículo parcial) implícito.

¿Qué tan exitosos han sido esta "nueva generación" de potenciales currículos y libros de texto para lograr las metas de un cambio fundamental de lo que se puede aprender matemáticamente? Un juicio es claramente una cuestión de perspectiva y, para nosotros, el cambio se puede considerar como fundamental hasta el grado en que se ha basado en dos ideas clave: la idea del *construccionismo,* y la idea de *micromundo.* Y como todas las grandes ideas, ambas han sido sujetas a presiones para diluir lo fundamental a favor de lo pragmático. Entender lo que esto implica y qué tan lejos hemos llegado en estos últimos cuarenta años nos ayudará a entender por qué el cambio fundamental es tan difícil.

2. ¿QUÉ ES EL CONSTRUCCIONISMO?

Fue hace aproximadamente 50 años que Seymour Papert lanzó la idea del *construccionismo*. La idea central es que es una manera poderosa para que los estudiantes construyan estructuras de conocimiento en su mente, que construyan representaciones externas, entidades físicas o virtuales sobre las cuales se pueda reflexionar y que puedan ser editadas y compartidas. La interpretación más amplia, relatada continuamente en revistas científicas y populares, es que el construccionismo es lo mismo que el *constructivismo*: no lo es.

> El construccionismo [...] tiene la misma connotación del constructivismo del aprendizaje como "creación de estructuras de conocimiento", independientemente de las circunstancias del aprendizaje. Luego agrega la idea de que esto ocurre en forma especialmente oportuna en un contexto donde la persona que aprende está conscientemente dedicada a construir una entidad pública, ya sea un castillo de arena en la playa o una teoría del universo. (Papert, 1991/2002, p. 2)

A diferencia del constructivismo, el construccionismo busca, por lo tanto, formar *una teoría de la pedagogía,* al abordar directamente la pregunta de cómo ayudar mejor a los estudiantes a aprender. En contraste, el constructivismo es una teoría de cómo la gente aprende, independientemente de las circunstancias de ese aprendizaje, o de si se llega, o no, a involucrar la enseñanza (para una introducción al constructivismo véase, por ejemplo, von Glasersfeld, 1989). Como lo plantea Papert, "la palabra con *n*", el *construccionismo,* más que "la palabra con *v*", el *constructivismo,* aspira a intentar teorizar estrategias que alineen las maneras en que la gente aprende, con las maneras en que hace sentido ayudarles a entender, especialmente a través del diseño de artefactos adecuados. La palabra "especialmente" es aquí crucial, puesto que centra la atención en el *diseño*: en el diseño de ambientes construccionistas, lo cual lleva a la noción de *micromundo* que discutiremos más adelante.

Un ejemplo clásico de ambiente construccionista es uno que se centra en Logo, el lenguaje de programación derivado del lenguaje de inteligencia artificial, LISP (Harvey, 1997). Logo era, y sigue siendo en sus diversas encarnaciones, un lenguaje de programación completo, a través del cual gente de todas las edades puede programar cualquier cosa que pueda imaginar –una imagen, un robot, un video juego o una pieza musical. En su más reciente encarnación en Scratch, cuenta con millones de adultos y niños publicando y "reinventando" lo que es esencialmente código Logo/Lisp con una intuitiva y manipulativa interfaz visual basada en bloques.

La tortuga (la cual fue inventada algunos años después del lanzamiento del primer Logo) tiene muchas facetas, primordialmente como un medio a través del cual pueden participar incluso niños pequeños con ideas que son fundamentales para las matemáticas (tales como la geometría diferencial) y que de otra manera estarían fuera de su alcance. Por ejemplo, algunas de las ideas fundamentales de la geometría diferencial, como curvatura, se alega que pueden ser más accesibles a través de un medio expresivo que saque provecho de la sintonicidad corporal. La presencia de objetos manipulables "concretos" abre tres potencialidades distintas pero relacionadas, para el alumno.

Primero, el ambiente construccionista busca presentar un medio atractivo donde explorar y aprender de la retroalimentación (en diferentes formas), de la misma manera en que uno puede dominar un idioma extranjero al vivir en el país adecuado. Segundo, el alumno puede adoptar un acercamiento al aprendizaje basado en la construcción, diseñado de tal manera que los estudiantes se topen con "ideas poderosas" o pepitas intelectuales. La noción de ideas poderosas captura la noción de involucramiento con *herramientas intelectuales,* maneras de pensar que ofrecen al alumno acceso a conceptos y estrategias clave, que conectan con su propio conocimiento intuitivo. (Para una revisión comprensiva del papel de las herramientas en el aprendizaje de las matemáticas, véase Monaghan, Trouche & Borwein, 2016).

Tercero, las herramientas construccionistas buscan ser expresivas, es decir que pueden ser adaptadas por sus usuarios para construir nuevas entidades, de maneras que surgen en la actividad. Al mismo tiempo, las herramientas restringen y dan forma a lo que los estudiantes pueden hacer, pensar y aprender y esas restricciones pueden diseñarse a modo de ser productivas para el aprendizaje. (Véase también el debate en torno a las nociones de abstracción situada, genesis instrumental y orquestación en Hoyles, Noss & Kent, 2004).

Las potencialidades de Logo, nos permiten generalizar la idea del construccionismo más allá del caso de Logo y de sus descendientes. A medida que Logo evolucionó, el espacio digital de su entorno también evolucionó en tándem (¡Logo fue inventado unos 30 años antes que la web!). Adicionalmente, la teoría del construccionismo ha adquirido más forma y detalle, inspirando a diseñadores a construir otras tecnologías que apoyan sus objetivos fundamentales: Boxer, Scratch,[5] NetLogo,[6] ToonTalk,[7] y más recientemente hardware que finalmente ha llegado a ser omnipresente como el Raspberry Pi y el BBC Micro:bit. Numerosos ambientes enfocados al conocimiento han incursionado en la arena del construccionismo, con visiones similares del aprendizaje, tales como, en matemáticas, los sistemas de geometría dinámica (Sinclair & Crespo, 2006) o, en música, *Impromptu* (Bamberger & Hernández, 1999). Eisenberg (2003) también contribuyó a este conjunto, a través de sus descripciones de ambientes que mezclan materiales tradicionales y computacionales. A lo largo de los años, el construccionismo también ha aportado el marco de una línea fértil de investigación que detalla trayectorias de aprendizaje mediante herramientas, en una amplia gama de tópicos que van desde la topología hasta la composición musical.

La discusión previa ilustra que, tal como Papert se esforzó por resaltar, el construccionismo busca desarrollar estructuras de conocimiento en la mente junto con estructuras físicas o virtuales que son externas a la mente, y por ende es tanto una teoría epistemológica como una pedagogía (ver Harel & Papert, 1991). Papert explica que la distinción entre el *instruccionismo* y el *construccionismo* también concierne a la epistemología y no es sólo acerca de dos maneras de pensar sobre la transmisión del conocimiento. Más bien, la distinción va más allá de la adquisición de conocimiento, para abordar la naturaleza del conocimiento y la naturaleza del conocer (Papert, 1993/1995). En otras palabras, el construccionismo implica escoger o designar representaciones, involucrando artefactos y pedagogías adecuadamente orientadas que conjuntamente puedan brindar un cambio fundamental al *cómo* aprender y al *qué* se aprende.

Una discusión estimulante de la reflexión sobre este cambio epistemológico fue explorada por Wilensky y Papert, quienes alegan que el construccionismo ha:

> cambiado el enfoque de los medios al objeto de aprendizaje... cómo la estructura y las propiedades del conocimiento afectan las posibilidades de aprendizaje y el poder

[5] http://scratch.mit.edu/
[6] http://ccl.northwestern.edu/netlogo/
[7] http://www.toontalk.com/

> que les otorgan a individuos y a grupos. (Wilensky & Papert, 2010, p. 1; traducción del inglés)[8]

El nombre que le dan a este proceso es *reestructuración,*

> ... la codificación del conocimiento en un dominio como una función de la infraestructura representacional que se usa para expresar ese conocimiento. Un cambio de una estructuración de un dominio a otro como consecuencia de ese cambio de infraestructura representacional, lo llamamos reestructuración. *(ibíd.,* pp. 2-3, traducción del inglés)

El ejemplo que dan (Papert, 2006) es el cambio (aunque claramente no llevado a cabo con propósitos educativos) de los números romanos a arábigos, un cambio que hizo posible que casi todo mundo pudiera calcular de maneras hasta entonces recónditas. Nuestro reto es pensar más allá de este ejemplo, y buscar identificar en dónde la presencia de la computadora ha cambiado, no sólo cómo el conocimiento se extiende y desarrolla, sino la naturaleza del conocimiento mismo, en disciplinas científicas, socio-científicas y de humanidades (véase, por ejemplo, Resnick, 1995).

Uno de los retos persistentes para lograr la visión del construccionismo, es la tensión entre buscar enseñar un contenido especifico como, por ejemplo, de matemáticas o de música, y al mismo tiempo otorgar al alumno la *experiencia* de construir, crear, hacer, y resolver problemas explotando ese conocimiento de contenido. Esas dos metas no son, por supuesto, antitéticas, pero tampoco es obvio cómo se pueden alinear para propósitos pedagógicos. Una solución que ha evolucionado es el diseño de "micromundos", de "islas" aisladas y accesibles de actividad, donde se encuentren pepitas de conocimiento relevante de una manera "natural" a través del uso de herramientas digitales.

[8] Este puede ser un momento apropiado para dirigir al lector interesado al *NetLogo* de Wilensky, cuyas copias contienen no solo el lenguaje de programación mismo, sino también docenas o cientos de ideas matemáticas que son 'reestructuraciones' posibilitadas por la nueva herramienta.

3. MICROMUNDOS

Hoyles (1993) describe la evolución de la idea de *micromundo* desde su génesis en la comunidad de inteligencia artificial, donde se usó para describir un dominio relativamente simple y restringido, en el cual los sistemas computacionales podrían resolver problemas, hasta un ambiente más ampliamente concebido que sirviera de representación concreta de un dominio o estructura de conocimiento. La estructura incluye herramientas que son extensibles (de tal manera que herramientas y objetos se puedan combinar para formar nuevas herramientas, pero que sean transparentes para que su forma de operar sea visible, y que sean ricas en diversas representaciones). Edwards (1998) contrasta esta visión "estructural" de un micromundo con una visión "funcional" que, a medida que los estudiantes exploran, construyen y aprenden de la retroalimentación, prioriza sus características al hacerse éstas evidentes en su uso.

Esta visión funcional enfatiza la importancia de la forma en que el conocimiento realmente crece en interacción con los estudiantes. Como señala diSessa (2006), la instrucción tradicional no logra incluir cómo se construye el conocimiento, pieza por pieza, y capa por capa. Hay aquí una dualidad: un micromundo exitoso es a la vez un universo epistemológico y uno emocional, un lugar donde se pueden explorar ideas poderosas (matemáticas, científicas o artísticas); pero exploradas "en seguridad", constituyendo una incubadora tanto en el sentido de fomentar el desarrollo conceptual, como siendo un lugar seguro para cometer errores y mostrar ignorancia. Y, centralmente en estos días, es un lugar donde las ideas se pueden compartir, reinventar y mejorar. (Para una discusión anterior sobre estos aspectos gemelos de involucrarse a través de construir y compartir, véase la idea de *webbing* discutida por Noss & Hoyles, 2006). El componente emocional es más que incidental a la idea de micromundo: construir y compartir implica que los estudiantes *aprecien* lo que están construyendo y también aborden el aprendizaje como algo *colaborativo*. En cuanto al primer punto, el famoso ejemplo de Papert en el prefacio de su libro *Desafío a la Mente* (Papert, 1980/1981), cuenta una historia que no trata sólo de lo mucho que aprendió sobre matemáticas jugando con engranajes, sino de cómo "se enamoró" de los engranajes, un conocimiento íntimo y consumidor que utilizó como modelo para el aprendizaje futuro de las matemáticas. Hay, por supuesto, contextos distintos a las matemáticas y la ciencia que han sido sujetos de un análisis construccionista: véase la discusión relacionada al dibujo y la pintura, en Clayson (2008) y Gargarian (1993).

Pero además de ser un desafío intelectual para una participación auténtica, hay problemas que son fundamentales para los objetivos generales de aprendizaje. En relación a las matemáticas, Confrey y sus colegas lo expresaron así:

> La importancia de aprovechar la cultura juvenil no debe subestimarse para motivar y sostener el progreso educativo de los estudiantes. Esto es especialmente cierto para materias como la ciencia y las matemáticas, que cargan con un capital social considerable, pero que es fácil para los estudiantes descartar como irrelevantes, aburridas y difíciles en un mundo de imágenes digitales, animaciones, recuperación fácil de información y comunicación. Necesitamos entornos interesantes, en los que los estudiantes realmente necesiten matemáticas para alcanzar metas que les parezcan atractivas, y que sean matemáticas visibles para los estudiantes y expresadas en un idioma con el que puedan conectarse. (Confrey *et al.*, 2010, p. 20; traducción del inglés)

La participación auténtica de los estudiantes sigue siendo un gran desafío para la educación matemática actual. No es sencillo diseñar actividades que alienten a los estudiantes a abordar los conceptos matemáticos deseados, de maneras que hagan evidente para el estudiante que éstos tienen utilidad. Es decir, aunque el involucrarse en micromundos tiene como *intención* orientar a los alumnos hacia maneras matemáticas de pensar a través de estructuras establecidas por el diseñador, los alumnos deben mantener cierta autonomía. Deben asumir la responsabilidad de sus acciones y de los resultados que producen. Esto significa, por supuesto, que el aprendizaje nunca ocurrirá exactamente como se planeó, lo que implica un reto inevitable: cómo equilibrar la actividad auto-motivada mientras que se maximiza la oportunidad de toparse con las ideas poderosas planeadas (véase la "paradoja del juego" en Noss y Hoyles, 1996).

El terreno del aprendizaje matemático está repleto de reestructuraciones del conocimiento matemático, un ejemplo es el conjunto de "breves" en cada número de la revista *International Journal of Computers in Mathematical Learning* o en la biblioteca de modelos que acompaña a NetLogo. Es cierto que no hay un "nuevo currículum"; de hecho, la sola idea de que debería haber una "versión" de las matemáticas diseñada para poder ser aprendida podría ser consternante para muchos matemáticos. Pero buenos ejemplos sí existen. Uno de ellos es el estudio de Sacristán & Noss, 2008, que muestra cómo la formalización de la idea del infinito en forma de fragmentos de programas puede ser una forma efectiva de apreciar estas ideas profundas y a menudo inaccesibles.

Consideraremos con mayor profundidad a continuación, un intento coordinado de construir y evaluar una intervención basada en la programación computacional, el programa ScratchMaths (SM), que comprende un conjunto de micromundos diseñados para la exploración de temas matemáticos clave para niños de 9 a 11 años.

4. EL PROYECTO SCRATCHMATHS: UNA SECUENCIA DE MICROMUNDOS MATEMÁTICOS

Primero planteamos el contexto del proyecto ScratchMaths, lo cual es importante para enmarcar su aplicabilidad y rango. Desde septiembre de 2014, todas las escuelas para estudiantes de 5 a 16 años de edad en Inglaterra deben impartir el currículo nacional obligatorio de computación, lo cual incluye diseñar y crear programas. Hay desafíos para implementar, con orientación limitada, cómo enseñar el contenido propuesto, los niveles específicos de conocimiento o de comprensión que los alumnos deben alcanzar en cada etapa del currículo y problemas conceptuales con los que posiblemente los alumnos se topen y cómo deben abordarse. Otros desafíos tratan de cómo encajar el nuevo contenido curricular en un calendario ya bastante lleno y, lo más crucial desde nuestra perspectiva, cómo forjar vínculos interdisciplinarios de la computación con otras áreas curriculares.

El proyecto ScratchMaths (SM) buscaba abordar algunos de estos retos a través de una intervención longitudinal de dos años en varias escuelas de Inglaterra, para promover el pensamiento computacional alineado con el pensamiento y el razonamiento matemáticos. Así, SM fue diseñado como un currículo que aborda aspectos clave de los currículos de computación y de matemáticas de primaria para ese grupo de edad. La intervención consta de seis micromundos, llamados “módulos”, tres al año, y fue diseñada por investigadores que trabajaban de cerca con cuatro escuelas “diseño” para probar y refinar los recursos para los alumnos y maestros. (Véanse los recursos para alumnos y maestros libremente disponibles en https://www.ucl.ac.uk/ioe/research/projects/scratchmaths).

Anticipamos que el papel del maestro fuera crítico para una implementación exitosa de la innovación y, por ello, en sesiones que designamos como obligatorias de desarrollo profesional, se dedicó un tiempo considerable para compartir el enfoque pedagógico general de SM, a través de lo que llamamos las “5Es”: Explorar, Explicar, intercambiar (*Exchange*), concebir (*Envisage*) y relacionar (*bridgE*). El objetivo era que esas E's estructuraran conjuntamente el enfoque global de la clase con las diferentes actividades del currículo SM (ver Benton *et al.*, 2017).

En el primer año del currículo para estudiantes de 9-10 años, los conceptos computacionales se presentaron en un primer plano a las ideas matemáticas que estaban implícitas en micromundos titulados *Tiling Patterns* (patrones de mosaicos), *Beetle Geometry* (geometría del Escarabajo) y *Collaborating Sprites* (*Sprites* en colaboración). En el Segundo año, se introdujo a los mismos estudiantes (ahora de 10-11 años) a conceptos matemáticos y razonamiento matemático de manera explícita a través de un enfoque de programación que incluía un conjunto de nuevos conceptos computacionales[9] en los micromundos titulados: *Building with Numbers* (construir *con números), Exploring Mathematical Relationships* (exploración de relaciones matemáticas), y *Coordinates and Geometry* (coordenadas y geometría).

Dado el reto de implementar un nuevo currículo, se proporcionó a los maestros SM una orientación detallada para la navegación de los materiales, los cuales fueron cuidadosamente estructurados y eran progresivos. Sin embargo, el equipo SM reconoció una emergente tensión en su búsqueda por otorgar un apoyo amplio y la necesidad de apropiación y autonomía de los maestros, por lo cual se dio espacio a los docentes para personalizar los materiales de acuerdo a sus propias metas y las necesidades de sus estudiantes. Esta es una variación de la paradoja del juego a la cual nos referimos arriba; ahora frecuentemente se habla de ésta como la tensión, o brecha, entre la *fidelidad* y la *adaptación*. El desafío es, cuando menos, reducir esta brecha y, de manera crucial, evitar el surgimiento de "mutaciones letales" (Brown & Campione, 1996), donde los objetivos de la intervención se pierdan en su implementación.

El proyecto SM fue evaluado por un equipo de investigadores independientes, quienes se centraron en datos cuantitativos recolectados a través de cuestionarios y resultados de pruebas, una de las cuales fue la prueba de pensamiento computacional (CT, por sus siglas en inglés) aplicada al final del primer año de prueba, y una segunda fue la prueba nacional de matemáticas *Key Stage 2* para estudiantes de 11 años.

El más significativo de los primeros resultados fue que los niños en las escuelas ScratchMaths lograron mayor progreso en los puntajes de CT, en comparación con los niños en las escuelas de control. En segundo lugar, el puntaje

[9] Por ejemplo, eventos, animaciones, estructuras de control, variables, operadores y expresiones.

de CT fue mayor para los estudiantes con desventajas educativas, medido por un estándar que se utiliza en Inglaterra para ello, a través de determinar la elegibilidad para comidas escolares gratuitas de acuerdo al ingreso familiar. En resumen, los estudiantes desfavorecidos se beneficiaron más de SM, mostrando un rendimiento mayor en CT que el grupo de control. Y tercero, no hubo diferencias en los puntajes entre niños y niñas, un hallazgo que no es insignificante cuando se considera el contexto de la preocupación generalizada de que las niñas de todas las edades prefieren no participar en la programación.

Los evaluadores encontraron, sin embargo, que SM no tuvo un impacto en el rendimiento matemático, usando las pruebas *Key Stage 2* para niños de 11 años al final del sexto grado. Este es un resultado decepcionante, aunque la medición de éxito a través de estas pruebas siempre sería problemática. Una evaluación del impacto en el aprendizaje de las matemáticas a través, por ejemplo, de pruebas que se relacionaran con las matemáticas abordadas en los seis módulos podría haber producido resultados distintos. Reconocemos que esta discusión es necesariamente especulativa, y tal vez se le considere como una "excusa" por no haber habido un impacto significativo. No obstante, a partir de nuestras encuestas a docentes, parece muy claro que la implementación de SM se vio obstaculizada, especialmente en su segundo año, por dos factores fuera del control de la innovación y algo independientes de la misma: las importantes pruebas nacionales en *matemáticas*, y la *enseñanza de SM por parte de maestros con poco o ningún desarrollo profesional*. En relación con el primer punto, los datos de la encuesta mostraron que la fidelidad de la implementación en el segundo año se redujo drásticamente, como lo demuestra cuánto se abarcó y dedicó tiempo al currículo, y la participación limitada en desarrollo profesional. Las observaciones hechas en visitas a las escuelas dejaron claro que el tiempo dedicado a SM se vio afectado negativamente por la atención prestada a las pruebas nacionales en matemáticas del final del año escolar, con más y más tiempo dedicado a la revisión y la práctica. De hecho, el equipo de SM descubrió, a partir de los datos de la encuesta, que al menos 25 escuelas habían dejado de enseñar SM tan temprano como a principios de enero del segundo año para dar espacio a la revisión de las matemáticas, en lugar de continuar hasta que se realizaran las pruebas *Key Stage 2* en mayo. Además, debido a que el desarrollo profesional se midió a nivel escolar, es posible que en una escuela de alta fidelidad donde se cambió a un maestro que no había enseñado SM en el quinto grado, represente un caso en el que un inconveniente se convirtió en una mutación letal. En el peor de los casos, es posible que algunos maestros que trabajaron el currículo SM de sexto grado, ¡no hayan participado en ninguna capacitación de SM, ni hayan recibido ningún tipo de apoyo profesional en la escuela!

5. OBSERVACIONES FINALES

El proyecto SM fue ambicioso en sus objetivos, y quizás demasiado ambicioso en el rango de temas que se re-trabajaron en la estructura del micromundo. Pero, por mucho, el hallazgo más significativo fue la extrema susceptibilidad de la intervención a las condiciones iniciales de la experiencia, las competencias y la continuidad del docente. Creemos que este resultado se generaliza en entornos de aprendizaje basados en la idea del micromundo.

El problema es que a medida que aumentan las oportunidades de aprendizaje colaborativo, la interacción fluida y flexible, y el acceso a la información, no hay garantía de que éstos mejoren el aprendizaje: de hecho, la perspectiva de que los niños trabajen completamente solos sin maestros puede resultar económicamente atractiva aunque desde un punto de vista educativo, no lo es. A pesar de lo mucho que preferiríamos fuera de otro modo, el estudio de SM señala el hecho innegable de que la pedagogía y el currículo son elementos indispensables y esenciales de los micromundos –el fracaso en este sentido, sea por el motivo que fuera, invita a que cualquier intervención se transforme en una mutación letal.

Esto sólo se ve agravado por el impulso de cambio tecnológico. A medida que aumentan las oportunidades de aprendizaje colaborativo, de interacción fluida y flexible, y de acceso a la información, no hay garantía de que éstos mejoren el aprendizaje. El enfoque aquí está en la creación de artefactos culturalmente interesantes y resonantes, que simultáneamente brinden a los alumnos la oportunidad de toparse con ideas computacionales poderosas.

Hemos emergido de una era de teoría y práctica educativa en la que el papel del maestro en el diseño de micromundos era tema de debate: ahora es más esencial que nunca. Los mecanismos que sustentan todo tipo de artefactos son cada vez menos visibles (no hay piezas reparables por el usuario), y es inconcebible que los estudiantes o sus maestros hagan justicia al potencial de la tecnología para el aprendizaje matemático sin un cambio en la cultura educativa más amplia, que reconozca la centralidad del docente y de sus contextos en la búsqueda de cambio.

REFERENCIAS

Abelson, H. & diSessa, A. (1981/1986). *Turtle Geometry: The computer as a medium for exploring mathematics. [Geometría de la tortuga. El ordenador como medio de expresión de las matemáticas].* Cambridge, MA, EUA: MIT Press.

Bamberger, J. & Hernandez, A. (1999). *Impromptu: An interactive software application.* [Impromptu: Un software interactivo]. Nueva York, NY, EUA: Oxford University Press.

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I. & Noss, R. (2017). Bridging primary programming and mathematics: Some findings of design research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(2), 1–24. doi 10.1007/s40751-017-0028-x

Brown, A. L. & Campione, J. C. (1996). *Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems*. Mawah, NJ, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clayson, J. E. (2008). Radical bricolage: building coherence in the liberal arts using art, modeling and language. *International Journal of Education through Art, 4*(2), 141–161. doi 10.1386/eta.4.2.141_1

Confrey, J., Hoyles, C., Jones, D., Kahn, K., Maloney, A.P., Nguyen, K.H., Noss, R., Pratt, D. (2009) Designing software for mathematical engagement through modeling. En C. Hoyles & J.B. Lagrange (eds) *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain. New ICMI Study Series*, Vol. 13 (pp. 19-45). Boston, MA, EUA: Springer. doi 10.1007/978-1-4419-0146-0_3

diSessa, A. (2006). A history of conceptual change research: Threads and fault lines. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 265–281). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(1), 53–78.

Eisenberg, M. (2003). Mindstuff: educational technology beyond the computer *Convergence, 9*(2), 29–53. doi 10.1177/135485650300900205

Gargarian, G. (1993). *The Art of Design: Expressive Intelligence in Music.* Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Dept. of Architecture and Planning. Retrieved from http://hdl.handle.net/1721.1/12559

Harel, I. & Papert, S. (Eds.). (1991). *Constructionism: Research Reports and Essays 1985-1990 by the Epistomology and Learning Research Group, MIT.* [Construccionismo: reportes de investigación y ensayos del grupo de investigación de epistemología y aprendizaje del MIT. Norwood, New Jersey, EUA: Ablex Publishing Corporation.

Harvey, B. (1997). *Computer science Logo style volume 1: Symbolic computing*. [Programación computacional estilo Logo volúmen 1: computación simbólica]. Cambridge, MA, EUA: MIT Press.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology (NATO ASI Series F, vol. 121)* (pp. 1-17). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Hoyles, C., Noss, R. & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 309–326. doi 10.1007/s10758-004-3469-4

Monaghan, J., Trouche, L. & Borwein, J. (2016). *Tools and mathematics: Instruments for learning*. [Herramientas y matemáticas: Instruments para el aprendizaje]. Nueva York, EUA: Springer. doi 10.1007/978-3-319-02396-0

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. [Ventanas a significados matemáticos: Aprendizaje de culturas y computadoras]. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Noss, R. & Hoyles, C. (2006). Exploring mathematics through construction and collaboration. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 389–405). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Papert, S. (1980/1981). *Mindstorms: Children, computers, and powerful Ideas. [Desafío a la mente: computadoras y educación].* Nueva York: Basic Books.

Papert, S. (1991/2002). Situating constructionism. [Situar el construccionismo (Trad. INCAE)]. En I. Harel & S. Papert (Eds.), *Constructionism: Research reports and essays 1985-1990 by the epistemology and learning research group, MIT.* Norwood, N.J.: Ablex Pub. Corp.

Papert, S. (1993/1995). *The Children's Machine: Rethinking School In The Age Of The Computer [La máquina de los niños. Replantearse la educación en la era de los ordenadores].* Nueva York: Basic Books.

Papert, S. (2006). After how comes what. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences.* (pp. 581–586.). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Resnick, M. (1995). New paradigms for computing, new paradigms for thinking. En A. diSessa, C. Hoyles & R. Noss (Eds.), *Computers and exploratory learning. NATO ASI Series F, Volume 146* (pp. 31–43). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Sacristán, A. I. & Noss, R. (2008). Computational construction as a means to coordinate representations of infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(1), 47–70. doi 10.1007/s10758-008-9127-5

Sinclair, N. & Crespo, S. (2006). Learning mathematics in dynamic computer environments. *Teaching Children Mathematics, 12*(9), 436–444.

von Glasersfeld, E. (1989). Constructivism in education. En T. Husen & P. T. N. (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (Vol. 1, pp. 161–162). Oxford/Nueva York: Pergamon Press.

Wilensky, U. & Papert, S. (2010). *Restructurations: Reformulations of knowledge disciplines through new representational forms.* En J. Clayson & I. Kalas (Eds.), *Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: Lessons for the 21st century. Proceedings for Constructionism 2010 / The 12th EuroLogo conference* (pp. 1-15). Paris, France: AUP. Retrieved from http://ccl.northwestern.edu/2010/wilensky_restructurations_Constructionism%202010-latest.pdf

Richard Noss

Domicilio: UCL Knowledge Lab
UCL Institute of Education, University College London
23- 29 Emerald Street
London WC1N 3QS, UK

 DOI: 10.24844/EM3102.02

Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria

Meanings, representations and language: fractions in three generations of textbooks for primary

Alicia Avila[1]

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de una investigación documental cuyo objetivo fue poner de relieve los aspectos valiosos y las debilidades de tres propuestas curriculares para la enseñanza de las fracciones. El análisis se hace mediante identificación de los sub-constructos del número racional considerados en cada oportunidad, así como el tránsito entre el conocimiento informal (etnomatemático) y el técnico-simbólico identificados en los tres currículos y libros de texto oficiales utilizados entre 1960 y 2011 en la educación primaria mexicana. El acercamiento se sustenta, esencialmente, en la conceptualización de Thomas Kieren respecto de: a) los sub-constructos que constituyen un conocimiento cabal de las fracciones, y b) el trayecto deseable entre el conocimiento informal y el técnico-simbólico también sugerido por este investigador. Se considera que el trabajo aporta una metodología útil para analizar las propuestas curriculares y la enseñanza de estos números; también se pone de relieve que –al elaborar nuevos planteamientos educativos– es pertinente recuperar las lecciones del pasado si el interés no es la innovación sino la mejora de la enseñanza.

Fecha de recepción: 27 de marzo de 2018. **Fecha de aceptación:** 30 de junio de 2019.

[1] Universidad Pedagógica Nacional. México. aliavi@prodigy.net.mx, orcid.org/0000-0003-0872-57xx

Palabras clave: *propuestas curriculares, enseñanza de las fracciones, historia de la enseñanza de las matemáticas, educación primaria.*

Abstract: This article presents the results of a documentary research developed with the aim of highlighting valuable aspects and weaknesses of three curricular proposals for the teaching of fractions. The analysis is done by identifying the sub-constructs of the rational number considered in each opportunity, as well as the transition between informal (ethnomathematical) and technical-symbolic knowledge observed in the three official curricula and textbooks of the Mexican Primary Education used between 1960 and 2011. The approach is based, essentially, on the conceptualization of Thomas Kieren regarding: a) the sub-constructs that constitute a thorough knowledge of the fractions, and b) the desirable path between the informal knowledge and the technical-symbolic also suggested by this researcher. It is considered that the work provides a useful methodology to analyze the curricular proposals and the teaching of these numbers, it also highlights that it is pertinent to recover the lessons of the past if the interest is not innovation but the improvement of teaching.

Keywords: *curricular proposals, teaching of fractions, history of mathematics teaching, primary education*

INTRODUCCIÓN

¿Todavía es lícito interesarse en las fracciones?, se pregunta Athanasios Gagatsis al prologar el libro de Isabel Fandiño sobre estos números (Fandiño, 2009). Esta provocadora frase es seguida de una disquisición que concluye con la afirmación de que el libro de Fandiño es muestra de lo mucho que el estudio de las fracciones tiene aún por ofrecer a la comunidad de la educación matemática. Yo comparto la convicción de Gagatsis y es por ello que decidí escribir este artículo.

Las fracciones han sido uno de los contenidos de la educación primaria más estudiados por los investigadores de la educación matemática de este nivel. Ya en los años ochenta del siglo pasado se produjeron abundantes investigaciones y reflexiones sobre el tema, algunas de las cuales se convirtieron en trabajos clásicos (por ejemplo, Hart, 1981; Freudenthal, 1983; Kieren, 1988; Kerslake, 1986).

Adicionalmente, el tema es reconocido por los profesores de este nivel educativo como uno de los más difíciles de enseñar. Es común que, ante cualquier diálogo con ellos el tema que surge de inmediato es precisamente el de las fracciones.[2]

Los resultados de los exámenes aplicados a los niños que finalizan la educación primaria por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México (Bases de datos Excale 2005, 2007, 2009, 2013, Planea, 2015) son coincidentes con la mirada docente; al finalizar este nivel educativo, los niños tienen dificultades de todo tipo para aprender lo relacionado con este ámbito numérico. Veamos algunos datos.

Según el Examen Nacional de Logro Académico (Excale) 2013: *Identificar una representación numérica de un número fraccionario dado en forma gráfica*, obtiene únicamente 50% de aciertos y *Resolver un problema aditivo con números fraccionarios de distinto denominador* sólo alcanza 22% (Excale 2013). Las dificultades se observan igualmente en los resultados del examen PLANEA 2015,[3] conforme al cual 60.5% de los niños de sexto grado se ubican en el nivel más bajo (insuficiente) de aprovechamiento en matemáticas, lo que significa que sólo escriben, y comparan números naturales (INEE, 2015). Es únicamente 6.8% de los estudiantes el que "compara números decimales; resuelve problemas aditivos con números decimales y fraccionarios; resuelve problemas que implican dividir o multiplicar fracciones por números naturales; ubica una fracción en la recta numérica y usa las fracciones para expresar el resultado de un reparto" (INEE, 2015).

Si bien algunos investigadores han elaborado y experimentado propuestas de enseñanza tendientes a promover un acercamiento comprehensivo de las fracciones –y algunas de ellas han sido incorporadas al currículo oficial – la situación se mantiene en un nivel de logro escolar muy bajo y aparentemente sin perspectivas de mejora. Eso es lo que parecen mostrar los Excale y más recientemente el examen llamado PLANEA (2015).

¿Por qué estos resultados tan poco satisfactorios en el aprendizaje de las fracciones?, ¿Hasta dónde los planteamientos curriculares contribuirán a generarlos?, ¿Será la enseñanza que tiene lugar en las aulas la que actúa en desmedro del aprendizaje? Hoy sabemos que son muchos los factores que inciden en el aprendizaje, pero en este escrito destaco la relevancia del currículo –es decir, la forma en que el tema se propone en programas y libros de texto– como

---

[2] Esto lo he constatado en el trabajo con profesores en servicio a lo largo de muchos años.

[3] PLANEA: Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes

factor que favorece o dificulta un aprendizaje adecuado de los números que nos ocupan. En tal sentido, considero que el currículo y los materiales que lo acompañan tienen incidencia en el hacer de los profesores desde el momento que facilitan o dificultan la realización de ciertas actividades al ofrecer, o no, sugerencias para la enseñanza y el soporte material para llevarlas a cabo.

Me centraré en tres propuestas educativas –y sus correspondientes libros de texto– que tuvieron gran relevancia en México, tanto por el tiempo que estuvieron vigentes, como por las ideas que introdujeron o legitimaron: el currículo de 1960, basado en una *didáctica intuitiva*, el de 1972, conocido como de *las matemáticas modernas* y el de 1993, con orientación *constructivista*.[4] En el análisis pongo de relieve los siguientes elementos: a) el contexto pedagógico en que tuvieron lugar, b) los sub-constructos de las fracciones que fueron incluidos y c) los acercamientos propuestos para vincular el conocimiento informal que dota de significado a las fracciones con el conocimiento técnico simbólico que "formaliza" el conocimiento y que se comunica en la escuela.

Para realizar el análisis me valdré del marco desarrollado por Thomas Kieren (1988), el cual ampliaré con elementos aportados en trabajos más recientes. Aunque conviene destacar que la actualidad de la propuesta de Kieren se constata porque dichos trabajos siguen teniendo como referencia las ideas de este autor. Conviene mencionar que la amplitud del tema no permitió analizar con detalle todos los aspectos de los acercamientos planteados, lo que se presenta es sólo una visión general que posteriormente podrá profundizarse en escritos más focalizados.

MARCO CONCEPTUAL

Los sub-constructos del concepto fracción

La idea principal tomada de Kieren (1988) es su planteamiento sobre los sub-constructos que, en conjunto, constituyen el "gran concepto" que es el número racional. Este investigador expuso, hace ya 30 años, la idea de que un conocimiento completamente desarrollado del número racional tendría la estructura componencial que se muestra en la figura 1:

[4] No incluyo el currículo introducido en 2011 porque, con algunas modificaciones no siempre tendientes a la mejora del previamente vigente, las ideas son muy similares a las promovidas en 1993.

Figura 1. Sub-constructos del número racional según Kieren

Medida	Cociente	Razón	Operador multiplicativo

Kieren (1988) afirma que la construcción de un conocimiento duradero sobre los números racionales, hace necesario que una persona participe en actividades mentales o físicas tales que pueda asociar las expresiones "a/b" con objetos/acciones en cualquiera de esos cuatro sistemas connotativos (p. 166): medida, cociente, razón y operador multiplicativo. No se incluye en esta estructura la fracción como una relación entre la parte y el todo. Esta relación es considerada por Kieren como "base para instaurar los diferentes sub-constructos" (Real, Gómez y Figueras 2013, p. 22).

Kieren declara que: si bien sus ideas son teóricas en el sentido de que no habían sido experimentadas, para sostenerlas se apoyó en otros autores, como D. Kerslake (1986), quien señaló enfáticamente las limitaciones en el pensamiento de los niños sobre las fracciones debidas a la adopción casi exclusiva del modelo parte-todo en las escuelas. Kerslake, después de un cuidadoso estudio planteó:

> [...] mientras las interpretaciones de la fracción a/b como una región geométrica dividida en "b" partes de las cuales se toman "a" partes, era aceptado por todos los niños participantes en el experimento de enseñanza, otras interpretaciones posibles no estaban disponibles en los niños (1986, p. 88).

Quizás el dato más "duro" sobre este punto es que cuando se pedía a los niños considerar varios modelos para la fracción $^3/_4$ o $^3/_5$, incluyendo la relación parte-grupo y el modelo de razón, éstos no sólo fueron rechazados como posibles ejemplos de las fracciones por la mayoría de los niños, sino que la razón del rechazo era, invariablemente, que "no había una figura completa para dividir" (Kerslake, 1986, p. 88).

Kieren (1988), en acuerdo con las ideas de Kerslake dice: "[...] el modelo parte-todo puede ayudar a producir fácilmente el lenguaje fraccionario, sin embargo, el lenguaje escolar sobre las fracciones en los libros de texto y en los maestros [que adoptan este modelo] tiende a orientar a los alumnos a una imagen y conocimiento estático de las fracciones" (p. 177)

Ahora bien, ¿por qué utilizar el modelo de Kieren como marco para el análisis? Son varias las razones para hacerlo: porque –además de ser el marco que orienta en cuanto a las fracciones la última reforma curricular que analizo en este artículo (SEP, 1993) y estar vigente entre investigadores y educadores de distintas regiones (por ejemplo, Llinares, 2003, Fandiño, 2009, Charalambous y Pitta-Pantazzi, 2005, Charalambous, 2007, Real, Gómez y Figueras, 2013, Ivars, Boufort y Llinares, 2016, Zazkis y Mamolo, 2018)– su adopción permitió comparar los tres períodos curriculares objeto de análisis. Pero la principal razón para utilizarlo, es que el modelo de los sub-constructos, gracias a su completitud, marca un horizonte desde el cual mirar comprehensivamente el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones. De esto es muestra la utilización y citación frecuentes de este modelo aun en las investigaciones más actuales[5].

El tránsito del conocimiento etnomatemático al técnico-simbólico

La idea de los sub-constructos como elementos constituyentes del "mega-constructo" número racional es sin duda la aportación de Kieren más reconocida. Pero otro aporte de este autor, también fundamental por su contribución a nuestro entendimiento de las fracciones como objeto de enseñanza, es el que refiere a la relación entre el conocimiento informal, que él llama etnomatemático, y el conocimiento técnico-simbólico (Kieren, 1988), postulada como necesaria para una comprensión cabal de los números racionales. La razón que justifica la postura es que: "[...] los constructos menos formales proveen una base de significado para el conocimiento más formal y una base crítica para validar 'verdades' simbólicas o principios normativos" (p. 166).

¿Cómo se transita entre uno y otro nivel? El postulado (Kieren,1988) es que, en la construcción del número racional, las imágenes –en el sentido físico, pictórico, o mental– tienen un papel muy relevante. La idea de mitad, por ejemplo, está asociada a imágenes de cortar, de simetría e incluso de calcular numéricamente la mitad. Recurriendo a D'Ambrossio, Kieren hace notar que este conocimiento no es escolar, sino que se construye porque se vive en un contexto particular, por lo que es un conocimiento etnomatemático (CE).

[5] Hay quienes, siguiendo a Davydov y Tsvetkovich (1991), se han apartado de este modelo para enfatizar la idea de medida, como Saldaña y Thompson, o Cortina y sus colegas, pero aún no se conoce el impacto que esta propuesta ha tenido o puede tener en el aprendizaje de las fracciones.

Un segundo nivel de conocimiento es el intuitivo (CI) que comúnmente es enseñado e involucra deliberadamente la conjunción de imágenes, mecanismos constructivos (en el sentido de Kieren) y un uso informal del lenguaje (Kieren, 1988). Se trata de un conocimiento que no es técnico o lógicamente formalizado pero que constituye un eslabón entre el etnomatemático y el técnico-simbólico.

El conocimiento técnico simbólico (CTS) se construye mediante el uso de lenguaje [matemático] estándar, notaciones y algoritmos; es un conocimiento enseñado. Para que este conocimiento sea estable y útil, debe ser comprobable contra alguna forma de "realidad" o representar alguna secuencia lógica local que pueda ser evaluada en términos de axiomas para los números racionales (Kieren, 1988, p. 170).

Desde esta perspectiva, entonces, la construcción del conocimiento sobre las fracciones ha de considerar el conocimiento etnomatemático como primer referente y transitar por el conocimiento intuitivo, para llegar al más "formal" propio del nivel técnico-simbólico.

Siguiendo el pensamiento de Kieren, considero que el tránsito de un tipo de conocimiento a otro se acompaña de diferentes tipos de lenguaje. De hecho, como señalaría el autor, la experiencia previa y el lenguaje son fundamentales en la construcción y representación mental de los conocimientos matemáticos, incluidos los relacionados con las fracciones (Kieren, 1999).

METODOLOGÍA

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El interés por revisar las propuestas de enseñanza de las fracciones, motivo de este escrito, se expresa en las preguntas que anoto a continuación.

En los currículos y libros de texto gratuitos[6] utilizados en la educación primaria mexicana, entre 1960 y 2011:

- ¿Qué significados o sub-constructos de las fracciones se incorporaron?
- ¿Qué relaciones entre el conocimiento etnomatemático (informal) y el técnico-simbólico se establecieron?

[6] Desde 1960, la Secretaría de Educación Pública distribuye gratuitamente libros de texto a todos los niños que cursan la educación primaria. Las guías didácticas se entregan a los maestros de este nivel educativo.

- ¿Qué lenguaje se utiliza en los distintos materiales y qué papel juega dicho lenguaje?
- ¿En qué contexto pedagógico se desarrollaron e implementaron dichas propuestas?
- ¿Qué puede ofrecernos la revisión de estas propuestas para mejorar la enseñanza?

Estrategia de indagación

Como mencioné, se analizan los programas y libros de texto distribuidos por la Secretaría de Educación Pública que fueron utilizados en la educación primaria mexicana el último medio siglo, a saber: a) la propuesta curricular de 1960, que definiré como *didáctico-intuitiva*; b) la propuesta introducida en 1972, o *de la matemática moderna*; c) la propuesta instrumentada en 1993 y que llamaré *constructivista*.

La revisión de los materiales se realizó mediante acercamientos sucesivos consistentes en:

1. Búsqueda y recopilación de planes de estudio, programas, guías para docentes y libros de texto gratuitos de matemáticas distribuidos por la Secretaría de Educación Pública en el período ya señalado.
2. Identificación de contenidos, aprendizajes esperados y secuencias de enseñanza vinculados a las fracciones, propuestos en los distintos materiales.
3. Análisis de los planteamientos curriculares y las lecciones dedicadas a las fracciones con base en el marco conceptual elegido.

RESULTADOS

Etapa didáctico-intuitiva de la enseñanza de las fracciones

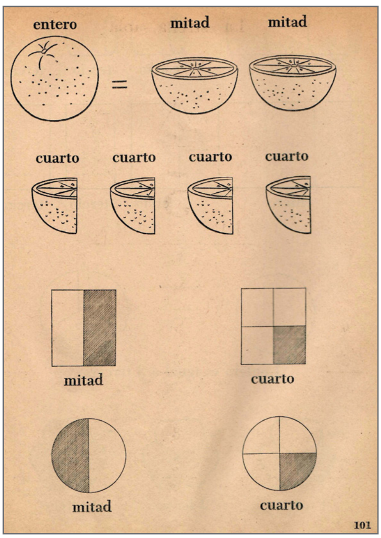
Centración en el modelo parte-todo y prevalencia del nivel técnico-simbólico

En ese período, las fracciones se denominan "quebrados", aunque el término fracción se utiliza eventualmente en los últimos grados. Tal denominación refleja la concepción de fracción propia de este currículo pues, efectivamente, ésta es vista como parte de algo que se ha fracturado. Razones y proporciones y porcentajes se estudian en los dos últimos grados de la primaria, pero su tratamiento se hace estableciendo una débil relación explícita con la fracción y el modelo "parte todo" (SEP, 1961 y 1962).

A lo largo de la primaria, es permanente y casi exclusiva la referencia a dicho modelo. Los "quebrados" se introducen en vinculación con el conocimiento etnomatemático mediante imágenes que ilustran partición de frutas con forma más o menos regular: naranjas, melones o manzanas. Esta idea permanece a lo largo de la primaria, pero las frutas son sustituidas paulatinamente por figuras geométricas y, al final, sólo quedan los símbolos y el lenguaje técnico-simbólico pues, según las recomendaciones de la época "la enseñanza de la aritmética debe ir de lo concreto a lo abstracto" (SEP, 1968).

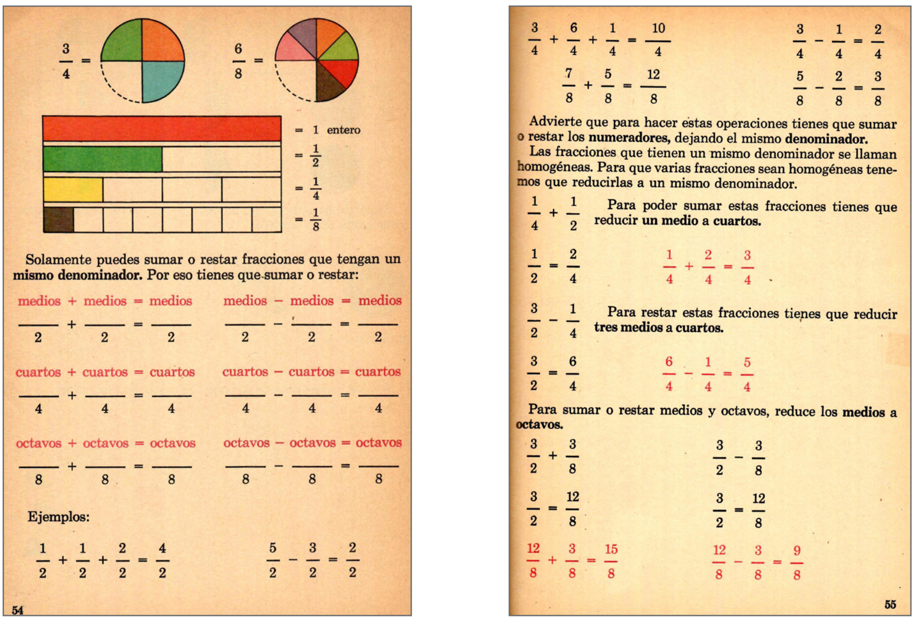
Hay efectivamente un intento por vincular el conocimiento técnico-simbólico (CTS) con el que los niños han construido en su experiencia cotidiana (CE), transitando por el nivel intuitivo (CI) –que implica la vinculación con imágenes familiares y un uso informal del lenguaje. Esto se ve, por ejemplo, en la lección que abre la enseñanza del tema en primer grado (figura 2). Ahí se muestran frutas partidas en mitades y cuartas partes que luego "se convierten" en figuras geométricas divididas en partes iguales acompañadas de lenguaje natural.

Figura 2. Lección con que se iniciaba el trabajo con las fracciones en la escuela primaria en los años 1960 (SEP, 1960a, p. 101).



En concordancia con la idea principal de la propuesta, las representaciones utilizadas en los cuatro primeros grados aluden al modelo parte-todo. Se reitera el uso de las dos representaciones ya mencionadas: dibujos de frutas partidas y formas geométricas –principalmente círculos, cuadrados y rectángulos– cuyo parecido figural con la fruta seguramente tenía un valor didáctico importante en el tránsito de lo concreto a lo abstracto. Ya desde el tercer grado predominará el nivel TS. A partir de este grado, una exposición de imágenes consideradas cotidianas (como frutas o listones) incluidas como apertura de las primeras lecciones parece considerarse suficiente para vincular los niveles E y TS y privilegiar este último en el resto del libro. Lo anterior puede observarse en la figura 3. En la lección ahí presentada, después de una narrativa que contextualiza el tema (no incluida en la figura), siguen páginas donde se eliminan gradualmente las imágenes para transitar al nivel TS y mantenerse en él. Efectivamente, la vinculación CE-CI-CTS pronto se deja a un lado y se trabaja con afirmaciones "formales", notaciones y algoritmos:

Figura 3. Páginas de una lección de tercer año (SEP, 1960c, pp. 54-55) en las que se observa el tránsito al nivel técnico simbólico. Las siguientes páginas tratan, de manera similar, otras fracciones.



$\frac{3}{4} =$ $\frac{6}{8} =$

$= 1$ entero

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8}$

Solamente puedes sumar o restar fracciones que tengan un mismo denominador. Por eso tienes que sumar o restar:

medios + medios = medios $\frac{\quad}{2} + \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2}$ medios – medios = medios $\frac{\quad}{2} - \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2}$

cuartos + cuartos = cuartos $\frac{\quad}{4} + \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{4}$ cuartos – cuartos = cuartos $\frac{\quad}{4} - \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{4}$

octavos + octavos = octavos $\frac{\quad}{8} + \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{8}$ octavos – octavos = octavos $\frac{\quad}{8} - \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{8}$

Ejemplos:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$ $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2}$

54

$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8}$ $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Advierte que para hacer estas operaciones tienes que sumar o restar los numeradores, dejando el mismo denominador.

Las fracciones que tienen un mismo denominador se llaman homogéneas. Para que varias fracciones sean homogéneas tenemos que reducirlas a un mismo denominador.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ **Para poder sumar estas fracciones tienes que reducir un medio a cuartos.**

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$ **Para restar estas fracciones tienes que reducir tres medios a cuartos.**

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ $\frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Para sumar o restar medios y octavos, reduce los medios a octavos.

$\frac{3}{2} + \frac{3}{8}$ $\frac{3}{2} - \frac{3}{8}$

$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$ $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$

$\frac{12}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$ $\frac{12}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$

55

La secuencia concluye con la siguiente formalización:

A

"Solamente puedes sumar o restar fracciones que tengan un mismo denominador. Por eso tienes que sumar o restar "medios + medios" + medios", o "Cuartos + cuartos + cuartos", etcétera (SEP, 1960c, p. 54).

El lenguaje sobre las fracciones

A pesar de que, como se ha afirmado, este currículo privilegia el nivel TS, la definición de fracción merece poca atención, de tal suerte que el primer intento de formalización de la noción se ve en una lección de quinto grado:

B

Las fracciones comunes, llamadas también quebrados, se escriben así:
$^{1}/_{2}$, que se lee un medio y significa la mitad de algo.
$^{1}/_{3}$, que se lee un tercio, y significa la tercera parte de algo.
$^{4}/_{5}$, que se lee cuatro quintos, y significa las cuatro quintas partes de algo.
(SEP. 1961a, p. 53).

Tal formalización evoca la relación parte-todo y se complementa después con otra incluida en el libro de sexto grado (SEP,1970, p. 43), donde la referencia es a la idea de medida:

C

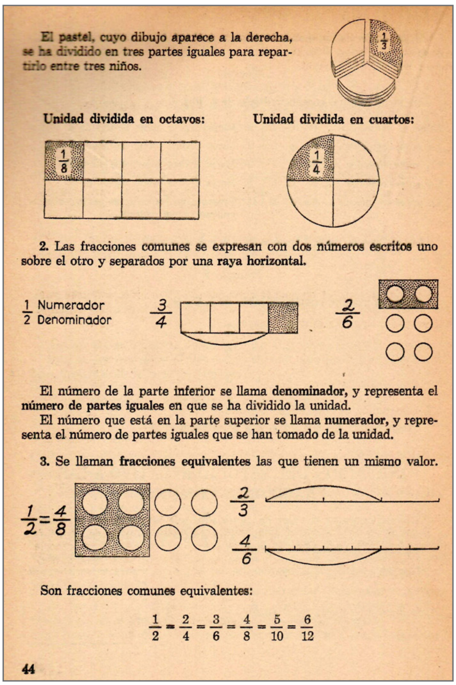
Para expresar el valor de cantidades que no contienen un número exacto de veces la unidad elegida, o de cantidades menores que la unidad, se han creado las **fracciones comunes**.

Aunque a esta formalización no le precede ninguna narración o imagen tendientes a darle significado, pues la fracción en contexto de medición no fue trabajada.

Llama la atención que, aunque, como he destacado, la orientación de este currículo privilegiaba el nivel TS, la definición de fracción no es central; en vez de trabajarla con más detenimiento, la atención se dedica a otras definiciones respecto de procedimientos o aspectos de estos números, por ejemplo: a) los nombres de los términos de la fracción; b) fracciones propias e impropias y c) procedimientos para ordenar fracciones y para operar con ellas.

Al final de la primaria el abandono del nivel intuitivo (NI) es más marcado y se realiza un trabajo casi exclusivo en el nivel TS. Así, en el libro de sexto año, de 22 páginas dedicadas a las fracciones, sólo 6 contienen imágenes, todas similares a las utilizadas en los grados precedentes (figura 4a). Con tal enfoque, los procedimientos más complejos ya no se ilustran, sólo se describen y ejemplifican (nivel TS) (figura 4b). El libro de sexto, por lo mismo, se asemeja más a un compendio del contenido de toda la primaria que a un libro de texto de aritmética y geometría elemental.

Figura 4a. Página del libro de sexto año. *Aritmética y Geometría* donde se incluyen imágenes. (SEP 1970, p. 44).


El pastel, cuyo dibujo aparece a la derecha, se ha dividido en tres partes iguales para repartirlo entre tres niños.

$\frac{1}{3}$

Unidad dividida en octavos: $\frac{1}{8}$

Unidad dividida en cuartos: $\frac{1}{4}$

2. Las fracciones comunes se expresan con dos números escritos uno sobre el otro y separados por una raya horizontal.

$\frac{1}{2}$ Numerador / Denominador $\quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{6}$

El número de la parte inferior se llama **denominador,** y representa el **número de partes iguales** en que se ha dividido la unidad.

El número que está en la parte superior se llama **numerador,** y representa el número de partes iguales que se han tomado de la unidad.

3. Se llaman **fracciones equivalentes** las que tienen un mismo valor.

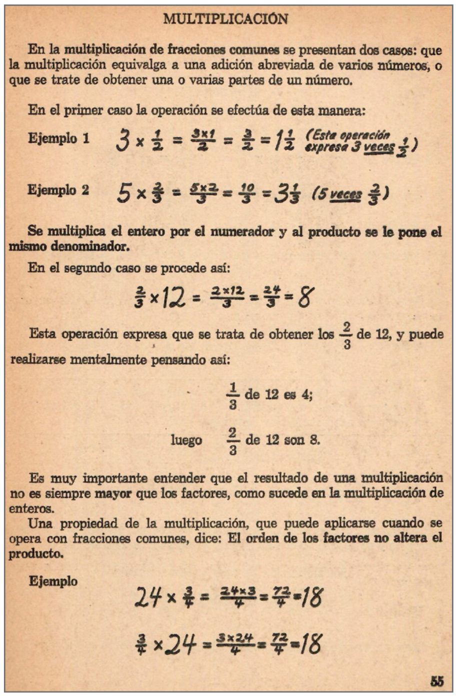
$\frac{1}{2}=\frac{4}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6}$

Son fracciones comunes equivalentes:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}$$

44

Figura 4b. Página típica del libro de sexto año, *Aritmética y Geometría* (SEP, 1970, p. 55)


MULTIPLICACIÓN

En la multiplicación de fracciones comunes se presentan dos casos: que la multiplicación equivalga a una adición abreviada de varios números, o que se trate de obtener una o varias partes de un número.

En el primer caso la operación se efectúa de esta manera:

Ejemplo 1 $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ (Esta operación expresa 3 veces $\frac{1}{2}$)

Ejemplo 2 $5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ (5 veces $\frac{2}{3}$)

Se multiplica el entero por el numerador y al producto se le pone el mismo denominador.

En el segundo caso se procede así:

$$\frac{2}{3} \times 12 = \frac{2 \times 12}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Esta operación expresa que se trata de obtener los $\frac{2}{3}$ de 12, y puede realizarse mentalmente pensando así:

$\frac{1}{3}$ de 12 es 4;

luego $\frac{2}{3}$ de 12 son 8.

Es muy importante entender que el resultado de una multiplicación no es siempre mayor que los factores, como sucede en la multiplicación de enteros.

Una propiedad de la multiplicación, que puede aplicarse cuando se opera con fracciones comunes, dice: **El orden de los factores no altera el producto.**

Ejemplo

$$24 \times \frac{3}{4} = \frac{24 \times 3}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

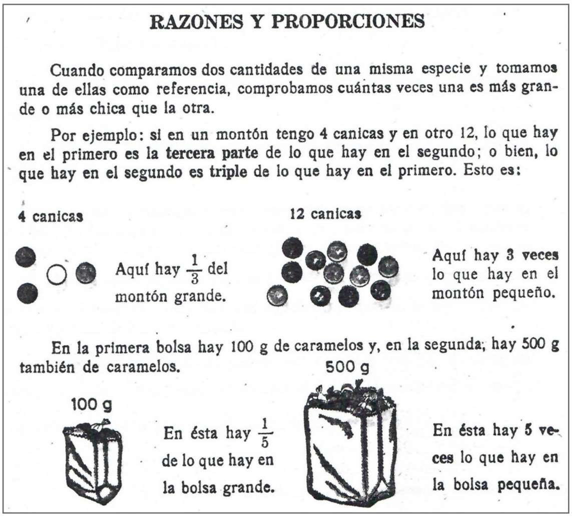
$$\frac{3}{4} \times 24 = \frac{3 \times 24}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

55

Introducción de la noción de razón

En el quinto grado se introduce la noción de razón, enfatizando la idea de **comparación por cociente**. No se hace referencia explícita a que éste es otro significado de la fracción, sólo se usa la notación fraccionaria (SEP, 1961, p. 85). El tema se inicia mediante un discurso descriptivo (nivel TS) que indica lo que ha de mirarse en la situación (figura 5):

Figura 5. Lección de sexto grado en la que inicia el trabajo con las razones y proporciones (SEP, 1961, p.85).



RAZONES Y PROPORCIONES

Cuando comparamos dos cantidades de una misma especie y tomamos una de ellas como referencia, comprobamos cuántas veces una es más grande o más chica que la otra.

Por ejemplo: si en un montón tengo 4 canicas y en otro 12, lo que hay en el primero es la **tercera parte** de lo que hay en el segundo; o bien, lo que hay en el segundo es **triple** de lo que hay en el primero. Esto es:

4 canicas

Aquí hay $\frac{1}{3}$ del montón grande.

12 canicas

Aquí hay 3 veces lo que hay en el montón pequeño.

En la primera bolsa hay 100 g de caramelos y, en la segunda, hay 500 g también de caramelos.

100 g

En ésta hay $\frac{1}{5}$ de lo que hay en la bolsa grande.

500 g

En ésta hay 5 veces lo que hay en la bolsa pequeña.

La formalización y definición presentadas al final de la lección son las siguientes:

Figura 6. Formalización de la noción de razón en el libro de quinto año. *Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza* (SEP. 1961, 86).

D

Razón es el resultado de comparar por cociente dos cantidades de una misma especie.
Así, la razón del número de canicas del primer montón respecto del segundo es 1/3 (Primer ejemplo).
La razón de 100 g de caramelos a 500 g de caramelos es 1/5 (segundo ejemplo)

En concordancia con el enfoque asumido, el resto del tema se conduce en el nivel TS mediante ejercicios de cálculo, al igual que la noción de proporción, que inicia con la siguiente definición: "Cuando hay dos razones iguales se forma una proporción" (SEP, 1961, 89).

Conclusiones sobre las fracciones en el currículo de 1960

En este período el sustento casi exclusivo de la noción de fracción es el modelo parte-todo. De primero a cuarto grado, las expresiones de la forma a/b tienen como referente único la idea de partir un objeto en partes iguales y tomar cierto número de ellas. La equivalencia entre fracciones también se asocia a dicho modelo y se ilustra sobre objetos simples del entorno y figuras geométricas en general regulares. Por supuesto, el objetivo era alcanzar el manejo simbólico y culminar con la idea de que: al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número se obtienen fracciones equivalentes.

En los primeros grados se utilizaba lenguaje natural para referirse a los medios y los cuartos, pero en general, el uso del lenguaje estaba fuertemente vinculado al nivel TS. En prácticamente todas las lecciones se incluía alguna formalización, definición o procedimiento expresado mediante este lenguaje, y en los últimos grados el trabajo se realiza principalmente en dicho nivel. Es el caso de las nociones de razón y proporción, que fueron trabajadas en esos grados, sin haberse producido suficientes intuiciones para apoyar su comprensión. En general, el lenguaje que acompañaba a las situaciones era descriptivo o enunciativo y en muchos casos las definiciones se incorporaban sin haberse ofrecido un respaldo experiencial (a través de las imágenes) que permitiera a los alumnos verificar su validez.

Para ser justos en la valoración de esta propuesta, conviene recordar que, en 1960, la didáctica de las matemáticas como disciplina científica apenas nacía. No se contaba aún con resultados de investigaciones que permitiesen orientar con bases científicas la enseñanza de las matemáticas. Producto de este contexto, la idea de fracción que se comunicaba hoy parece en extremo estática y limitada. Pero es que se trataba de un período donde en la base estaba una teoría emparentada con el sensual-empirismo. Conforme a esta teoría, se creía que el aprendizaje se daba a través de los sentidos y el alumno era considerado un receptor que asimilaba los conocimientos en la forma en que se le presentaban; de ahí la importancia de las imágenes.

Hoy este acercamiento resulta del todo cuestionable puesto que, además de que el modelo parte-todo determinaba el sentido y el límite de las fracciones, se consideraba que una presentación inicial (ostensiva) del conocimiento etnomatemático bastaría para que el conocimiento técnico-simbólico se impregnara de significado. No podía ser de otro modo. En ese entonces, la ostensión constituía el horizonte de la acción didáctica en *Aritmética y geometría*: el conocimiento entraba por los sentidos, y se generaba mediante intuiciones creadas a partir de las imágenes. Tal forma de concebir las fracciones y promover su enseñanza se vería modificada con el ingreso de la reforma de los años 70.

LA MATEMÁTICA MODERNA O LA TRANSICIÓN A LA DIDÁCTICA

Nuevos significados y nuevos lenguajes para las fracciones

El currículo introducido en 1972, conocido en México como "La reforma de las matemáticas modernas", trajo grandes cambios en la forma de pensar las matemáticas y su enseñanza en la educación primaria. Las reflexiones de Bruner y de Dienes tendían un nuevo horizonte para la enseñanza de dicha disciplina (Avila, 2006). De ahí que un principio fundamental para enseñarla fuera el siguiente: "Que sean los mismos niños quienes vayan descubriendo las nociones" (Imaz, coord., 1977, p. 6). Porque, "[...] se habrá de aprovechar el caudal de nociones intuitivas que el niño ya maneja, por sus vivencias cotidianas, construir sobre ellas tratando de refinar tales nociones por medio de situaciones concretas en las que éstas se presentan de maneras sencillas, hasta alcanzar, a través de la práctica reiterada, el concepto que interesa captar". (Gorostiza y Rivaud (coords.), 1974, p. 8).

Esta nueva perspectiva tuvo efectos sobre la forma de relacionar a los alumnos con las fracciones; las ideas sobre estos números se ensancharon, iniciándose una apertura hacia el "gran concepto de número racional":

- Se mantuvo el modelo *parte-todo*, pero se incorporó también la fracción como cociente (introducida como resultado de un reparto), como razón (vinculada a las escalas) e incluso como operador.
- Se ampliaron las representaciones de la fracción, incluyéndose *todos discretos* y la recta numérica como medios de representación

- Se incluyeron problemas que implicaban orden y operaciones con fracciones.
- Se establecieron puentes más sólidos entre el conocimiento etnomatemático (CE) y el técnico-simbólico (CTS), mediante un tránsito más pausado por el nivel intuitivo (CI).
- El lenguaje se modificó: se mantuvo el descriptivo propio de los años sesenta, pero se agregaron dos nuevos formatos: el argumentativo (que expresa razones yendo más allá de las descripciones), y el interrogativo (que lleva a expresar conclusiones a partir de regularidades observadas en casos particulares).

Efectivamente, aunque el enfoque general estaba cargado hacia la disciplina matemática (Block y Álvarez; 1999), en el caso de las fracciones se observa interés por establecer mejores vínculos entre los distintos niveles de conocimiento. Veamos esto en el trayecto que sigue la fracción a lo largo de la primaria.

La noción de fracción

La noción de fracción en este currículo presenta una cierta ambivalencia: llamarse quebrado y a la vez llamarse fracción. Esta ambivalencia se observa a lo largo de la primaria. La noción se introduce en segundo grado apelando a las experiencias cotidianas de los niños: se presentan mitades o cuartos de pasteles, frutas, colecciones de objetos, o precios de juguetes que se fraccionan en terceras o cuartas partes.

A primera vista, este acercamiento es similar al de los años sesenta, pero no es así, pues además de una parte de un todo continuo, la fracción es también una parte de una colección de objetos y una parte de una cantidad distinta de uno (véase figura 6).

En este acercamiento introductorio se incluye también la representación de algunas fracciones en la recta numérica (figura 7). Una representación aparentemente tan alejada del pensamiento de los niños pequeños era considerada accesible porque se suponía dotada de significado a través de “los saltos de la rana”, recurso didáctico utilizado profusamente con los números naturales en el primer grado.

Figura 6. Páginas del libro de segundo grado en las que inicia el tratamiento de las fracciones (SEP, 1972a, pp. 105, 110 y 111).

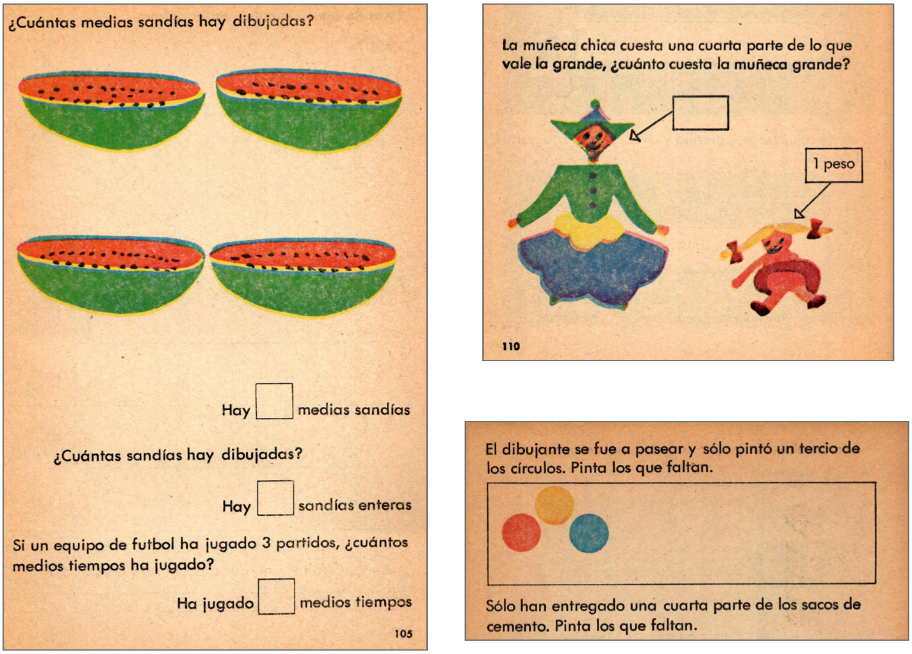
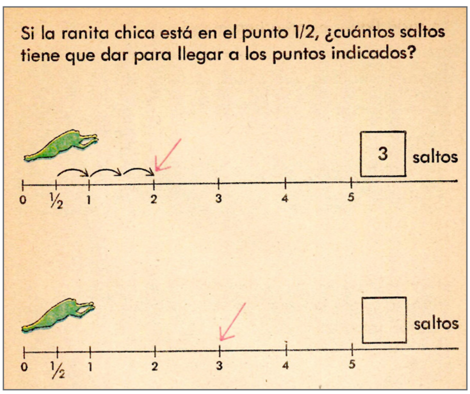


Figura 7. Introducción, en el segundo grado, de las fracciones en la recta numérica. (SEP. 19721a, p. 107).



Pero la noción no se limita a lo anterior; en tercer grado se incorpora la idea de fracción como resultado de un reparto (tendiente a la idea de cociente) mediante el planteamiento de problemas del tipo siguiente:

E

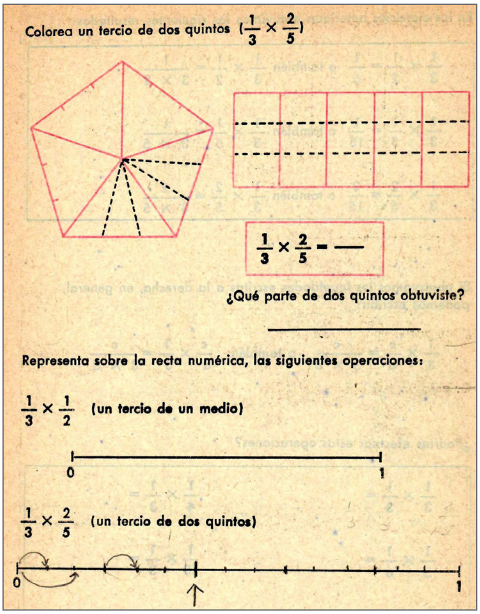
"Diez niños se van a repartir dos papayas. Forman dos grupos de 5 niños cada uno y cada grupo se divide una papaya en partes iguales. A cada niño le toca ________ de papaya". (p. 207, libro de tercer grado, subrayado mío).

La parte-todo y el cociente se alternarán a lo largo de la primaria y se complementarán con la idea de razón (asociada a las figuras a escala) y la de operador, trabajada con detenimiento en los últimos grados, mediante problemas del tipo: "*Cinco octavas partes de los animales de un zoológico son mamíferos y 2 de cada 25 mamíferos son fieras. Si el zoológico cuenta con 3000 animales, ¿cuántas fieras puedes hallar en el zoológico?*" (SEP, 1972, p. 253) [7].

Este sub-constructo desembocará en la multiplicación de fracciones, que se dota de significado mediante un amplio tratamiento basado en la graficación de la idea "una parte de" sobre fracciones unitarias y no unitarias: "el resultado de multiplicar una fracción por otra es una parte de esa otra", lo que se formaliza mediante la operación mencionada (figura 8).

[7] Coincido con Real, Gómez y Figueras (2013), en que la interpretación de la fracción puede modificarse en una situación, por ejemplo, en una situación de escalas, inicialmente se trata de una razón, y se transita a la de operador cuando se resuelve el problema.

Figura 8. Página de libro de quinto grado dedicada a ilustrar la multiplicación de fracciones (SEP, 1972c, p. 177).



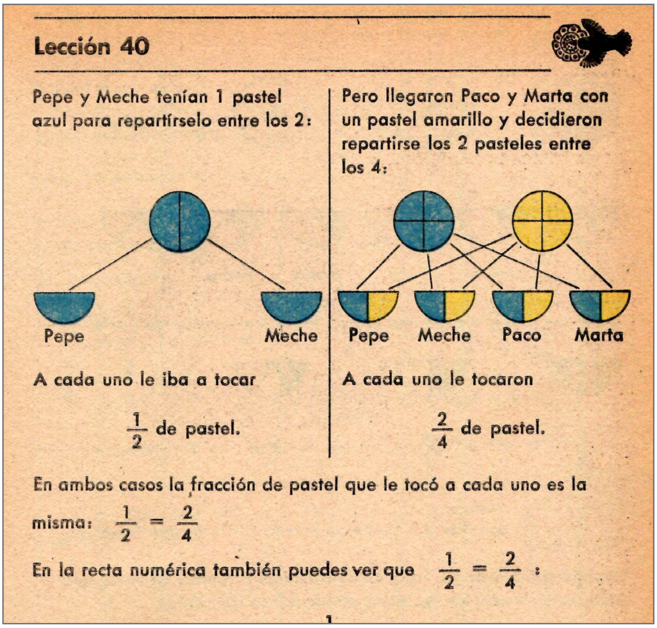
Posteriormente, la operación se utiliza para resolver problemas del tipo siguiente:

> F
> $^{4}/_{7}$ partes del espacio de un librero está ocupada por libros, y de éstos, las enciclopedias ocupan la tercera parte, ¿Qué parte del librero ocupan las enciclopedias?
> (SEP, 1972c, p. 256)

Es importante señalar que la idea de fracción como cociente (resultado de un reparto) se desarrolla sin apoyo de representaciones gráficas. Son situaciones planteadas verbalmente las que vinculan al sub-constructo con el CE de los estudiantes, tal como se ve en el problema inserto en el recuadro *E*. Esto se debe probablemente a que la actividad de repartir está más vinculada a la acción efectiva que la de sombrear figuras (Kerslake, 1986, p. 90), y al ser más dinámica, es más difícil de representar.

Es así que, aunque las situaciones no corresponden sólo al modelo dominante, en general, las representaciones gráficas sí. Es hasta que se incorpora la equivalencia –a partir de la idea de "reparto" (SEP, 1975, pp. 109, y 110)– cuando se incluyen representaciones gráficas de algunos repartos (figura 9). Con este tipo de imágenes se busca generar un CI que apoye la comprensión de la noción.

Figura 9. Página del libro de cuarto grado en la que se incorpora la idea de equivalencia con base en repartos equivalentes. La página siguiente contiene ejemplos similares.


Lección 40

Pepe y Meche tenían 1 pastel azul para repartírselo entre los 2:

Pepe Meche

A cada uno le iba a tocar

$\frac{1}{2}$ de pastel.

Pero llegaron Paco y Marta con un pastel amarillo y decidieron repartirse los 2 pasteles entre los 4:

Pepe Meche Paco Marta

A cada uno le tocaron

$\frac{2}{4}$ de pastel.

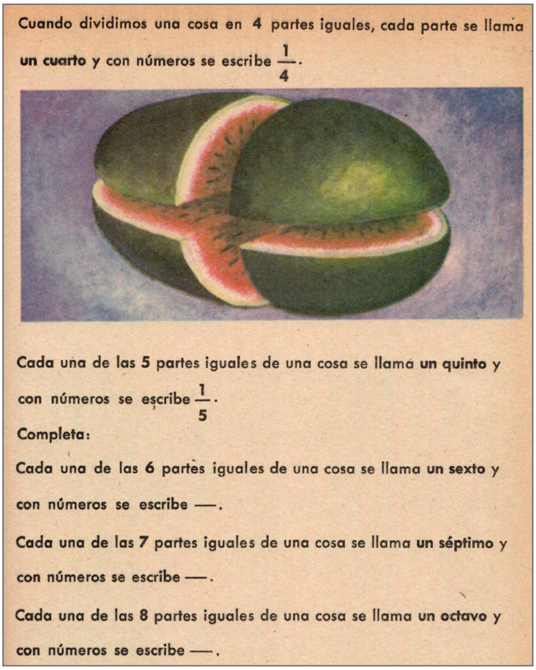
En ambos casos la fracción de pastel que le tocó a cada uno es la misma: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

En la recta numérica también puedes ver que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$:

El lenguaje

En los primeros grados predomina el lenguaje natural; la incorporación decidida del lenguaje TS comienza hacia la mitad de la primaria, con referencia al modelo *parte-todo* (figura 10).

Figura 10. Página del libro de tercer grado, donde se observa el tránsito al nivel técnico-simbólico sustentado básicamente en el modelo parte-todo (SEP, 1972b, 203).



Cuando dividimos una cosa en 4 partes iguales, cada parte se llama un cuarto y con números se escribe $\frac{1}{4}$.

Cada una de las 5 partes iguales de una cosa se llama un quinto y con números se escribe $\frac{1}{5}$.

Completa:

Cada una de las 6 partes iguales de una cosa se llama un sexto y con números se escribe ——.

Cada una de las 7 partes iguales de una cosa se llama un séptimo y con números se escribe ——.

Cada una de las 8 partes iguales de una cosa se llama un octavo y con números se escribe ——.

La representación gráfica del modelo se alterna con "todos intangibles", como la hora o los minutos, concluyendo, después de varios ejemplos, con la siguiente formulación:

G

"Los números como $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ se llaman quebrados o fracciones"
(Libro de tercer grado, p. 205).

Frases idénticas se reiteran en tercero y cuarto grados, siempre destacadas en recuadros y precedidas de ejemplos y ejercicios sobre representaciones gráficas del modelo. Pero en este período, como se verá en seguida, el lenguaje y su uso se complejizaron.

El lugar del lenguaje "formal"

No obstante la recurrencia al modelo parte-todo y el uso de frases enunciativas, una diferencia con el currículo de los años sesenta es el lugar del lenguaje: a las formulaciones y definiciones las preceden una cantidad importante de representaciones gráficas. Esto es, hay un tránsito más pausado por el nivel intuitivo, el cual tiene por objetivo dotar de significado a las "formalizaciones matemáticas". En consecuencia, el lenguaje matemático "formal" generalmente se ubica al final de las lecciones.

En otros casos, el lenguaje se torna argumentativo (trata de exponer las razones que subyacen a las formulaciones), como en la multiplicación que, a través de acciones sobre imágenes, intenta mostrar las "razones" del significado de la operación (figura 8).

En algunas ocasiones, se introduce un lenguaje que acompaña más abiertamente al razonamiento inductivo, promovido mediante la observación guiada de ciertas regularidades en los casos presentados. De este modo –conforme a la idea de que los niños descubran los conceptos– el procedimiento general, el concepto o la definición que interesa elaborar se formulan con base en la regularidad observada en los ejemplos y los ejercicios resueltos.

Un intento por promover el razonamiento inductivo en el caso de las fracciones lo encontramos en el libro de cuarto grado donde, después de una actividad sobre varias "rectas numéricas", en la que se constata que el punto o los puntos correspondientes a diversas fracciones es el mismo (figura 11), la secuencia se cierra formalizando la idea de que a un mismo número (mismo punto en la recta) corresponden distintas expresiones fraccionarias equivalentes (figura 12).

Figura 11. Rectas numéricas donde se muestra la equivalencia de fracciones respecto de los puntos correspondientes a 1, 2 y 3 (SEP, 1975, p. 76)

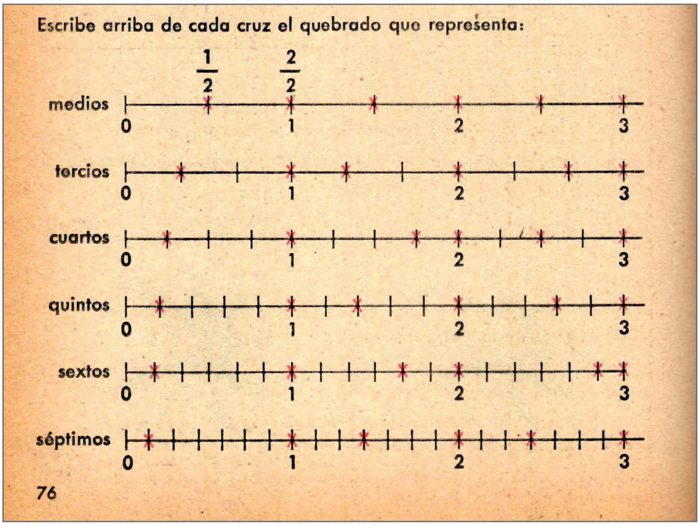
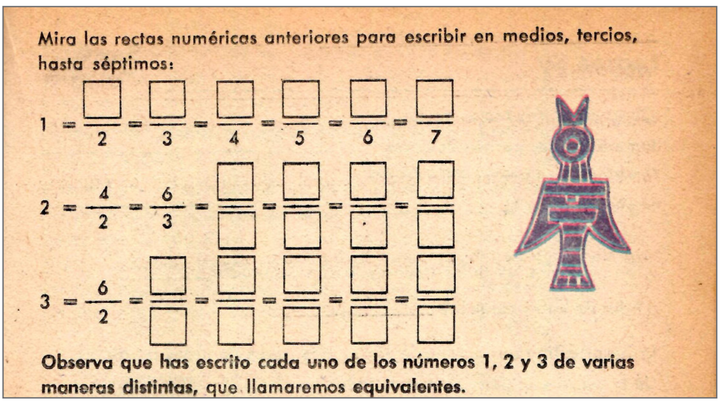


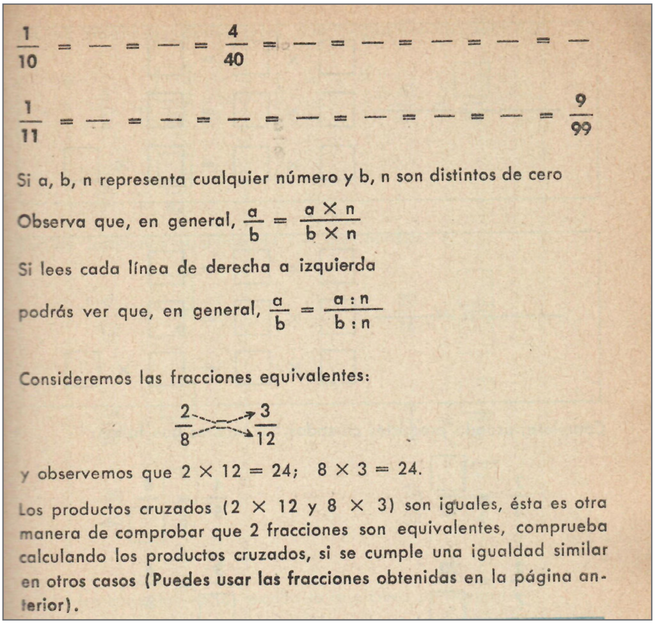
Figura 12. Lección en la que, habiendo observado puntos sobre la recta correspondientes a fracciones equivalentes (figura 11), se concluye sobre la equivalencia de fracciones y se emplea por primera vez el término equivalente. Libro del alumno. *Matemáticas*. Cuarto grado. (SEP, 1975: 77).



El proceso didáctico seguido en este caso consiste en: a) resolver ejercicios donde se muestra que es posible expresar de distintas maneras una fracción (un mismo punto en la recta), b) hacer observar lo anterior, c) observar que un número puede expresarse de diferentes maneras, y d) dar nombre a lo observado: esas distintas maneras son equivalentes.

Después de un recorrido apoyado en representaciones del modelo parte-todo y la recta numérica, se concluye con una definición de equivalencia sustentada en los productos cruzados, situación que refleja el interés por formalizar el lenguaje matemático (Nivel TS) (figura 13).

Figura 13. *Matemáticas*. Quinto grado. (SEP, 1972c, p. 41)



$\frac{1}{10} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{4}{40} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

$\frac{1}{11} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{9}{99}$

Si a, b, n representa cualquier número y b, n son distintos de cero

Observa que, en general, $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$

Si lees cada línea de derecha a izquierda

podrás ver que, en general, $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$

Consideremos las fracciones equivalentes:

$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{12}$

y observemos que $2 \times 12 = 24$; $8 \times 3 = 24$.

Los productos cruzados (2×12 y 8×3) son iguales, ésta es otra manera de comprobar que 2 fracciones son equivalentes, comprueba calculando los productos cruzados, si se cumple una igualdad similar en otros casos (Puedes usar las fracciones obtenidas en la página anterior).

Es decir que, en algunas lecciones se buscaba la obtención de formalizaciones como corolario del proceso de descubrimiento (o de inducción). Los libros de texto eran un importante apoyo para poner en práctica tal enfoque. Aunque plasmarlo en el tratamiento de las fracciones no fue tan sencillo como en otros temas, por lo que su incorporación no fue muy frecuente.

Conclusiones sobre el currículo de 1972

Antes mencioné, que esta propuesta implicó una primera apertura a la idea de número racional como "gran concepto" constituido por los sub-constructos medida, cociente, razón y operador multiplicativo.

Es cierto que aún se utiliza la palabra "quebrado" y que el modelo parte-todo es referente gráfico fundamental para la construcción del concepto de fracción, pero a las frutas o las figuras geométricas regulares se agregaron las irregulares, las colecciones de objetos, o los "todos" diferentes de uno expresados por ejemplo en precios, número de participantes en equipos deportivos, o de alumnos de un grupo escolar. Ya en los últimos grados se incluye la noción de operador mediante conjuntos de los que se ha de calcular una fracción.

Por otra parte, la modificación en el sustento psicológico (el aprendizaje por descubrimiento) llevó a intentos meritorios de abandonar la ostensión y el lenguaje descriptivo que le es consustancial.

A pesar de las dificultades para plasmar en todas las lecciones el enfoque previsto, el reconocimiento de que el alumno llega a la escuela con un conocimiento, y que partir de ese conocimiento es el camino pertinente para construir el conocimiento escolar, constituyó indudablemente un avance en las formas de pensar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y de las fracciones. Pero llegó el tiempo en que la propuesta sería cuestionada y sería sustituida por otra con orientación constructivista. Esto ocurrió al comenzar los años noventa.

El currículo de base científica: acento en la construcción del conocimiento y una débil institucionalización

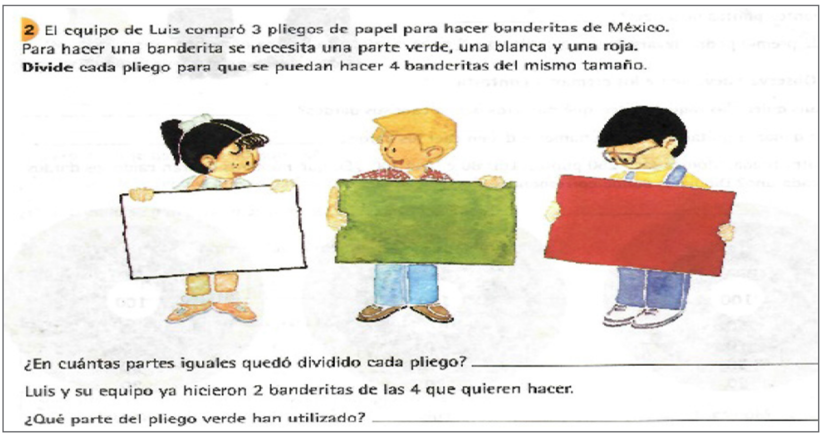
El currículo de 1993 se concibió en un contexto internacional generado por la irrupción del constructivismo en la educación básica y por un avance importante en la investigación en didáctica de las matemáticas (véase, por ejemplo, Block y Waldegg, coords.1995), contexto en el que además se vivía un fuerte desencanto por los resultados de "las matemáticas modernas" (SEP, 1993; Block y Álvarez, 1999; Avila, 2006). Resultado de lo anterior, fueron los cambios relevantes en el enfoque pedagógico para promover el aprendizaje de las matemáticas: se buscó la participación activa de los alumnos en la construcción de los conocimientos, y se incorporó la resolución de problemas como instrumento privilegiado para hacerlo (SEP, 1993). Dicha perspectiva se dejó sentir en el tratamiento didáctico de las fracciones.

Un amplio significado para la noción de fracción

Siendo éste un currículo que contaba para su fundamentación con un amplio acervo de investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones, se incluyeron sistemáticamente sus diversos significados: parte-todo, cociente, medida, razón y operador (SEP, 2001, 2002a, 2002b, 2002c). Estos significados se trabajan a partir de situaciones problemáticas consideradas significativas para los alumnos: partición de cartulinas, hojas y tiras de papel para construir adornos o juguetes; repartos de pasteles, pizzas y galletas (modelados en papel); así como medición de objetos del entorno, entre otras. Las tiras de papel también fueron utilizadas para trabajar las fracciones en contexto de medición, y en los últimos grados se abordó detenidamente la idea de razón vinculada a mezclas, reglas de cambio y escalas.

El acercamiento didáctico en esta propuesta es muy distinto de los anteriores; las frutas y las figuras geométricas desaparecieron como recursos para introducir las fracciones. Las lecciones sobre el tema (que comienzan en tercer grado) incluyen situaciones problemáticas a partir de las cuales −aprovechando los conocimientos previos de los niños− se van construyendo las nociones. El acercamiento inicia con las fracciones *un medio* y *un cuarto*, que durante un tiempo no serán nombradas formalmente ni simbolizadas. La figura 14 muestra un fragmento de una lección donde la intención es que se fraccionen hojas de papel en medios y cuartos sin utilizar necesariamente los términos.

Figura 14. Fragmento de la lección del libro de tercer grado en la que inicia el tratamiento de las fracciones en el currículo.



También es clara la intención de romper el esquematismo del modelo parte-todo presentando particiones no convencionales (figura 15), y vinculando las fracciones con cantidades discretas (precios) y continuas (litros o quesos) (figura 16).

Figura 15. Lección de tercer grado en la que se muestran particiones poco convencionales

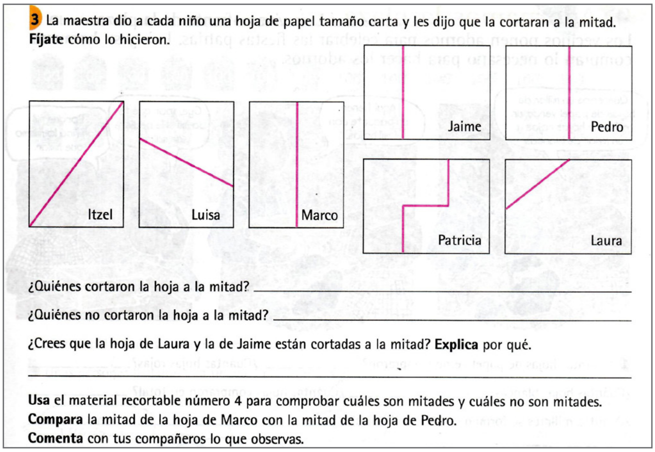
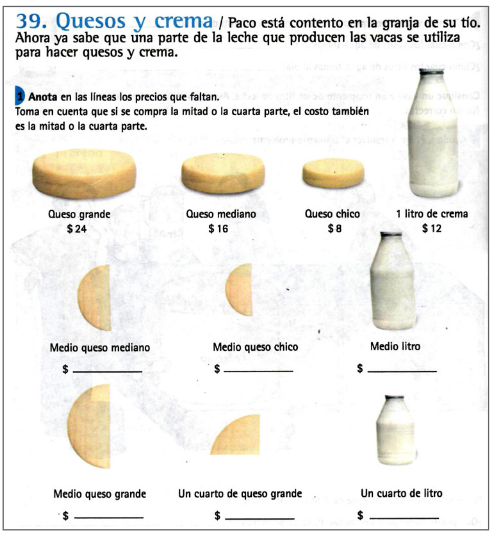


Figura 16. Fragmento de una lección donde las fracciones se vinculan a cantidades continuas y discretas (Matemáticas tercer grado. SEP, 2002a, p. 92)



Ocasionalmente, –como al final de la lección "Quesos y crema"– se incluyen "formalizaciones" del conocimiento producto de la actividad (recuadro H):

> **H**
> Para escribir cantidades como un medio o un cuarto, se pueden utilizar las fracciones. Un medio se escribe así: $\frac{1}{2}$; un cuarto se escribe así: $\frac{1}{4}$. (*Matemáticas* tercer grado. SEP, 2002a, p. 93)

Estas formalizaciones son muy escasas y, en general, son "formalizaciones locales", puesto que las convenciones son fijadas libremente para utilidad del grupo y el avance en el estudio de la lección. Bajo el escaso interés por las formalizaciones, la primera vez que se utiliza el lenguaje técnico simbólico es en la lección *Quesos y crema*. En las cinco lecciones previas todo se ha expresado en lenguaje natural.

También se incluyen situaciones donde aparecen las fracciones en contexto de medición, con referencia a unidades no convencionales. Por ejemplo, unas tiras de papel se convierten en unidades de medida y de su uso resultarán fracciones (figura 17):

Cuando se incluyen las fracciones como resultado de un reparto, de manera distinta a como se hacía en la propuesta de 1972, los repartos se representan gráficamente, o se pide a los alumnos realizarlos con objetos o dibujos. La página donde se inicia el trabajo con esta interpretación se ve en la figura 18. La página es interesante porque, además de que los repartos se hacen efectivamente, la acción se vincula con la escritura de las fracciones (3 hojas para 4 niños; las 3 hojas se dividen para repartirlas entre los 4 niños; a cada niño le tocan $^3/_4$ de hoja). Esta vinculación (CE-CI-CTS) también muestra el interés por el significado: aquí de una representación difícil de comprender (la de la forma a/b).

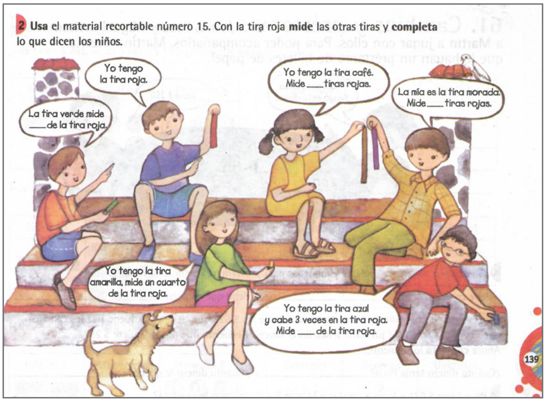
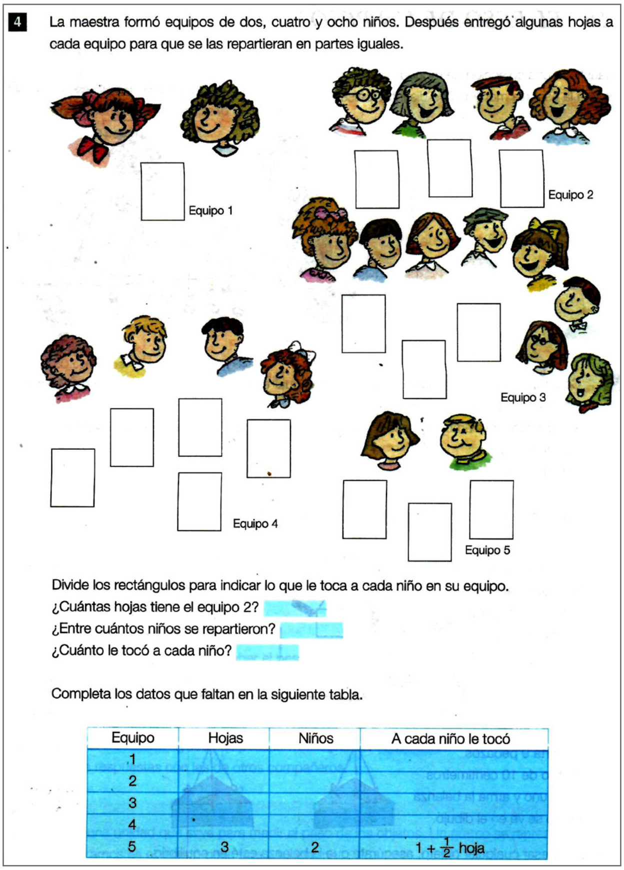


Figura 17. Fragmento de una lección de tercer grado donde las tiras de papel se utilizan como unidades de medida que dan lugar a fracciones.



4 La maestra formó equipos de dos, cuatro y ocho niños. Después entregó algunas hojas a cada equipo para que se las repartieran en partes iguales.

Equipo 1

Equipo 2

Equipo 3

Equipo 4

Equipo 5

Divide los rectángulos para indicar lo que le toca a cada niño en su equipo.

¿Cuántas hojas tiene el equipo 2?

¿Entre cuántos niños se repartieron?

¿Cuánto le tocó a cada niño?

Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Equipo	Hojas	Niños	A cada niño le tocó
1			
2			
3			
4			
5	3	2	$1 + \frac{1}{2}$ hoja

Figura 18. Lección del libro de cuarto grado donde se introduce la noción de fracción como resultado de un reparto.

Las hasta aquí expuestas no son todas las ideas sobre las fracciones incorporadas en 1993. En el quinto grado se introduce su representación en la recta numérica y se da un amplio tratamiento a las fracciones decimales y la expresión decimal de las fracciones (SEP, 2002c). También la comparación, equivalencia y suma de fracciones, ocupan un lugar en la propuesta.

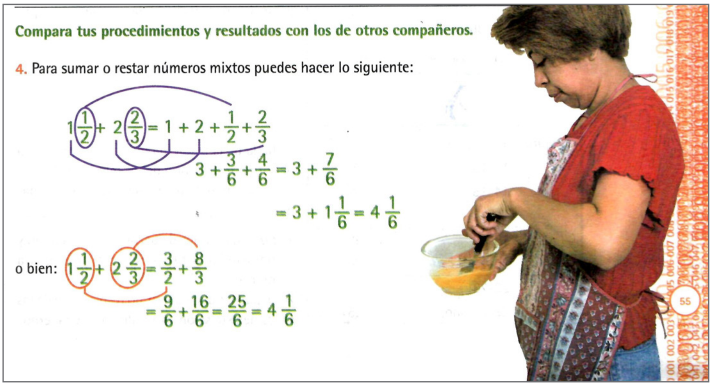
Comparación, equivalencia y suma de fracciones

La noción de equivalencia se vincula a situaciones donde se hacen repartos equivalentes (SEP; 2001b, p. 93-93) o a situaciones en contexto de medición o saltos de animales: por ejemplo, "Un salto de $^1/_2$ metro es igual a un salto de $^2/_4$ de metro" (SEP, 2002b, p. 135). Pero la equivalencia se lleva a otros contextos: en una lección de sexto grado la actividad se ubica en la notación musical: ¿Cuántas corcheas equivalen a una blanca?, ¿Qué parte de una redonda es una corchea?, El nivel TS se introduce solicitando establecer la equivalencia entre una fracción (5/4) y tantas notas blancas, o negras, o corcheas como sean necesarias para completar el tiempo musical anotado (SEP, 2001p. 21). Una tabla de números proporcionales que los estudiantes han de llenar a partir de calcular el listón para varios moños, resulta útil para acercar más al nivel TS e incorporar una formalización local sobre la equivalencia:

> Seguramente las fracciones que te resultaron en las preguntas anteriores son 5/3 y 10/6. Estas fracciones representan la misma medida y hay varias maneras de comprobar que son equivalentes. (SEP, Sexto grado. 25).

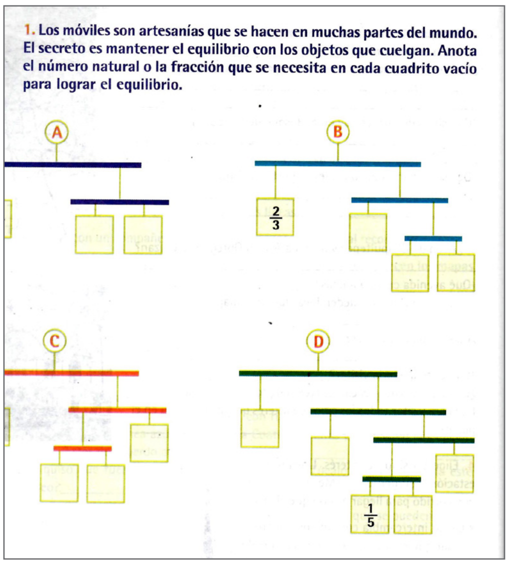
El currículo incluye también la suma de fracciones, que inicia en el tercer grado. En éste se utilizan fracciones de denominador 2 o 4 y a lo largo de todo el ciclo educativo se trabaja con fracciones fácilmente manejables. Se espera que los niños, con sus conocimientos etnomatemáticos y los intuitivos desarrollados en la escuela, desplieguen estrategias personales para calcular. Es por ello que, en vez de comunicarse algún procedimiento formal, lo más frecuente es que se comparen las estrategias de solución y los resultados con los de otros compañeros. Es hasta el final de la secuencia, en el sexto grado, donde se expone un ejemplo (no del todo desarrollado) de cómo podrían haber sumado los números mixtos implicados en la resolución de un problema (figura 19) (SEP, 2001, p. 55).

Figura 19. Formalización local del procedimiento para sumar números mixtos.



Este tema (la suma de fracciones) culmina en combinación con la idea de equivalencia, mediante una actividad consistente en anotar las fracciones convenientes para lograr el equilibrio entre diversos móviles (figura 20):

Figura 20. Primera página de la lección de sexto grado que cierra el tratamiento de la suma y resta de fracciones.



El de los móviles es un ejercicio que obliga a pensar y no sólo a hacer cálculos de modo automático. Es también el final de una secuencia sin alguna formalización procedimental para calcular con las fracciones.

La fracción como razón

Esta noción tiene un elaborado tratamiento; su inclusión constituye una innovación en la enseñanza de las fracciones. Se inicia en el quinto grado, explicitando que la razón es una forma más de interpretar las fracciones, según subtítulo de la lección *"La tienda de pinturas: Fracciones como relaciones o razones"* (SEP, 2002*c*, 142-143). El contexto de mezclas resulta útil para vincular, a partir de situaciones problemáticas, fracciones sencillas (como 5/8) con expresiones del tipo "Litros de pintura blanca por cada litro de pintura verde", o "Fracción de pintura blanca que hay en la mezcla".

Posteriormente la noción se relaciona con la idea "regla de cambio" que –a partir de situaciones problemáticas– se expresa también como "tratos buenos" y "no tan buenos". Por ejemplo, en una lección de sexto grado se plantea: *Por cada ficha les doy 3 estampas, Por cada 6 fichas les doy 12 estampas, Les doy una cantidad de estampas igual a dos veces la cantidad de fichas*, ¿con cuál regla de cambio creen que ganarán más estampas? (SEP, 2001, pp.30-31).

Los estudiantes han de decidir cuál regla es la que conviene más. En concordancia con el enfoque, se promueve la comparación y discusión de resultados, incluyendo la idea de que "Hay reglas de cambio que son equivalentes porque dan siempre la misma cantidad de estampas" (lección 11, pp. 30-31). Siempre sobre la base de problemas, más adelante se comunica a los estudiantes la posibilidad de representar las "reglas de cambio" o "los tratos" mediante expresiones distintas: a) "por cada *tantos*...me dan *tantos*...", b) mediante porcentajes, o c) mediante fracciones (SEP, 2001, p. 45). Hay un notable interés en hacer comprender la noción de razón generando un conocimiento intuitivo sobre esta relación.

Otra vertiente del tema se vincula a las escalas; se inicia mediante indicaciones como: *Los lados de la nueva figura deben ser del doble, del triple, etc.*, sin referencias formales al concepto. Es en la lección 46 (SEP, 2001, p. 104-105) después de varias lecciones que abordan el tema donde se formaliza el concepto de **factor de escala**:

> El número por el que hay que multiplicar (o dividir) las medidas de una figura para obtener las medidas de la figura a escala se llama **factor de escala**.
>
> ...
>
> Para que una figura sea una reproducción a escala de otra, el factor de escala debe ser el mismo para todos los lados que se corresponden. Lo anterior equivale a decir que las medidas de una figura deben ser proporcionales a las medidas de la otra. (SEP; 2001, p. 105).

En síntesis, en este currículo hemos visto la incorporación de la fracción asociada al modelo parte-todo de una manera breve y distinta de como se hacía en las propuestas curriculares anteriores. Además, la noción, siempre inmersa en situaciones problemáticas, se presenta vinculada sistemáticamente a las situaciones de medición y de reparto, así como de razón. En el quinto y sexto grados además de un trabajo intenso con la razón, se incluyen nociones afines: porcentaje y escala. Es un claro ensanchamiento de la idea tradicional de fracción.

¿El significado opacó al lenguaje?

El interés por dar significado a las fracciones es notable en esta propuesta. No hay ninguna lección donde la actividad no esté relacionada con alguna representación gráfica de las fracciones o con alguna situación problemática de la que derive la actividad de aprendizaje. Es decir que generar un conocimiento intuitivo (en los términos de Kieren) fue fundamental en este currículo. En cambio, casi no hay formalizaciones en los libros de tercero, cuarto y quinto grado (dos, tres y cuatro respectivamente). En el de sexto grado aumenta el número (a ocho), principalmente en el tema de razón. Pero la prevalencia del conocimiento intuitivo se conservó y no todo lo que hubiera sido conveniente formalizar se formalizó. Llama la atención que los procedimientos para sumar y restar fracciones son motivo sólo de "formalizaciones locales" y no se acompañan de una formalización franca de los procedimientos.

Conclusiones sobre el currículo de 1993

La interpretación dada al constructivismo en este currículo, llevó a trabajar sistemáticamente los distintos sub-constructos del número racional, y con ello a ensanchar el significado de las fracciones. El concepto de fracción (entendida en sentido amplio) se construye con base en la resolución de problemas y ejercicios contextualizados, es muy probable que con ello se impregnara de significado. Pero hay una ausencia importante en esta propuesta: los conceptos abordados prácticamente no se formalizan con algún enunciado o definición. Aunque este problema es menor en el sexto grado, siguiendo el pensamiento de Kieren sería válido decir que, en el currículo de 1993, promotor de que los alumnos construyeran las nociones a partir de sus propios recursos intelectuales, el estudio de las fracciones se llevó a cabo, fundamentalmente, en el nivel etnomatemático y en el intuitivo, pero escasamente en el nivel técnico-simbólico.

CONCLUSIONES GENERALES

En las tres propuestas curriculares revisadas se otorga importancia considerable al concepto de fracción; en todas se desarrollan secuencias de actividades y lecciones que tratan su contenido con amplitud. Empero, la concepción acerca de cómo se aprenden, así como los significados y el lenguaje que se les asocia cambiaron de manera importante en cada una.

El cambio estuvo alimentado por la evolución en las teorías del aprendizaje y el avance de la investigación en educación matemática. De una centración exclusiva en el sub-constructo *parte-todo* y un enfoque sustentado en principios psicológicos hoy superados, se pasó en 1972 a la incorporación de diversos significados de las fracciones, se amplió el número de sus representaciones –destacando el uso de la recta numérica– y se promovió el descubrimiento como vía privilegiada de aprendizaje. Derivado de esto último, se buscó formalizar los conocimientos como corolario de la actividad de descubrimiento, aunque no siempre el intento culminó exitosamente. Como quiera que sea, la promoción del aprendizaje por descubrimiento, el tránsito pausado por el nivel intuitivo, así como la formalización progresiva del lenguaje fueron elementos valiosos incorporados con esta reforma.

La reforma constructivista introducida en 1993 llegó aún más allá y promovió la construcción de los conceptos vinculados a las fracciones a partir de situaciones problemáticas consideradas familiares para los niños. En esta oportunidad, se ve un abandono intencional del esquematismo con que hasta entonces se había tratado el modelo parte-todo, un enriquecimiento de los contextos a los que se asocian las nociones y un amplio reconocimiento a la idea de que los niños construyen sus conocimientos mediante la resolución de problemas, la interacción con sus pares y la socialización de las ideas, las estrategias de resolución y los resultados.

Empero, una debilidad de esta propuesta es la escasa formalización de los conocimientos que buscaba comunicar. Me permito utilizar las palabras de Brousseau, para expresar que, para cerrar el círculo que lleva de un conocimiento inicial a un saber se hace indispensable institucionalizar ese saber. El reconocimiento de dicho saber en el edificio del universalmente reconocido hace necesario establecer una definición mediante convenciones lingüísticas y gramaticales aceptadas por una comunidad. (Brousseau, 1986). En términos de Kieren, diríamos que esta propuesta tiene un amplio trabajo en los niveles etnomatemático e intuitivo, y muy escaso en el técnico simbólico.

Para la elaboración de propuestas curriculares futuras, convendrá mirar el pasado de manera crítica, considerar aquello que fue fortaleza, y evitar lo que fue debilidad. Por ejemplo, la reforma de las matemáticas modernas incorporó una importante innovación al intentar que los alumnos descubrieran por sí mismos los conceptos, pero el tratamiento de los distintos significados de la fracción no fue sistemático y el paso por el nivel intuitivo le otorgó demasiada confianza al modelo parte-todo. Igualmente, el constructivismo introducido en 1993, llevó a elaborar una propuesta valiosa para la construcción de la noción de fracción a través de sus diferentes sub-constructos, siempre en situaciones consideradas de interés para los niños. Sin duda fue muy relevante la intención de vincular significativamente a los alumnos con la noción y todas sus implicaciones, pero la falta de formalizaciones debilitó la propuesta.

Hoy en México está en puerta la incorporación de nuevos programas de matemáticas. En la tradición educativa mexicana, cada vez que se emprende una reforma educativa, la ideología de la innovación (Brousseau, 2000) se apodera de los planeadores, quienes evitan mirar hacia atrás, como si la retrospección impidiera generar las condiciones para un mejor aprendizaje. La mejora, según parece, quiere hacerse depender de la innovación. Sin embargo, "al hacer de lo novedoso el criterio esencial para valorar las acciones propuestas, se destruyen las posibilidades de éxito de las mismas, y se muestra al mismo tiempo que no es al mejoramiento de la enseñanza a lo que se aspira". (Brousseau, 2000, p. 31).

En el caso de las fracciones, los exámenes nacionales recientes informan de escasos aprendizajes; también se nos ha informado que en muchas escuelas permanece la centración en el modelo parte-todo y se trabaja muy poco el resto de los sub-constructos (Avila, 2006; Izquierdo, 2006, González-Molina 2018). A este tipo de enseñanza, sin duda, también están asociados los resultados que arrojan los exámenes nacionales.

D'Amore y Fandiño (2015), en un interesante escrito publicado en *Educación Matemática* y titulado *"Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de las matemáticas"* (p. 7), muestran cómo muchas de ellas tuvieron una gran difusión, pero fueron ilusorias, ya que las mejoras esperadas con su introducción nunca llegaron. Esto parece ser lo que sucede en México con las fracciones.

Es probable, entonces, que sea más útil pensar en cómo mejorar lo que hacen y conocen los profesores y no en incorporar innovaciones que, en palabras de D'Amore y Fandiño, es probable que sólo constituyan ilusiones. Por ello, si bien este escrito tiene por objetivo exponer algunas reflexiones sobre propuestas de enseñanza potencialmente útiles para los diseñadores de proyectos educativos, me pregunto si la lectura de este tipo de análisis podría ser útil para ayudar a los profesores a revisar su práctica. Mi hipótesis es que sí, pero habrá que investigar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar.* Ciudad de México. México: Paidós. Col. Educador.

Block, D. y Álvarez, A.M. (1999). Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática. 11*(1) 57-76.

Block, D. y Waldegg, G. (cords.) (1995). Matemáticas. En: Waldegg, G. *Procesos de Enseñanza y Aprendizaje II.* Col. La investigación educativa en los ochentas, perspectivas para los noventas. pp. 21–130. Ciudad de México. México. Consejo Mexicano de Investigación Educativa/Fundación SNTE para la Cultura el Maestro Mexicano.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática. 12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseinement des mathématiques.* Thèse pour obtenir le grade de Docteur d'État Es Sciences. Université de Bordeaux I. France.

Cedillo-Osornio, J.L. (2016). *El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. México.

Charalambous, C. Y. (2007). Developping and testing a scale for measuring students' understanding of fractions. *Proceedings of PME 31,* 2, 105-112.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazzi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for testing and research. *Proceedings of PME 29,* 2, 233-240

Cortina, J. L., Zúñiga, C. y Visnovska J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática. 25*(2), 7- 29.

Davydov, V.V. & Tsvetkovich, ZH. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems on Mathematics. 13*(1), 13-64.

D'Amore, B. & Fandiño, M. I. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática. 27*(3), 7-43.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá. Colombia: Editorial Magisterio.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. [Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas] Traducción de Luis Puig (2001). En Varios Autores. *Textos seleccionados de Educación Matemática*. Ciudad de México: Cinvestav.

González-Molina, I. (2018). *Praxeologías matemáticas presentes en los libros y las libretas de alumnos de sexto grado y primero de secundaria*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. México.

Gorostiza, L. y Rivaud, J. J., (coords.) (1974). *Matemáticas cuarto grado. Libro del maestro*. México. Secretaría de Educación Pública - Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Hart, K. (General editor). (1981). *Children Undetstanding of Mathematics: 11-16*. Eastbourne. England: Anthony Rowe Publishing Services.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). *Bases de datos Excale*. Recuperado de www.inee.edu.mx el 15 de abril de 2017

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2017). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). Resultados nacionales 2015.Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México. INEE. Recuperado de www.inee.edu.mx el 5 de febrero de 2018

Izquierdo, G. (2006). *Las representaciones sociales de 12 profesores de educación primaria sobre las fracciones y su enseñanza.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. México.

Kieren, T. E. (1999) Language used in embodied action and interaction in knowing fractions". En F. Hitt y M. Santos (Eds) *Proceedings of the PME NA XXI*. Vol. I, 110-125.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knoweldge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and Operations on* *the MIddle Grades*. (pp. 162-181). EUA: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's errors and strategies*. Windsor, England: NFER-Nelson

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En C. Chamorro (coord.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. (pp. 188-220). Madrid: Síntesis.

Llinares, S. y Sánchez, V. (2000). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Real, R., Gómez, B. y Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: el caso de un libro de texto. Épsilon. *Revista de educación matemática*. *30*(3), *85*, 21-36.

Zazkis, R. y Mamolo, A. (2018). On Numbers: Concepts, Operations and Estructure. En: A. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero: *The second handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. 39-71. Rotterdam/Boston/Taipei. Sense Publishers.

Libros y materiales analizados

Imaz, C. (Coord). (1977). *Matemáticas. Primer grado. Libro del maestro* (6a ed.). México: Secretaría de Educación Pública-Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1960a). *Mi cuaderno de trabajo de primer año. Aritmética y Geometría y Estudio de la Naturaleza*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1960b). *Mi cuaderno de trabajo de tercer año. Aritmética y Geometría y Estudio de la Naturaleza*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1961). *Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Aritmética y Geometría*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1960c). *Mi libro de tercer año. Aritmética y Geometría y Estudio de la Naturaleza*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1960d). *Mi libro de cuarto año. Aritmética y Geometría*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1961a). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1970). *Mi libro de sexto año. Aritmética y Geometría*. Décima edición revisada,México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1968). *Mi Libro y Mi Cuaderno de Trabajo de Sexto Año. Instructivo para el Maestro*. Conaliteg

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1972a). *Libro del alumno. Matemáticas. Segundo Grado. México*: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1972b). *Libro del alumno. Matemáticas. Tercer Grado. México*: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1975). *Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto Grado*. México: Conaliteg

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1972c*). Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto Grado*. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria.* México: Fernández Editores.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2002a). *Matemáticas. Tercer grado*. Cuarta edición. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2002b). *Matemáticas. Cuarto grado*. Cuarta edición. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2002c). *Matemáticas. Quinto grado*. Cuarta edición. México: Conaliteg.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2001). *Matemáticas. Sexto grado*. Segunda edición. México: Conaliteg.

Alicia Avila

Domicilio postal: Guty Cárdenas 121-B, Colonia Guadalupe Inn,
C.P. 01020, Alcaldía Álvaro Obregón.
Ciudad de México

 DOI: 10.24844/EM3102.03

Cómo trabajar la orientación espacial de modo significativo en Educación Infantil: implicaciones didácticas

How to develop spatial orientation skill in a meaningful context in Early Childhood Education: didactical implications.

Clara Jiménez-Gestal[1]
Ainhoa Berciano[2]
María Salgado[3]

Resumen: En este trabajo presentamos una práctica docente distinta en Educación Infantil que favorece el desarrollo de la capacidad espacial temprana y, en especial, las habilidades relacionadas con tareas de orientación espacial. Para tal fin, se ha diseñado una secuencia de actividades basadas en la Enseñanza Matemática Realista que pueda ser implementada en el aula de Educación Infantil con niños y niñas de edades comprendidas entre los 3 y los 6 años. Además del diseño e implementación, se muestran las peculiaridades de implementación en cada curso y algunas producciones realizadas por los niños y niñas dependiendo de la edad y de su aprendizaje con el fin de ver los avances en cada caso.

Palabras clave: *Educación Infantil, orientación espacial, Enseñanza Matemática Realista, práctica docente*

Fecha de recepción: 26 de noviembre de 2018. **Fecha de aceptación:** 12 de febrero de 2019.

[1] Universidad de La Rioja, clara.jimenez@unirioja.es, orcid.org/0000-0003-1766-2855
[2] Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea, ainhoa.berciano@ehu.eus, orcid.org/0000-0001-7399-4745
[3] Universidad de Santiago de Compostela, maria.salgado@usc.es, orcid.org/0000-0002-0309-241X

Abstract: In this paper we present a different teaching practice in Early Childhood Education that favours the development of early spatial capacity and, especially, skills related to spatial orientation tasks. To this end, a sequence of activities based on Realistic Mathematical Education has been designed that can be implemented in Early Childhood Education classroom with children between the ages of 3 and 6. In addition to the design and implementation, we show the peculiarities of implementation in each course and some productions made by children depending on age and their learning in order to see the progress in each case.

Keywords: *Early Childhood Education, Spatial Orientation, Realistic Mathematical Education, Teaching Practice*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

A pesar de que es en la primera infancia donde se asientan los conocimientos matemáticos que se usarán en el futuro, el tratamiento de las matemáticas es en muchas ocasiones difuso y la adquisición de competencias es difícil de evaluar. En este sentido, como advierte Rico (1993), es muy raro que se enfrente a los niños a actividades creativas en las que sean evaluadas las competencias que se desarrollan para resolverlas y, aunque los niños poseen muchas capacidades matemáticas cuando se escolarizan, para la gran mayoría las matemáticas escolares son difíciles y confusas. Para colmo, algunos profesores afirman que se pierde mucho tiempo rellenando fichas, repitiendo mecanismos, y ejercitando destrezas. Sin embargo, como apuntan las directrices curriculares y tendencias metodológicas actuales (MEC, 2007), el pensamiento matemático no se aprende recibiendo información de forma pasiva o aprendiendo unas técnicas sino a través de un proceso activo y un deseo de hallar una respuesta a contextos y problemas reales.

Por este motivo, teniendo en cuenta que las niñas y los niños adquieren diversos conocimientos informales en su entorno vital, convendría entender cómo realizan el aprendizaje matemático y, en particular, el espacial.

Con el fin de ahondar en este objetivo, debemos destacar que las matemáticas en Educación Infantil, y en particular sus metodologías, han evolucionado en los últimos tiempos tratando de dar respuesta a preguntas candentes relacionadas con nuestro objetivo, pero que siguen sin tener una solución universal que facilite la enseñanza-aprendizaje.

Dentro del apartado referido a las metodologías de enseñanza-aprendizaje de la matemática cabe destacar la figura de Freudenthal, considerado el padre de la Matemática Realista. Alejándose de aprendizajes antiguos, memorísticos, abstractos, y en los cuales el profesorado se limita a dar sus lecciones y a corregir las pruebas escritas, la Matemática Realista propone buscar en una fase inicial contextos reales para una construcción significativa del aprendizaje matemático.

En concreto, se basa en la idea de que la matemática –si ha de tener valor humano- debe estar conectada con la realidad, mantenerse cercana a las niñas y los niños y ser relevante para la sociedad (Freudenthal, 1977). La idea que subyace a este enfoque es la afirmación de que aunque no todos los niños y niñas deban llegar a ser matemáticos o matemáticas en la edad adulta, sí todas las personas adultas deben usar las matemáticas para resolver los problemas de la vida cotidiana.

Recogiendo las exposiciones de Freudenthal, Alsina (2009) describe la EMR a partir de los siguientes principios:

1. De actividad: Las matemáticas concebidas como una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea.
2. De realidad: Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales o realistas.
3. De niveles: Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: situacional (en el contexto de la situación); referencial (esquematización a través de modelos, descripciones, etc.); general (exploración, reflexión y generalización); formal (procedimientos estándares y notación convencional).
4. De reinvención guiada: Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal a través de la mediación. El docente observa el proceso de aprendizaje para poder diseñar las experiencias en las que se reinventa la matemática.
5. De interacción: La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.

6. De interconexión: Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,...) están relacionados entre sí, no pueden ser tratados como entidades separadas.
   Los niños deben, pues, aprender matemáticas en contextos reales y cercanos que tengan para ellos sentido, a partir de los cuales desarrollar conceptos y aplicar reglas. Surge así la necesidad de la *matematización*: trasladar un problema de la vida cotidiana al mundo de las matemáticas, resolverlo, y volver a trasladarlo al mundo real, lo que familiariza al alumno con el mundo matemático.

Si volvemos a nuestro objetivo original, el de fomentar el aprendizaje matemático en edades tempranas y, en particular, la orientación espacial, en primer lugar debemos decir qué entendemos por ésta. En este sentido, Clements y Sarama (2009, p. 161) definen la orientación espacial:

> ...requiere entender y ser capaz de analizar y establecer las relaciones existentes entre distintas posiciones en el espacio; en primer lugar, con respecto a la posición de uno mismo y con respecto al movimiento, para, finalmente, ser capaz de trabajar desde perspectivas más abstractas que incluyen el tratamiento de mapas y uso de coordenadas con distintas escalas.

Aun así, es cierto que la capacidad relacionada con la orientación espacial es muy ambiciosa y debemos nuevamente focalizar nuestra atención en el aula de infantil. En este caso, el NCTM (2000, p.100), en la etapa Pre K-2, describe que "localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación" debe capacitar al infante para que sea capaz de:

1. Describir, dar nombre e interpretar posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa (c1);
2. Describir, dar nombre e interpretar la dirección y la distancia en los desplazamientos en el espacio y aplicar estas nociones (c2);
3. Encontrar y denominar "lugares" con relaciones simples como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como mapas (c3).
   Igualmente, dentro del apartado "utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas", destacamos:
4. Reconocer formas y estructuras geométricas en el entorno, y determinar su situación (c4).

Si bien, en Gonzato, Fernández Blanco y Díaz Godino (2011) se analizan tareas presentadas en diversas investigaciones sobre visualización y orientación espacial, se puede apreciar que la mayor parte de las mismas no hacen diferenciación por edades y se enfocan al currículo de educación primaria.

Es por ello que, si queremos analizar el dilema de la orientación espacial en edades tempranas, debemos destacar el trabajo de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017) en el que analizan de modo cualitativo el tipo de representación simbólica que son capaces de realizar las niñas y niños de 5 años cuando se les plantea una actividad de orientación espacial en contexto, basada en la Enseñanza Matemática Realista. En concreto, concluyen que todos los niños y niñas participantes en la actividad entienden el concepto de 3-dimensionalidad y los cambios producidos en el eje vertical, lo que les lleva a usar diversos símbolos en sus representaciones y que, además, la complejidad de los símbolos depende de su capacidad espacial.

Dado que el currículo de educación infantil no diferencia por edad entre los 3 y los 6 años y vistos los resultados obtenidos con niñas y niños del último curso de Educación Infantil, se quería indagar por la idoneidad de la práctica docente en edades más tempranas, al igual que los posibles resultados y representaciones que son capaces de realizar los niños y niñas. Con esto se pretende, acorde a NCTM y directrices internacionales, trabajar del modo más adecuado, en contexto, la capacidad de orientación a lo largo de todo el ciclo.

OBJETIVO

El objetivo de la investigación es describir las características principales de una secuencia didáctica diseñada específicamente para trabajar la orientación espacial en el segundo ciclo de educación infantil. Para tal fin, distinguiremos los contenidos que se pueden tratar según la edad, describiremos las diferentes producciones realizadas por niñas y niños de distintas edades y detallaremos las ventajas y dificultades docentes asociadas a la implementación.

DISEÑO TEÓRICO

El diseño de la actividad, en su estructura secuencial de actividades, es el mismo que aparece descrito en Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado-Somoza (2016) y que resumimos a continuación: *a los niños y niñas de las tres aulas con edades comprendidas entre los 3 y los 6 años se les plantea como contexto motivador que deben "encontrar el tesoro perdido y escondido en el Colegio"*.

Tal como se describe en Berciano *et al.* (2016), la actividad realizada en 5 años fue un éxito, por lo que en este artículo nos planteamos transferir dicha actividad, manteniendo su contexto, al aula de 3 y 4 años, y revisar las dificultades y ventajas que esta trasferencia puede suponer. Para ello, la actividad debe ser readaptada a cada curso, por lo que se debe garantizar que la matematización asociada sea la adecuada a la edad correspondiente (ver tabla 1).

FASES DE LA EXPERIMENTACIÓN

La experimentación en todas las edades ha constado de 3 fases perfectamente delimitadas y diferenciadas desde el punto de vista teórico:

1. Trabajo previo en el aula: se trabajan las ideas previas relativas a los piratas, su modo de vida, los mapas, representaciones gráficas, etc. En esta fase, se realizan preguntas abiertas para que todas/os puedan participar. Se consensuan algunas ideas al igual que la búsqueda del tesoro, definiendo estrategias de búsqueda y tipos de agrupaciones.
2. Trabajo en contexto: se lleva a cabo la búsqueda del tesoro (consistente en una bolsa de monedas de chocolate) en pequeños grupos.
3. Trabajo posterior en el aula: se lleva a cabo una representación verbal y una representación simbólica a través de los dibujos. Individualmente deben hacer un plano del recorrido realizado y describir verbalmente su recorrido, el significado de los símbolos usados en el mismo, etc.

   Con el tesoro, en cada grupo de estudiantes, atendiendo a la dificultad según la edad, tendrán que clasificar, ordenar, cuantificar y registrar el "dinero" que han encontrado.

CONTENIDOS ESPECÍFICOS A CADA EDAD

Matematización asociada a todas las edades del ciclo de educación infantil:

1. Contenidos c1, c2, c3, c4 (detallados en el apartado de estándares de contenidos de la NCTM).
2. Competencia comunicativa.
3. Números y cantidad.
4. Formas geométricas y sus propiedades.
5. Clasificación y reconocimiento de significados de pictogramas como acciones cotidianas.

Para poder adaptar a cada curso la actividad, la maestra ha hecho una reflexión previa acerca de los contenidos que se pueden trabajar en cada edad y mediante conversaciones con las niñas y niños de cada clase ha trabajado los contenidos que aparecen descritos a continuación.

Tabla 1. Contenidos que se trabajan en cada edad

Contenidos/Edad	Edad 3 años	Edad 4 años	Edad 5 años
Posiciones relativas (c1)	Arriba/abajo; dentro/ fuera	A un lado/ al otro	Izquierda/ derecha; en frente de
Dirección y distancia (c2)	Hacia delante/ hacia atrás; cerca/lejos	Más cerca que/ más lejos que	Estimación de distancias: pasos
Sistemas de coordenadas (c3)	Ubicación del punto de interés como punto absoluto en el mapa	Aparición de elementos de referencia singulares	Representación de puntos de referencia locales
Formas y situación (c4)	Formas planas	Formas planas irregulares	Cuerpos geométricos notables
Competencia comunicativa	X	X	X
Números y cantidad	Muchos/pocos	Identificación de cardinales	Cardinales y ordinales
Formas geométricas	Objetos 2D	Objetos 2D	Objetos 2D y 3D
Pictogramas	X	X	X

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La experimentación tiene lugar a lo largo de dos días, el primer día dos sesiones, y el segundo una sesión aproximadamente, con la siguiente secuenciación de tiempos dependiendo de la edad:

Tabla 2. Secuenciación de la actividad en cada edad

Fases/Edad	Edad 3 años	Edad 4 años	Edad 5 años
Narración contexto	½ hora	½ hora	½ hora
Asamblea	10-15 min	10-20 min	20-30 min
Búsqueda del tesoro en pequeños grupos	10 min/grupo	8 min/grupo	5 min/grupo
Representación del plano y puesta en común	20-30 min	40 min	50 minutos
Trabajo con monedas	40 min	50 min	50 min

RESULTADOS

A modo de ejemplo mostramos algunas de las fotografías de la implementación en 3 años (por cuestiones de privacidad, algunas de ellas aparecen borrosas).

En la primera fase, se realiza la lectura del cuento y posterior debate en asamblea, para pasar a la indagación de las “señales” que ayuden a encontrar el tesoro dando paso a una posterior búsqueda activa (figura 1).

Figura 1. Comienzo de la actividad (lectura de cuento y búsqueda de pictogramas)

En la figura 2 vemos imágenes que hacen alusión a la búsqueda activa y al tesoro en sí (dependiendo del caso, pan de molde o monedas de chocolate, entre otros).

Figura 2. Búsqueda del tesoro de modo activo

Finalmente, se pasa a la fase de formalización matemática, tanto a través de representación simbólica como de la comunicación oral (figura 3).

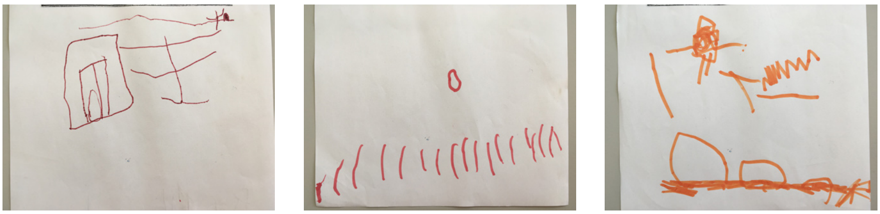
Figura 3. Trabajo posterior en clase con las representaciones

Algunas imágenes de la implementación en 5 años se pueden ver en Berciano *et al.* (2016).

DESCRIPCIÓN DE ALGUNAS DE LAS PRODUCCIONES POR EDADES

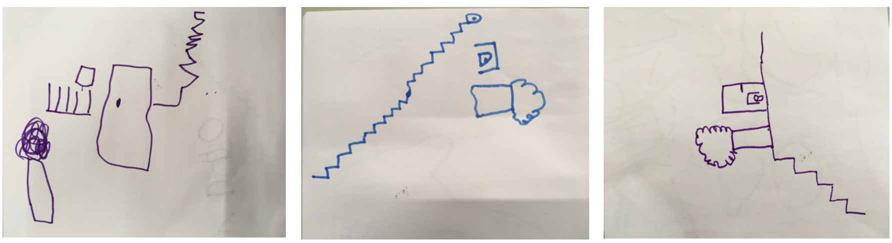
En 3 años, a pesar de que aparecen diferentes representaciones, en todas ellas adquiere relevancia el tesoro como punto clave en el plano. Dependiendo del nivel cognitivo y los intereses mostrados a lo largo del itinerario el plano realizado muestra otros elementos con mayor o menor detalle.

Figura 4. Planos de recorridos, 3 años.



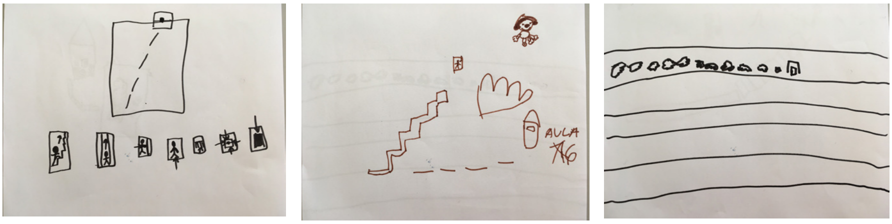
A los 4 años se aprecia una mayor concreción en aspectos relacionados con la capacidad de orientación. En concreto, el tesoro tiene una importancia relevante dentro de los dibujos pero comienzan a aparecer otros puntos de referencia singulares, (puerta, escaleras, árbol, ...) con un nivel de detalle diferente según el niño o la niña que lo realiza.

Figura 5. Planos de recorridos, 4 años.



En las producciones de 5 años se observa como el tesoro no es el elemento protagonista de la representación, y los elementos singulares aparecen ordenados manteniendo una relación de orden que se corresponde con su localización real.

Figura 6. Planos de recorridos, 5 años.



En definitiva, vemos que en edades 3 y 4 años la historia, la intriga, el contexto se antepone a la vivenciación del desarrollo de la búsqueda, por lo que parte del recorrido es omitido en sus representaciones y sólo se fijan en algunos puntos o elementos. En este sentido, algunos niños o niñas de 3 años se quedan sólo con el elemento final, mientras que en 4 años ya aparecen más partes del recorrido. Por el contrario, el alumnado de 5 años vive cada uno de los elementos del recorrido de la búsqueda del tesoro, y así queda registrado en sus planos, con detalles, simbología, …

DESCRIPCIÓN DE LAS DIFICULTADES DESDE EL PUNTO DE VISTA DOCENTE

En este apartado queremos mostrar algunos de los aspectos más complicados de la experimentación docente llevada a cabo, con el fin de analizar su transferibilidad a otras escuelas.

Una de las complicaciones que tiene el realizar este tipo de actividad es que la planificación previa no garantiza que se puedan anticipar los resultados. Éstos, muchas veces, son impredecibles y esta incertidumbre aumenta cuanto más pequeños sean los niños. Se sabe de antemano que ante un rastreo, una salida del aula, u otras actividades fuera de la rutina, el alumnado es receptivo, pero el grado de implicación y si van o no a comprender los mensajes, encontrar o no el tesoro,… esto no se sabe hasta la experimentación.

Para el caso del alumnado de menor edad, esta actividad incrementa su dificultad en el sentido de que, al ser una actividad grupal y debido a las características de su edad, los niños y las niñas no suelen desarrollar la actividad del modo esperado a priori. Siempre hay alumnos que toman la iniciativa y que tiran del grupo y otros que se dejan guiar, añadiendo un punto de complejidad a la hora de fomentar la participación de todos y todas. Sin embargo, a medida que aumenta la edad, se observa que las ideas se hablan y se llega a acuerdos de itinerarios que seguir, decisiones que tomar, etc.

Los resultados, en general, son muy difíciles de cuantificar y de calificar. La ausencia de producciones y registro de todas las decisiones tomadas para llegar al fin produce un vacío en la evaluación del proceso. Por otro lado, la observación de las producciones finales muestran algunos niveles de aprendizaje de los niños y las niñas, pero no recogen todo lo deseado. Esto se da sobre todo en 3 y 4 años donde la destreza asociada a la motricidad todavía no está muy desarrollada y un análisis de sus producciones refleja la omisión de muchos datos, aunque algunos de ellos no sean debidos al desconocimiento.

El trabajo en equipo en edades tempranas es difícil, por lo que hay tener en cuenta la conformación de los grupos de búsqueda de tesoro. Para que los equipos funcionen, resulta idóneo establecer roles de tal modo que se repartan obligaciones para el logro de un mismo objetivo.

Las conexiones: surge la dificultad para el docente de conectar la actividad con otras áreas (literatura y música) y en la misma área (orientación espacial, números, medida, cuantificadores, ...), para buscar la mayor realidad y significatividad de la misma.

Los tiempos: el tiempo de ejecución de la búsqueda no se puede anticipar con exactitud. Hay que estimar tiempos abiertos, de modo que cada grupo pueda explorar, observando, sin presiones... Hay que tener en cuenta que cuanto más corta es la edad, más tiempo se consume en la ejecución y en la toma de decisiones, por lo que hay que medir muy bien los tiempos.

Esta implementación se ha hecho en todo momento con dos docentes; para no solaparse la ejecución de la búsqueda de los grupos debe haber al menos dos docentes, una persona para acompañar, sin intervenir, al grupo que está realizando la actividad y otra que se quede en el aula con el resto del grupo-aula.

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos en esta práctica ponen de manifiesto el potencial de esta actividad, tanto a nivel metodológico como para el desarrollo cognitivo del alumnado. La metodología utilizada en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje invita al alumnado a opinar, interactuar, comprobar y registrar y comunicar sus conclusiones con un lenguaje matemático lo más preciso posible (acorde con los principios de la EMR; Freudenthal, 1977).

La interacción con el espacio contextualiza un problema y lo hace real, lo que permite un aprendizaje significativo, con sentido y servicial para otras situaciones. En este sentido, la representación escrita cobra una especial importancia, debido a que los dibujos, trazos y registros de sus producciones están de acuerdo a la etapa evolutiva del niño o niña (acorde con Berciano *et al.*, 2017). Sin embargo, también debemos saber que en ocasiones no consigue plasmar todas las ideas que éste o ésta verbaliza. A los 3 años hay más dificultad para recoger sus ideas a través del dibujo y trazos que con 5 años; de ahí la importancia de preguntar al niño o niña que explique sus producciones, para que pueda manifestar sus creencias e ideas al resto del grupo aula y profesorado.

El aprendizaje entre iguales respeta los ritmos individuales de desarrollo de los niños y niñas, y las aportaciones y discusiones crean pequeños conflictos que permiten avanzar en la construcción del conocimiento, y en particular de los planos y sus representaciones. Además, esta interacción entre iguales conlleva a una responsabilidad grupal, a formar parte de un todo, en el que el niño o la niña se apoya en el grupo, y no recae en él o ella toda la presión de la resolución con éxito de la actividad.

Por último, nos gustaría señalar que la información extraída de esta práctica puede ayudar a docentes a tomar decisiones mejores y más justificadas para el tratamiento de la orientación espacial en el aula de infantil, siempre y cuando el diseño de actividades cumplan las características que aquí destacamos: 1) a través de la búsqueda del tesoro se desarrollan de forma práctica y didáctica conceptos matemáticos abstractos que resultan confusos en edades tempranas; 2) la transversalidad que tiene esta actividad permite un alto nivel de contenidos diversos (educación para la paz, resolución de conflictos, respeto de las producciones,...); 3) la vivenciación provoca entusiasmo e interés por la realización de la actividad y los objetivos a lograr; 4) el ritmo individual de aprendizaje es respetado, debido a que conviven diferentes ritmos de madurez, en un entorno en el que todos tienen cabida y algo que aportar. Nadie se siente rechazado; 5) la evaluación individualiza a través del registro final individual del proceso de la actividad aporta una herramienta al profesorado para poder hacer juicios individuales de cada niño o niña con respecto a su capacidad de orientación.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. & Salgado-Somoza, M. (2016). Tratamiento de la Orientación en el Aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, *93*, 31-43.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Kindergartners' Use of Symbols in the Semiotic Representation of 3-Dimensional Changes. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *11*(4), 311-331.

Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach*. New York: Taylor & Francis.

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door prof. dr h. freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat. (Respuesta del Prof. Dr H. Freudenthal al serle otorgado un doctorado honorario). *Euclides*, *52*, 336-338.

Gonzato, M., Fernández Blanco, T. y Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 99-117

MEC (2007). *ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil.* BOE.

NTCM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Rico, L. (1993). Mathematics assessment in the Spanish educational system. En M. Niss, *Cases of Assessment in Mathematics Education* (pp. 9-20). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CLARA JIMÉNEZ-GESTAL

Domicilio: Dpto. Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
Complejo Científico y Tecnológico
Madre de Dios 53
26006 Logroño, España

Teléfono: +34 941 299 461

DOI: 10.24844/EM3102.04

Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos

Semantic structures of additive problems of verbal statement in Mexican textbooks

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto[1]
Catalina Navarro Sandoval[2]
Angela Nolfa Castro Inostroza[3]
María del Socorro García González[4]

Resumen: El objetivo de esta investigación es caracterizar los problemas aditivos de enunciado verbal presentes en los libros de texto del segundo periodo escolar de Educación básica en México (primer, segundo y tercer grados) con base en su estructura semántica. Bajo un enfoque cualitativo, se realizó un análisis de contenido documental, en el que se establecieron unidades y categorías de análisis. Los resultados sugieren que los libros de texto analizados presentan en su mayoría, problemas con estructuras sencillas de resolver como las de cambio y combinación, y pocos problemas con estructuras complejas como las de comparación e igualación. Identificando además algunas estructuras semánticas compuestas, éstas últimas representan mayor desafío para la resolución de problemas.

Fecha de recepción: 18 de enero de 2019. **Fecha de aceptación:** 23 de mayo de 2019.

[1] Estudiante del Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa CIMATE, Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. camilorodriguez274@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9922-4079

[2] Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Profesora titular CIMATE, Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. nasacamx@yahoo.com.mx, orcid.org/0000-0001-5214-0062

[3] Doctora en Educación en el ámbito de Didáctica de la Matemática por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Docente Centro de Docencia Superior en Ciencias Básicas, Universidad Austral de Chile (UACh), Sede Puerto Montt, Chile. angela.castro@uach.cl, orcid.org/0000-0002-1732-6520

[4] Doctora en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Profesora titular CIMATE, Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. mgargonza@gmail.com, orcid.org/0000-0001-7088-1075

Palabras clave: *problemas aditivos, estructura semántica, libro de texto.*

Abstract: The research aim is to characterize the additive problems of verbal statement in the textbooks of the second period of basic education in Mexico (first, second and third grades) according to their semantic structure. From the qualitative approach, an analysis of documentary content was carried out, in which units and categories of analysis were established. The results suggest that the analyzed textbooks mostly present problems with simple structures to solve such as change and combination, and just a few of them with complex structures such as comparison and equalization. Also identifying some composite semantic structures, that represent a challenge in problem solving.

Keywords: *additive problems, semantic structure, textbook.*

1. INTRODUCCIÓN

Con el propósito de formar estudiantes matemáticamente competentes, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la resolución de problemas se ha considerado como una actividad de primer orden y eje central para el desarrollo de contenidos matemáticos (NTCM, 2000; García, 2011; CCSSI, 2018). La resolución de problemas es una competencia que los estudiantes deben desarrollar de manera autónoma, con la intención que éstos identifiquen, planteen y resuelvan una variedad de problemas o situaciones cotidianas en las que se consideren diversos tipos de soluciones, o en las que deban identificar cuando sobran o faltan datos en el enunciado del problema (SEP, 2011a). Sin embargo, pruebas estandarizadas como PISA, evidencian que más de la mitad de los estudiantes que rinden esta evaluación, en matemáticas no alcanzan el nivel básico de competencias (nivel 2)[5] (OCDE, 2016). A nivel nacional, la prueba PLANEA[6] reportó que en el puntaje nacional de aciertos los estudiantes alcanzaron un

[5] Realizar procedimientos rutinarios, ejercicios, tales como operaciones aritméticas en situaciones en donde todas las instrucciones se les son dadas, pero tienen problemas identificando cómo una situación del mundo real puede ser representada matemáticamente (OCDE, 2016).

[6] PLANEA (Plan Nacional de Evaluación de los Aprendizajes). La cual "evalúa los aprendizajes clave que los alumnos de cuarto grado de Educación primaria han alcanzado durante su trayecto escolar en Español y Matemáticas" (INEE, 2016, p.5).

nivel bajo en la resolución de problemas aditivos, cuando éstos no tienen la incógnita en la cantidad final (INEE,[7] 2016).

En particular, la resolución de problemas aditivos ha sido estudiada a partir de su estructura semántica y la componente sintáctica, distinguiendo tipos de problemas cuando se enfatiza en las relaciones entre los elementos de un enunciado y los significados de las palabras (Van Dijk y Kintsch, 1983; Riley y Greeno, 1988). Asimismo, la resolución de problemas se ha desarrollado a partir de estrategias y procesos heurísticos, como, por ejemplo, comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y la visión retrospectiva (Pólya, 1989), lo que ha permitido el surgimiento de las estrategias cognitivas para resolver problemas (Schoenfeld, 1985). Considerando el grado de dificultad (cantidad de información y relaciones entre los datos), existen otras formas de resolver problemas aritméticos, Verschaffel, Greer y De Corte (2000) propusieron dos modos de resolución: el genuino, utilizado para resolver problemas considerados difíciles desde un contexto situacional, y el superficial usado para resolver problemas más fáciles.

Desde la literatura, algunas investigaciones ponen de manifiesto que los estudiantes al resolver problemas aditivos utilizan estrategias superficiales como, por ejemplo, el paso directo de la información contenida en el problema a una operación para obtener la solución sin comprender el enunciado (Verschaffel y De Corte, 1993; Blanco, Caballero y Cárdenas, 2014; Chamoso, Vicente, Manchado y Múñez, 2014; Ortíz, 2014), malinterpretan el enunciado del problema (Orrantia, González y Vicente, 2005; Polotskaia, Savard y Freiman, 2016), escasa comprensión del problema (García-García, Navarro y Rodríguez-Vásquez, 2014), y eligen una operación diferente a la adecuada para la resolución del problema (Butto y Martínez, 2012).

El uso de estrategias superficiales, en muchos casos es promovido por los maestros y los materiales curriculares. En muchas ocasiones, los profesores de matemáticas utilizan palabras clave en el discurso para enseñar a sus estudiantes a resolver un problema (García-García, 2014), proponen problemas aditivos verbales obviando las clasificaciones según la estructura semántica, utilizando estructuras sencillas de resolver (Castro, Gorgorió y Prat, 2014), y regularmente al revisar resultados no se atienden los procedimientos realizados por los estudiantes (Polotskaia *et al.*, 2016). Se podría pensar, que dado que los materiales curriculares como el libro de texto, han desempeñado un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estas prácticas son

[7] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

influenciadas, de algún modo, por los contenidos y el tipo de problemas presentes en libros de texto escolares de matemáticas, en los que en muchas ocasiones, se proponen problemas poco desafiantes y cuyo enunciado presenta poca variedad en el lugar de la incógnita (Orrantia *et al.*, 2005; Chamoso *et al.*, 2014; Ortíz, 2014; Sánchez y Vicente, 2015).

El libro de texto se ha considerado una herramienta importante para la planificación de clases por parte de los profesores (Azcárate y Serradó, 2006; Pepin, Gueudet y Trouche, 2013; Aké y Godino, 2018). No obstante, es importante el uso que se le dé al libro de texto, pues de éste dependerá la influencia favorable o desfavorable durante la enseñanza de cualquier contenido. En algunos casos los libros de texto presentan errores en los contenidos, lo que podría causar inconsistencias durante el proceso de razonamiento y aprendizaje de estudiantes y en la enseñanza por parte de los profesores (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992). De ahí la importancia de realizar investigaciones centradas en el análisis de libros de texto escolares, para evaluar su pertinencia y adecuación de sus contenidos (Font y Godino, 2006).

En esta línea, diferentes investigaciones han estudiado los problemas aditivos de enunciado verbal desde su estructura semántica y sintáctica. Dichos estudios han reportado diferentes tipos de problemas aditivos según su estructura (Heller y Greeno, 1978; Bermejo y Rodríguez, 1987; Orrantia *et al.*, 2005; Chamoso *et al.*, 2014; Ortiz, 2014), han enfatizado sobre el grado de dificultad que involucra este tipo de problemas (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981) y los niveles de conocimiento aritmético asociados a un determinado tipo de problema aditivo (Nesher, Greeno y Riley, 1982; Nesher, 1999).

En el contexto de la reforma 2011 en México, el plan y programas de estudios de la Educación básica señalan que los estudiantes al culminar el segundo periodo escolar (1º-3º) saben resolver problemas aditivos con diferente estructura, desarrollar formas de pensar, utilizar diferentes técnicas o recursos y procedimientos eficientes para la resolución de problemas (SEP, 2011a). A nivel nacional, en México se realizó una clasificación de problemas aditivos de libros de correspondientes a las reformas de los 60, 70 y 90, encontrándose problemas de dos etapas y en su mayoría se proponían problemas con estructuras de cambio y combinación (Aguillón y Resendiz, 2012).

En este sentido, tras el paso de varias reformas educativas, se pretende saber qué tipo de problemas emplearían los profesores en las clases de matemáticas para desarrollar una competencia de resolución de problemas en los estudiantes, para ello es necesario analizar los libros de texto de la reforma actual para identificar la promoción de los problemas aditivos que involucran las diferentes estructuras semánticas. Por lo tanto, en este estudio se propuso caracterizar las estructuras semánticas y componente sintáctica de los problemas aditivos de enunciado verbal en los libros de texto desafíos matemáticos del segundo periodo escolar de la educación básica en México.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1. Problemas aditivos de enunciado verbal

Un problema es toda situación desafiante o retadora en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. La vía de solución es desconocida o no tiene un camino de solución inmediato y la persona quiere realmente realizar la transformación (Rizo y Campistrous, 1999). Si éstas dos últimas condiciones no se dan, la situación no constituye un problema para la persona.

En la mayoría de los currículos educativos, la resolución de problemas se presenta como una competencia basada en que el individuo resuelva de manera autónoma, tareas matemáticas desafiantes (SEP, 2011b; CCSSI, 2018). La resolución de problemas no sólo se centra en situaciones de la vida cotidiana, sino que se preocupa por aquellas situaciones que no resulten familiares, que tengan un alto grado de dificultad, donde el individuo manifieste sus habilidades cognitivas (Echenique, 2006).

Existen distintos tipos de problemas matemáticos, entre los que se encuentran los aritméticos, que:

> En su enunciado presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones, y que necesitan la realización de operaciones aritméticas para su resolución (Echenique, 2006, p.30).

Los problemas aritméticos pueden ser: aditivos, multiplicativos, entre otros. Asimismo, estos problemas se pueden presentar de diversas formas, por ejemplo, verbal, numérica y gráfica (Bonilla, Sánchez y Guerrero, 1999).

En este estudio son de interés los *problemas aditivos* (aditivo-sustractivos), los cuales se caracterizan por requerir en su resolución una o varias adiciones y/o sustracciones (Vergnaud, 1991; Echenique, 2006). También, este tipo de problemas poseen relaciones formadas por adiciones o sustracciones, a lo que se le conoce como estructuras aditivas (Castro, Rico y Castro, 1995; Bonilla *et al.*, 1999). Cañadas y Castro (2011) mencionan que los problemas de una etapa o simples son aquellos que se resuelven mediante una única operación aritmética, ya sea una adición o una sustracción. Los problemas simples se constituyen de una estructura simple. Mientras que los problemas de más de una etapa o de n etapas, son los que necesitan n operaciones para llegar a su solución. Así, los problemas aditivos de una etapa requieren de una sola suma o resta para su resolución y los de n etapas implican n sumas y/o restas.

Los problemas aditivos verbales se estudiaron desde las relaciones aditivas ternarias, utilizándose seis categorías con sus esquemas[8] basados en relacionar y operar con medidas (Durand y Vergnaud, 1976; Vergnaud, 1991). También, los problemas aditivos de enunciado verbal se clasifican con base en la estructura semántica, es decir, las relaciones entre los elementos que aparecen en el enunciado de la situación problema (Van Dijk y Kintsch, 1983; Orrantia, 2003; Orrantia *et al.*, 2005; Castro *et al.*, 2014). Cabe mencionar que, la semántica desde una perspectiva léxica, estudia el significado de las palabras, así como las diversas relaciones de sentido que se establecen entre ellas (Real Academia Española, 2014).

2.2. Clasificación de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) aditivos (PAEV aditivos)

La clasificación de los PAEV aditivos se realizó con base en los trabajos de Heller y Greeno (1978), Orrantia et al. (2005) y Cañadas y Castro (2011), a partir de su estructura semántica y la componente sintáctica en cuatro tipos de problemas: cambio, combinación, comparación e igualación.

En la *estructura de cambio* se distinguen tres elementos diferentes, una cantidad inicial sometida a una transformación (cambio) que la modifica para llegar a una cantidad final. El efecto del cambio puede ser un aumento o una disminución. En la *estructura de combinación* se consideran dos cantidades que forman parte de un todo que las incluye en su totalidad. Lo desconocido puede ser el conjunto o cantidad total o uno de los subconjuntos. La *estructura*

[8] Un esquema en el sentido de Orrantia *et al.* (2005) es una representación gráfica del problema que permite operar con las relaciones semánticas implícitas en el enunciado.

de comparación parte de dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación, en este tipo de problemas se relacionan tres cantidades, el referente (R), el comparado (C) y la diferencia (D). La relación de comparación está dada por palabras que están presentes en el enunciado del problema, como, por ejemplo, *más que* y *menos que* (Riley, Greeno y Heller, 1983; Castro, Rico y Castro, 1995; Orrantia *et al*., 2005; Cañadas y Castro, 2011).

A esta clasificación se le agrega una cuarta categoría, correspondiente a la estructura semántica de igualación, identificada como aquella que restringe lo desconocido a la diferencia entre: cantidad dada y la cantidad deseada. Esta estructura se compone de tres cantidades, igualación, comparado y referente. Dichos problemas en el enunciado exponen una acción física necesaria para que una cantidad sea igual a otra (Cañadas y Castro, 2011). Otros investigadores como Castro et al. (1995), Echenique (2006) y Orrantia (2006) mencionan que, los problemas de igualación se originaron a partir de una relación entre los problemas de cambio y comparación, donde se produce una acción al comparar dos cantidades y luego un cambio de aumento o disminución respecto de una cantidad. Cabe resaltar que, los problemas de cambio e igualación se consideran dinámicos y los problemas de combinación y comparación son estáticos.

La clasificación de los problemas aditivos se extiende a veinte tipos (ver Tabla 1), cuando se hace referencia a la componente sintáctica, entendida como el orden y las relaciones entre los datos, palabras, símbolos y el lugar que ocupa la incógnita (cantidad desconocida) en el enunciado del problema (Puig y Cerdán, 1988).

Además, según el grado de dificultad los PAEV aditivos, se pueden clasificar en consistentes e inconsistentes. Los consistentes hacen referencia a los problemas que se solucionan por medio de una estrategia de traducción directa o modelado directo, es decir, los términos del enunciado o palabra clave, por ejemplo, "ganar" o "más que", coinciden con la operación a realizar, en este caso la adición (Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Orrantia *et al*., 2005). Los inconsistentes presentan un mayor grado de dificultad, no pueden solucionarse por medio de modelado directo, es decir, los términos o palabras clave entran en conflicto con la operación a realizar, por ejemplo, "ganar" o "más que" y se requiere de una sustracción (Hegarty *et al*., 1995; Orrantia *et al*., 2005).

Tabla 1. Componente sintáctica basada en el orden y lugar de la incógnita en el enunciado del PAEV aditivo.

Estructura semántica	Descripción de la componente sintáctica	
Cambio	Aumento	Incógnita en la cantidad final.
		Incógnita en la cantidad de cambio.
		Incógnita en la cantidad inicial.
	Disminución	Incógnita en la cantidad final.
		Incógnita en la cantidad de cambio.
		Incógnita en la cantidad inicial.
Combinación	Incógnita en la cantidad total	
	Incógnita en una de las partes que conforman el todo.	
Comparación	Aumento	Incógnita en la diferencia.
		Incógnita en el comparado.
		Incógnita en el referente.
	Disminución	Incógnita en la diferencia.
		Incógnita en el comparado.
		Incógnita en el referente.
Igualación	Aumento	Incógnita en la igualación.
		Incógnita en el comparado.
		Incógnita en el referente.
	Disminución	Incógnita en la igualación.
		Incógnita en el comparado.
		Incógnita en el referente.

Nota. Información adaptada de Carpenter *et al.* (1981), Puig y Cerdán (1988), Orrantia *et al.* (2005) y Cañadas y Castro (2011).

Los problemas que presentan mayor dificultad se constituyen de estructuras complejas asociadas a los problemas inconsistentes identificándose esquemas parte-parte-todo donde se relacionan tres componentes que aparecen en el enunciado del problema mediante sumas o restas usando la reversibilidad para comparar y establecer igualdades y desigualdades (Nesher, 1999; Castro, 2013;

Orrantia *et al.*, 2005). En este sentido, para resolver un problema con estructuras complejas se requiere el uso de estrategias para comprender el enunciado y trasladar adecuadamente la información escrita a una representación abstracta o a un esquema donde se tengan en cuenta las relaciones semánticas accediendo al conocimiento conceptual (Riley *et al.*, 1983; Orrantia *et al.*, 2005).

Las estructuras semánticas compuestas dependen de las estructuras simples y el número de etapas requeridas para la resolución de un problema. En este sentido, por cada operación que se utilice, va de manera implícita una estructura semántica simple (cambio, combinación, comparación e igualación) y sus respectivas tipologías según la componente sintáctica.

3. METODOLOGÍA

La investigación adoptó una metodología de tipo cualitativa descriptiva, mediante el análisis de contenido de acuerdo con López-Noguero (2002) quien señala que éste es un proceso descriptivo para organizar y analizar documentos, entre los que se destacan los textos científicos, artículos, libros, planes de estudios, leyes, fotografías, entre otros. Para llevar a cabo un análisis documental es importante que desde el principio el investigador revise y conozca la documentación referente al problema que se está desarrollando. Puesto que el interés del trabajo es caracterizar y describir la tipología de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto.

Este trabajo se llevó a cabo en tres fases, en la primera se realizó una revisión de planes y programas de estudio (SEP, 2011a, 2011b) y libros de texto (SEP, 2016a, 2016b, 2016c), propuestos por la Secretaría de Educación Pública, con el propósito de identificar donde se inicia la resolución de problemas aditivos en el nivel básico. Como resultado de la fase anterior, en una segunda fase se seleccionaron tres libros de texto correspondientes al segundo periodo escolar y en la tercera fase se realizó la caracterización de los PAEV aditivos, por medio de un análisis de contenido documental.

3.1. Revisión de los planes y programas de estudios

La revisión de los planes y programas de estudio, permitió identificar la promoción de los problemas aditivos de enunciado verbal en la educación básica. En este sentido, se tuvieron en cuenta los ejes temáticos, el tema de problemas aditivos y la afirmación de los programas de estudio que al culminar el segundo periodo escolar los estudiantes saben resolver problemas aditivos con diferentes estructuras (SEP, 2011a). Por tanto, el estudio se centró, además, en revisar los libros de texto de educación primaria para conocer si la tipología de problemas mantenía una diversidad de estructuras.

A partir de ello, se identificaron tipos de problemas aditivos que se presentan en los libros de texto, diferenciando entre problemas aditivos verbales, numéricos, gráficos desde la perspectiva de Bonilla et al. (1999), así como aquellos que se constituyen de más de dos tipos, por ejemplo, numérico-gráfico. Este primer análisis nos permitió observar que, los problemas aditivos de tipo numérico son los que se presentan con mayor frecuencia en los libros de texto analizados. Respecto de los problemas aditivos verbales se identificaron en el primer grado veintitrés, en segundo grado veintinueve y en tercer grado dieciocho, en este último libro se presentan además problemas de enunciado verbal con estructuras multiplicativas. En este estudio, se consideraron solamente problemas verbales y de éstos se obtuvieron los PAEV aditivos, pues la literatura dejó entrever que las dificultades de estudiantes y profesores se centran en el escaso dominio conceptual de los problemas antes mencionados.

3.2. Selección y descripción de los libros de texto

La selección de los libros de texto, se dio a partir de la revisión de los planes y programas de estudio y los textos escolares de educación primaria en México. Al identificar en el plan de estudios que al culminar el segundo periodo escolar los estudiantes deberían resolver problemas aditivos con diferentes estructuras, nos tomamos la tarea de seleccionar y analizar los textos correspondientes al primero, segundo y tercer grado. Estos libros son materiales gratuitos y únicos elaborados por la Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos (CONALITEG) correspondientes a la tercera reimpresión del año 2016 (ciclo escolar 2017-2018), los cuales son ofrecidos por la SEP en sus versiones para el estudiante y para el profesor usados por escuelas públicas y privadas de México.

Los libros de texto "*desafíos matemáticos*" poseen consignas que contienen actividades donde el estudiante debe buscar estrategias que le ayudan a ganar, crear espacios de interacción con sus compañeros para vencer los desafíos, y conseguir estrategias para solucionar problemas. Asimismo, este material curricular está apegado al programa oficial y cubre todos sus contenidos, tiene un formato ágil y desafíos que apoyan a la labor diaria del docente, para que éste los analice previamente a su puesta en práctica en el aula (SEP, 2016a; 2016b; 2016c, p.7).

Los libros de texto de primero, segundo y tercer grados están constituidos por bloques, que contienen a los desafíos y, éstos a las consignas donde se presentan actividades que contienen problemas matemáticos, así como las instrucciones o la forma de organizar las actividades (SEP, 2016a; 2016b; 2016c). En los bloques se incluyen contenidos de los tres ejes temático: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida y manejo de la información, con la intención de estudiarlos simultáneamente para con ello tener una visión global de las matemáticas (SEP, 2011a). Cabe señalar que, en cada bloque se presentan los aprendizajes esperados de los diferentes ejes temáticos, los que resultan útiles a los docentes para llevar a cabo un proceso de evaluación y de apoyo para el logro de aprendizajes (SEP, 2011b). En la Tabla 2 se describen los libros con respecto a los problemas aditivos.

Tabla 2. Descripción de los libros de texto y desafíos que proponen problemas aditivos.

Libro de texto	Desafíos	Desafíos que proponen problemas aditivos	Cantidad de problemas aditivos	Cantidad de PAEV aditivos
1º	57	32	116 (100%)	23 (19.8%)
2º	59	21	104 (100%)	29 (27.9%)
3º	76	14	104 (100%)	18 (17.3%)

Nota: información tomada de los libros de texto del segundo periodo escolar (SEP, 2016a; 2016b; 2016c).

3.3. Análisis de contenido

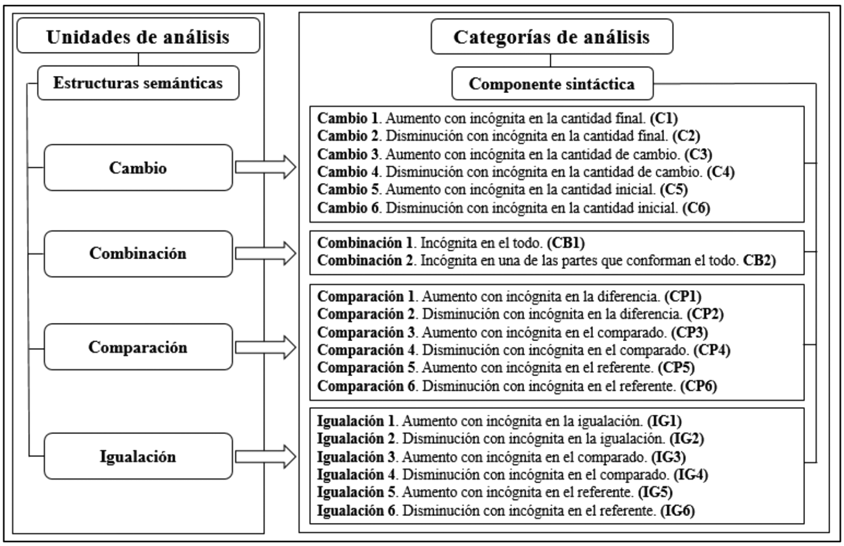
Esta investigación se realiza con base en el análisis de contenido desde la perspectiva de López-Noguero (2002) como una forma particular de análisis de documentos, con la que no se pretende analizar el estilo del texto, sino las ideas expresadas en él, como por ejemplo, el significado de las palabras, temas o frases que requieren de una cuantificación. Bajo este contexto analizamos los PAEV aditivos presentes en los libros de texto, de acuerdo con su estructura semántica y componente sintáctica. Para ello, se consideran elementos reportados en

Navarro (2015), para establecer y definir las unidades de análisis, y determinar las categorías que representan las variables de la investigación.

3.3.1. Unidades y categorías de análisis

Con base en los elementos teóricos y estudios realizados sobre análisis de libros de texto, se consideraron las unidades y categorías de análisis a partir de la clasificación para los PAEV aditivos de acuerdo con su estructura semántica desde la perspectiva de Riley et al. (1983), Orrantia et al. (2005), y Cañadas y Castro (2011), quienes han clasificado a los PAEV aditivos en: cambio, combinación, comparación e igualación (ver Figura 1). Las categorías de análisis se conformaron a partir de la componente sintáctica, siendo los elementos o dimensiones de las variables investigadas y son útiles para clasificar o agrupar dependiendo de las unidades de análisis (López-Noguero, 2002).

Figura 1. Unidades y categorías de análisis basadas en la estructura semántica y componente sintáctica.



Nota: Información adaptada de Carpenter *et al.* (1981), Puig y Cerdán (1988), Orrantia *et al.* (2005) y Cañadas y Castro (2011).

Por otra parte, los PAEV aditivos de más de una etapa, se analizan a partir de las estructuras compuestas. Cuando los problemas requieren para su solución más de una operación, debe asociarse una estructura semántica simple por cada etapa. Por ejemplo, combinación 1-cambio 2 (CB1-C2).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Con base en las unidades y categorías de análisis establecidas en la metodología, se presentan los resultados de esta investigación y la operatividad de los elementos teóricos considerados, donde se dan a conocer la variedad de estructuras semánticas contenidas en los PAEV aditivos de los libros de texto correspondientes al segundo período escolar. En concreto, se presenta el análisis y resultados en tres secciones de cada libro de texto y, luego de forma general mediante una tabla sintetizando la cantidad de estructuras semánticas simples y compuestas.

4.1. PAEV aditivos en el libro de primer grado

En la Tabla 3, se evidencian los desafíos que contienen PAEV aditivos, los cuales se tendrán en cuenta en el análisis. Cabe resaltar que, el libro de texto de primer grado para el maestro en algunos casos hace referencia a determinar el resultado al "juntar" o "separar" colecciones de objetos (SEP, 2016a), siendo éste un significado asociado a la adición y a la estructura semántica de combinación. Sin embargo, se presentan otras estructuras como las de cambio.

Tabla 3. Desafíos que contienen PAEV aditivos en el libro de primer grado.

Bloque	Desafío	Consignas	Título
I	13	2	¿Cómo quedó?
II	22	1	¿Cuánto cambio queda?
	24	1	El camión
	27	2	¿Hay alguna mal?
	28	1	¿Cuándo usar +, -, =?
III	35	1	Historias con números
	36	1	Las granjas
IV	46	1	Quito y pongo

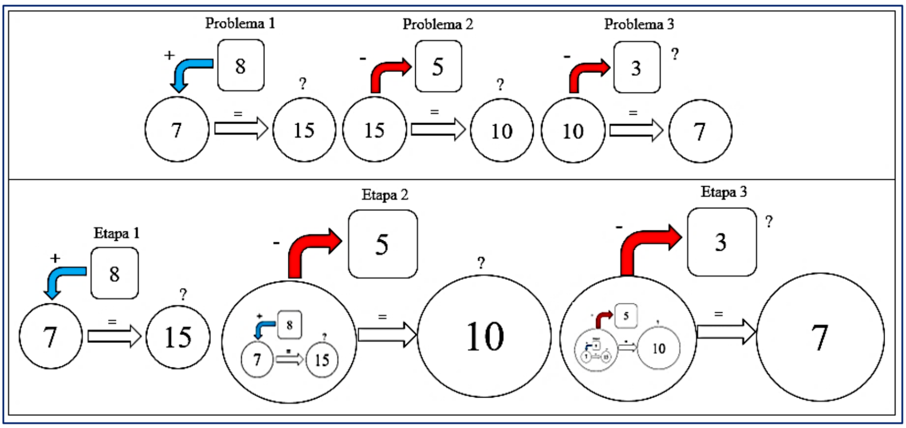
Teniendo en cuenta que los desafíos están conformados por consignas y éstas contienen a los problemas, se presenta el desafío 13, conformado por dos consignas que reúnen cinco PAEV aditivos (ver Figura 2), pertenecientes al contenido: *obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.*

Figura 2. Consigna 1 y 2 del desafío 13 ¿Cómo quedó? (SEP, 2016a, p.42).

En el primer problema se evidencia una *estructura semántica* de cambio 1 aumento con la *incógnita en la cantidad final*. El segundo problema se constituye de una *estructura semántica* de cambio 2 con la *incógnita en la cantidad final*. El tercer problema tiene una *estructura semántica* de cambio 4 con la *incógnita en la cantidad de cambio*. De forma general, este tipo de problemas son de tipo consistente, de tal menara que, los datos se presentan ordenados y se pueden resolver por un método de resolución directo. Cabe resaltar que, se necesita conocer el resultado del primer problema, porque el segundo y el tercer problema no presentan explícitamente uno de sus datos numéricos. En su conjunto, se considera un problema aditivo de más de una etapa conformado por tres problemas en los que se identifican estructuras simples que constituyen a una *estructura semántica* compuesta de cambio 1-cambio 2-cambio 4 (C1-C2-C4).

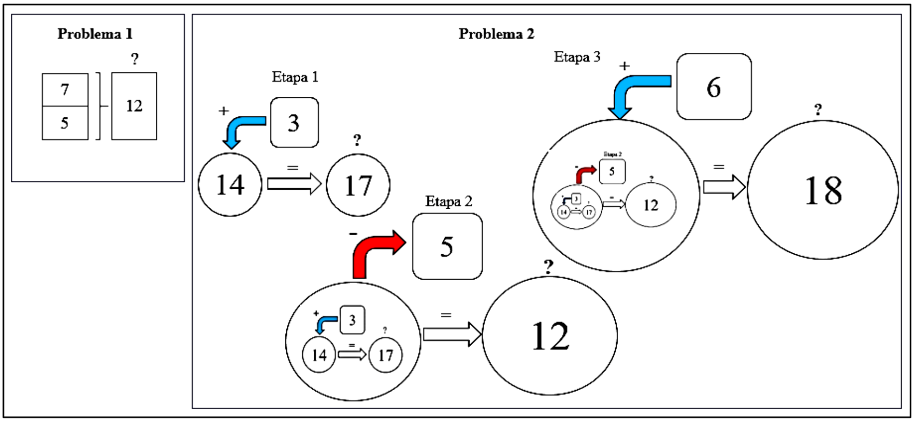
Estos problemas se pueden representar por medio del siguiente esquema (ver Figura 3), que ayudan al proceso de lectura y comprensión del enunciado, así como la organización de los elementos e identificar la acción que ejerce una cantidad sobre otra.

Figura 3. Esquemas de los problemas propuestos en la consigna 1 del desafío 13.



En la segunda consigna, se evidencian dos problemas aditivos. El primero se constituye de una *estructura semántica* de combinación 1 con la *incógnita en la cantidad total*. El segundo problema es compuesto o incluye más de una etapa, situación que requiere de tres etapas para su resolución. En la primera etapa se encuentra un problema con *estructura semántica* de cambio 1 aumento *con incógnita en la cantidad final*. Posteriormente, en la segunda etapa se parte del resultado obtenido anteriormente para poder resolver una situación problema con *estructura semántica* de cambio 2 disminución, *con la incógnita en la cantidad final*, y en la última etapa se presenta una *estructura semántica* de cambio 1 aumento *con incógnita en la cantidad final*.

Figura 4. Esquemas de los problemas propuestos en la consigna 2 del desafío 13.



En la Figura 4 se evidencian los esquemas de los problemas 1 de una etapa y el problema 2 de tres etapas que conforma una estructura semántica compuesta cambio 1-cambio 1-cambio 2 (C1-C1-C2). De manera general, en la Tabla 4 se observa la cantidad de estructuras que se evidenciaron en todos los problemas aditivos del libro de primer grado.

Tabla 4. Estructuras semánticas simples en los PAEV aditivos del libro de primer grado.

PAEV aditivos en el libro de texto de primer grado			
Estructura semántica	Componente sintáctica	Cantidad de estructuras	Porcentaje %
Cambio	Cambio 1	17	40.5 %
	Cambio 2	11	26.2 %
	Cambio 4	1	2.4 %
Combinación	Combinación 1	10	23.8 %
Comparación	Comparación 1	3	7.1%
Total		42	100%

4.2. Análisis de los PAEV aditivos del libro de segundo grado

En particular, en este libro de texto se empiezan a proponer estructuras diferentes a las encontradas en el libro de primer grado, caracterizándose por mostrar variedad en el lugar de la incógnita, por ejemplo, en la cantidad inicial y la que modifica, para los problemas con estructura de cambio. Asimismo, la incógnita en una de las partes para los problemas de combinación y aparecen con más frecuencia los problemas de comparación y por primera vez los de igualación. En la Tabla 5 se presentan los desafíos considerados.

Tabla 5. Desafíos que contienen problemas aditivos en el libro de segundo grado.

Bloque	Desafío	Consignas	Título
II	20	1	El más rápido
II	22	1	¿Qué debo hacer?
	23	1	¿Cuál es la diferencia?
III	31	2	La tienda de juguetes
	33	2	La ferretería
IV	43	1	¿Cómo le hizo?
	48	1	¿Cuál eliges?

Así, por ejemplo, el desafío veintitrés, está conformado por una consigna constituida por cinco problemas aditivos de enunciado verbal como se presentan en la Figura 5. Asimismo, corresponde al contenido: *Resolución de problemas de sustracción en situaciones correspondientes a distintos significados: complemento, diferencia.*

Figura 5. Desafío 23, ¿Cuál es la diferencia? (SEP, 2016b, p.72).


23 ¿Cuál es la diferencia?

Consigna

En equipos resuelvan los siguientes problemas. Escriban la operación que permita encontrar directamente la respuesta.

a) Benito tiene 23 años y su hermano José tiene 14 años. ¿Cuántos años le lleva Benito a José? ______

b) Lucas tiene 35 canicas y Pedro tiene 26. ¿Cuántas canicas más tiene Lucas que Pedro? ______

c) El equipo rojo de basquetbol hizo 42 puntos y el equipo azul hizo 28 puntos. ¿Por cuántos puntos le ganó el equipo rojo al equipo azul? ______

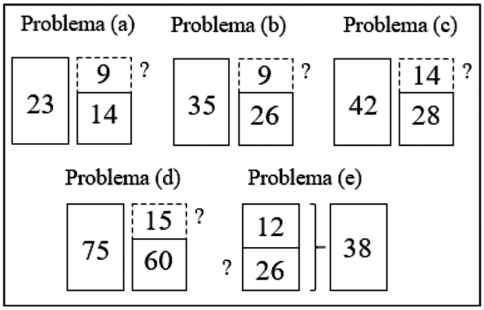
d) La mochila de Laura costó 75 pesos y la de su hermana costó 60 pesos. ¿De cuánto es la diferencia en el precio de las dos mochilas?

e) Rodrigo necesita 38 estampas para llenar su álbum de futbol. Si su primo le regaló 12, ¿cuántas estampas le faltan para llenar el álbum?

En el inciso a) se presenta un problema con *estructura semántica* de comparación 1 con la *incógnita en la diferencia*, es de una etapa y de tipo consistente. En el caso del inciso b) se propone un problema con *estructura semántica* de comparación 1 con la *incógnita en la diferencia*, es de una etapa o simple, con un enunciado consistente. En el inciso c) se presenta un problema con *estructura semántica* de comparación 1 con *incógnita en la diferencia*, de una etapa y de tipo consistente. Por su parte, el problema propuesto en el inciso d) por la redacción, podría tener implícitamente una estructura semántica de comparación que puede ser de comparación 1 o comparación 2. Sin embargo, por la forma como están ubicadas las cantidades numéricas en el enunciado, es un problema con *estructura semántica* de comparación 1 con *incógnita en la diferencia*.

El último inciso e) propone un problema constituido por una *estructura semántica* de combinación 2 con la *incógnita en una de las partes que conforman el todo* y es de una etapa de tipo consistente, ver Figura 6.

Figura 6. Esquemas de los problemas propuestos en el desafío 23.



En este libro de texto, se logra evidenciar que la estructura semántica de cambio se completa teniendo en cuenta el problema con estructura de cambio 4 que aparece en el libro de primer grado. De igual manera sucede con la estructura de combinación, y para las estructuras de comparación e igualación sólo se presentan tres tipos atendiendo a su componente sintáctica. En este sentido, se puede afirmar que, los problemas conservan un tipo de estructuras sencillas pero que van aumentado su grado de dificultad a medida que van pasando de un grado escolar a otro. En la Tabla 6, se presentan todas las estructuras semánticas presentes en los problemas del libro de segundo grado.

Tabla 6. Estructuras semánticas simples en los PAEV aditivos del libro de segundo grado.

PAEV aditivos en el libro de texto de segundo grado			
Estructura semántica	Componente sintáctica	Cantidad de estructuras	Porcentaje %
Cambio	Cambio 1	2	5 %
	Cambio 2	3	7.5 %
	Cambio 3	2	5 %
	Cambio 5	4	10 %
	Cambio 6	2	5 %
Combinación	Combinación 1	17	42.5 %
	Combinación 2	4	10 %
Comparación	Comparación 1	4	10 %
	Comparación 3	1	2.5 %
Igualación	Igualación 1	1	2.5 %
Total		40	100%

4.3. Análisis de los PAEV aditivos del libro de tercer grado

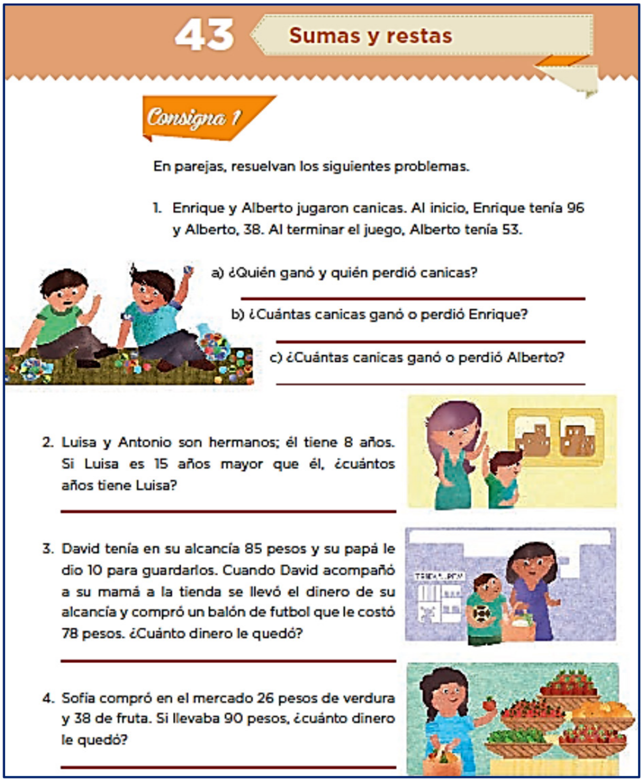
En el libro de tercer grado se identificaron desafíos que contienen PAEV aditivos con estructuras semánticas sencillas, como las de cambio 1 y combinación 2, estructuras complejas como comparación 1 e igualación 1 (ver Figura 7). Cabe resaltar que, los problemas de este libro contienen combinaciones de estructuras, tanto aditivas como multiplicativas, por lo que en algunos problemas analizados sólo se tomó en cuenta la parte que implica una adición y/o sustracción.

Tabla 7. Desafíos que contienen problemas aditivos en el libro de tercer grado.

Bloque	Desafío	Consignas	Título
I	4	2	Rapidez mental
	13	3	Elaboración de galletas
III	43	3	Sumas y restas
IV	55	1	La fiesta
	56	1	¿Cuál de todas?

En este sentido, el desafío 43 está conformado por tres consignas, de las cuales se tomó la primera a manera de ejemplo, en la que se proponen cuatro PAEV aditivos (ver Figura 7), pertenecientes al contenido: *determinación y afirmación de un algoritmo para la sustracción de números de dos cifras*.

Figura 7. Desafío 43, sumas y restas (SEP, 2016c, p.142).



43 Sumas y restas

Consigna 1

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. Enrique y Alberto jugaron canicas. Al inicio, Enrique tenía 96 y Alberto, 38. Al terminar el juego, Alberto tenía 53.

a) ¿Quién ganó y quién perdió canicas?

b) ¿Cuántas canicas ganó o perdió Enrique?

c) ¿Cuántas canicas ganó o perdió Alberto?

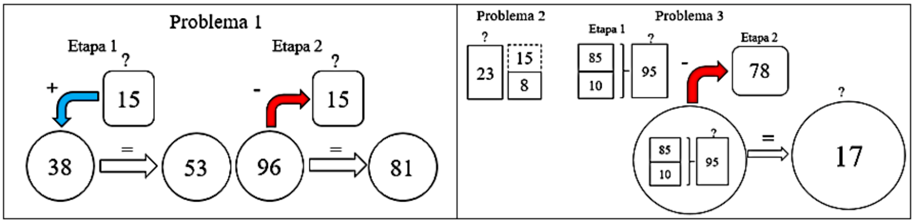
2. Luisa y Antonio son hermanos; él tiene 8 años. Si Luisa es 15 años mayor que él, ¿cuántos años tiene Luisa?

3. David tenía en su alcancía 85 pesos y su papá le dio 10 para guardarlos. Cuando David acompañó a su mamá a la tienda se llevó el dinero de su alcancía y compró un balón de futbol que le costó 78 pesos. ¿Cuánto dinero le quedó?

4. Sofía compró en el mercado 26 pesos de verdura y 38 de fruta. Si llevaba 90 pesos, ¿cuánto dinero le quedó?

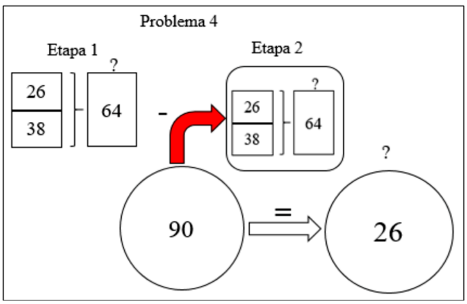
En cuanto a la primera consigna (ver Figura 7), el primer problema está constituido por dos *estructuras semánticas*, una de cambio 3 y la otra de cambio 4, ambas con la *incógnita en la cantidad de cambio*, identificadas para dar respuesta a los incisos a, b y c. Es un problema que requiere de dos etapas con *estructura semántica compuestas* cambio 3-cambio 4 (C3-C4). El segundo problema tiene una *estructura semántica* de comparación 3 con la *incógnita en el comparado*. Además, es de una etapa, de tipo consistente El tercer problema es de dos etapas, en la primera se presenta una *estructura semántica* de cambio 1 con la *incógnita en la cantidad final*. En la segunda etapa se evidencia una *estructura semántica* de cambio 2 con la *incógnita en la cantidad final*, es de tipo consistente y tiene una *estructura semántica compuesta* cambio 1-cambio 2 (C1-C2). Ver esquemas en la Figura 8.

Figura 8. Esquemas de los problemas 1, 2 y 3 del desafío 43.



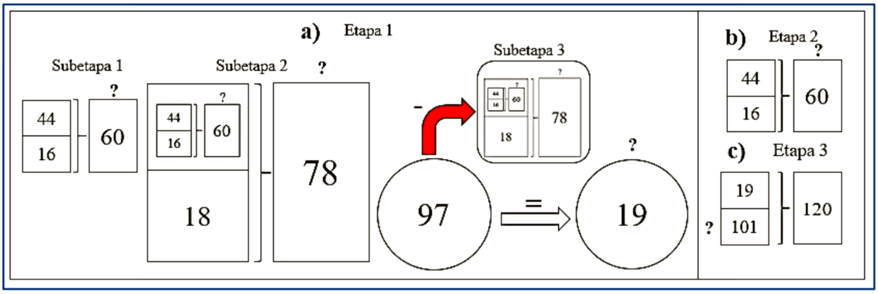
El cuarto problema es de dos etapas, en la primera etapa se presenta una *estructura semántica* de combinación 1 con la *incógnita en la cantidad total*, y en la segunda etapa se identificó una *estructura semántica* de cambio 2 con la *incógnita en la cantidad final*. Este problema es de tipo consistente, y tiene una *estructura semántica compuesta* de combinación 1- cambio 2 (CB1-C2), presentándose a través de esquemas en la Figura 9.

Figura 9. Esquemas del problema 4 del desafío 43.



En relación con la consigna 3, se evidencia un problema de tres etapas. La primera se conforma de tres subetapas. La primera y segunda subetapa tienen una *estructura semántica* de combinación 1 con la *incógnita en la cantidad total*, en la tercera subetapa se presenta una *estructura semántica* de cambio 2 con la *incógnita en la cantidad final*. En la segunda etapa se presenta una *estructura semántica* de combinación 1 con la *incógnita en la cantidad total*. En su conjunto estos problemas son de tipo consistentes. En la tercera etapa se identificó una *estructura semántica* de combinación 2 con la *incógnita en una de las partes* que conforman el todo, ver Figura 10.

Figura 10. Esquema del problema contenido en la consigna 3 del desafío 43.



A su vez, se identificaron problemas conformados por estructuras semánticas compuestas, considerando la estructura de combinación 1 siendo la más frecuente en cada composición. También, se resalta un factor importante en la resolución de problemas inconsistentes presentándose casos en los que se involucran hasta tres etapas en las que la estructura semántica es la misma, en este caso cambio 5 e igualación 1.

Tabla 8. Estructuras semánticas simples en los PAEV aditivos del libro de tercer grado.

PAEV aditivos en el libro de texto de tercer grado			
Estructura semántica	Componente sintáctica	Cantidad de estructuras	Porcentaje %
Cambio	Cambio 1	4	11.4%
	Cambio 2	8	22.8%
	Cambio 3	1	2.9%
	Cambio 4	1	2.9%
	Cambio 5	3	8.6%
Combinación	Combinación 1	11	31.4%
	Combinación 2	3	8.6%
Comparación	Comparación 3	1	2.9%
Igualación	Igualación 1	3	8.6%
Total		35	100%

En la Tabla 8 se sintetizan las estructuras semánticas contenidas en los PAEV aditivos en el libro de tercer grado. Con base en esta información, se da a conocer que las estructuras semánticas más identificadas son las de combinación 1 con la incógnita en la cantidad total, 31.4% de los problemas. Seguidos por las estructuras de cambio 2 encontradas, 22.8%. Asimismo, se presenta con 11.4% las estructuras de cambio 1 y 8.6% las estructuras de cambio 5, combinación 2 e igualación 1, evidenciándose para cada tipo de problema tres estructuras semánticas. En menor frecuencia se presentan las estructuras de cambio 3, cambio 4 y comparación 3,2.9%.

4.4. Estructuras semánticas compuestas en los PAEV aditivos

Con base en las estructuras semánticas simples que se identificaron en los problemas, a continuación, se presentan las estructuras semánticas compuestas evidenciadas en los PAEV aditivos en los tres libros de textos analizados, en los que se requieren para su resolución más de una operación (adición y/o sustracción), ver Tabla 9.

Tabla 9. PAEV aditivos con estructuras semánticas compuestas en libros de texto de primero, segundo y tercer grado.

Libro	Desafíos	PAEV aditivo	Etapas	Estructuras semánticas compuestas		
Primer grado	13	Problema 1 (Consigna 1) Problema 2 (Consigna 1) Problema 3 (Consigna 1)	3	C1	C2	C2
		Problema 2 (Consigna 2)	3	C1	C2	C1
	22	Problema 2	2	C1	C2	
		Problema 3	3	CB1	CB1	C2
		Problema 4	2	CB1	C2	
	24	Problema	2	C1	C2	

Primer grado	36	Problema 1	2		CB1		CB1		
		Problema 2	3	CB1		CB1			C2
		Problema 3	4		CB1	CB1	CB1	C1	
	46	Problema 1	2		C2		C2		
		Problema 2	3	C1		C1			C1
		Problema 3	3	CP1		CP1			CP1
		Problema 4	2	C1			C1		
Segundo grado	31	Problema (a) (Consigna 1)	2	CB1			C6		
		Problema (c) (Consigna 2)	2	CB1			C5		
	43	Problema (b)	6	C2	CB1	CB1	CB1	CB1	CB1
	48	Problema (a)	3	CB1		CB1			C2
		Problema (g)	2		CB1		CB2		
Tercer grado	13	Problema 1	2		C1		C1		
		Problema 2	3	C5		C5			C5
	43	Problema 1 (Consigna 1)	2		C3		C4		
		Problema 3 (Consigna 1)	2		C1		C2		
		Problema 4 (Consigna 1)	2		CB1		C2		
		Problema 1 (Consigna 3)	3	CB1	CB1				
				C2		CB1			CB2
	55	Problema 1	3	CB1		CB1			CB2
	56	Problema 1	2		CB1		CB1		
		Problema 2	2	CB1		CB1			CB2
		Problema 3	2		CB1				
		Problema 4	3	IG1		IG1			IG1

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta investigación se encontró que la mayoría de los PAEV aditivos propuestos en los libros de texto correspondientes al segundo periodo escolar de la educación básica en México, presentan estructuras semánticas consideradas sencillas de resolver, tales como cambio 1, 2 y combinación 1 y pocos problemas con estructuras de comparación e igualación, como lo reportan Orrantia et al. (2005), Aguillón y Resendiz (2012) y Chamoso et al. (2014). Por tanto, es importante sugerir al profesor realizar un análisis previo de las tareas a abordar, con el propósito de conocer y evaluar la pertinencia de los mismos (Font y Godino, 2006).

El análisis realizado permitió identificar PAEV aditivos estructurados por más de una etapa, que contienen varias estructuras semánticas. Lo anterior no quiere decir que los problemas sean desafiantes por presentar enunciados extensos o más datos. Es importante resaltar esta situación, puesto que los problemas con las características mencionadas, en su mayoría contienen estructuras de cambio 1, cambio 2, combinación 1, las que no permiten evidenciar un grado elevado de dificultad o desafío, en consecuencia, la promoción de problemas genuinos es escasa. A su vez, las características semánticas y sintácticas de los problemas influyen en las formas de resolución del estudiante, es decir, si no se enfatiza en comprender e identificar la estructura semántica del problema, se podría elegir un procedimiento inadecuado (Butto y Martínez, 2012).

Con base en los resultados obtenidos en este trabajo, se constata que los niveles bajos en la competencia de resolución de problemas por parte de los estudiantes podrían estar influenciados por la forma como se promueven los problemas en los libros de texto, los cuales son usados de manera directa por el profesor durante su planificación (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992 y Aké y Godino, 2018).

El uso del modelo teórico adoptado en este trabajo fue relevante, debido a que permitió categorizar los problemas de acuerdo con su estructura semántica y componente sintáctica (Riley *et al.*, 1983; Puig y Cerdán, 1988; Orrantia *et al.*, 2005; Cañadas y Castro, 2011). Asimismo, permitió esquematizar los problemas aludiendo a representaciones gráficas para organizar y operar con los datos involucrados. Esta forma de proceder en la resolución de problemas aditivos, es fundamental para la etapa inicial de la educación básica, pues coadyuva a la comprensión del mismo problema, así como a organizar datos para identificar la operación que permitirá establecer la relación aditiva adecuada. En este sentido, los esquemas identificados en esta investigación, se conectan directamente con las tipologías de problemas de acuerdo con Nesher (1999), ubicando a los problemas sencillos en procesos de conteo y cambio, mientras que los problemas desafiantes ameritan esquemas parte-todo donde se evidencian procesos de comparación y reversibilidad.

Por otra parte, en el plan y programas de estudios se afirma que al culminar el segundo periodo escolar los estudiantes saben resolver problemas aditivos con diferentes estructuras (SEP, 2011a), pero los resultados de este trabajo evidencian ausencia respecto de la presencia del total de estructuras semánticas, en particular las que involucran problemas desafiantes. Cabe resaltar que, aunque los libros de texto no fueron diseñados a partir de los elementos teóricos usados en este trabajo, dichos elementos permiten identificar problemas aditivos sencillos y desafiantes en los documentos curriculares oficiales (plan de estudios, programas de estudio y libros de texto), dando oportunidad a los docentes de atender la resolución de PAEV aditivos con las diferentes estructuras.

El análisis de contenido desarrollado es útil para profesores de matemáticas de primaria como herramienta para clasificar los diferentes PAEV aditivos, considerando como modelo de enseñanza para promover los mismos desde los más sencillos a los más dificultosos o viceversa, pero haciendo énfasis en la estructura semántica y la componente sintáctica. En este sentido, la forma de esquematizar es otro elemento que contribuye en la comprensión y representación del problema.

REFERENCIAS

Aguillón, M. y Resendiz, A. (2012). *Identificación y clasificación de problemas aditivos en los libros de texto del segundo ciclo de Educación primaria* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, México, D.F.

Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática*, *30*(2), 171-201. https://dx.doi.org/10.24844/em3002.07

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341- 378.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y aprendizaje*, *39*(40), 71-81.

Bonilla, M., Sánchez, N. y Guerrero, F. (1999). Estructura aditiva y formación de profesores para la educación básica. En Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, J., Romero, J., Rojas, P., Mora, L., y Barón, C. (Eds), *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor.* (pp.1-150). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Gaia.

Butto, C. y Martínez, C. (2012). Abordaje basado en competencias: la resolución de problemas aditivos en el nivel básico. *Revista horizontes pedagógicos*, *14*(1), 30-42.

Blanco, L., Caballero, A. y Cárdenas, J. (2015). Los problemas aritméticos escolares. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 123-138). España: Universidad de Extremadura.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En Segovia y Rico (Coord.). *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (pp. 75-98). Madrid: Pirámide.

Carpenter, T., Hiebert, J. y Moser, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for research in mathematics education*, *2*(1), 27-39.

Castro, A. (2013). *Contribución al análisis de la estructura semántica de los problemas aritméticos elementales*. (Tesis de maestría). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226). Salamanca: SEIEM.

Chamoso, J. M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2014). Los Problemas de Matemáticas Escolares de Primaria, ¿Son solo Problemas para el aula? *Cuadernos de Investigación y Formación en Matemática*, 9, 261–279.

Common Core State Standars Initiative. (2018). *Common core state standars for mathematics*. Washington, D.C: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Durand, C. y Vergnaud, G. (1976). Structures Addictives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, *36*, 28-43.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8* (1), 67-98.

García, S.R. (2011). *Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria: Proceso representacional, didáctico y evaluativo*. México, D.F.: Trillas.

García-García, J. (2014). Los problemas aritméticos en primaria: un estudio sobre las concepciones de profesores bilingües. *NÚMEROS*, *87*, 37-58.

García-García, J., Navarro, C., y Rodríguez-Vásquez, F. (2014). La resolución de problemas en un contexto Ñuu Savi: un estudio de casos con niños de sexto grado de primaria. *Educación matemática*, *26*(1), 127-152.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, *23*, 49-62.

Hegarty, M., Mayer, R. E. y Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*, 18-32.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978). Semantic processing in arithmetic word problem solving. *Paper presented at the Midwestern Psychological Association Convention*, Chicago.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2016). Manual para la aplicación, clasificación, análisis y uso de los resultados de la prueba Planea diagnóstica 2016-2017. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba_d/docs/2017/MANUAL_PLANEA_DIAGNOSTICA_2017.pdf

López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, *4*,167-179.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Navarro, C. (2015). *Libros de texto gratuito de matemáticas, reforma 2011: el caso de los números naturales y números fraccionarios* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Gro.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *SUMA*, 31, 19-26.

Nesher, P., Greeno, J. y Riley, M. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics*, *13*, 373-394.

OCDE. (2016). Nota país. Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA). PISA 2015-resultdos. México.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y aprendizaje*, *26*(4), 451-468.

Orrantia, J., González, L. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto en educación primaria. *Infancia y aprendizaje*, *28*(4), 429-451.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. Revista psicopedagogía, *23*(71), 158-180.

Ortíz, C. (2014). *Procedimiento de resolución de problemas aditivos escolares en el contexto de compra-venta en niños de segundo grado* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro.

Pepin, B., Gueudet, G., y Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice. Two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *45*, 685-698.

Polotskaia, E., Savard, A. y Freiman, V. (2016). Investigating a case of hidden misinterpretations of an additive word problem: structural substitution. *European journal of psychology of education*, *31*(2), 135-153.

Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23. Ed.). Madrid, España: Autor.
Riley, M. y Greeno, J. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. *Cognition and Instruction*, *5*(1), 49-101.
Riley, M., Greeno, J. y Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: Academic Press.
Rizo, C. y Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2*(3), 31-45.
Sánchez, M. y Vicente, S. (2015). Models and processes for solving arithmetic word problems proposed by Spanish mathematics textbooks. *Culture and education*, *27*(4), 695-725.
Secretaría de Educación Pública (2011a). *Programas de estudios 2011 Guía para el maestro. Educación Básica*. México: SEP.
Secretaría de Educación Pública (2011b). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP. Disponible en: http://issuu.com/dgeb/docs/planedu2011?e=3503076/2622744
Secretaría de Educación Pública (2016a). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro, Primer grado*. México: SEP.
Secretaría de Educación Pública (2016b). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro, Segundo grado*. México: SEP.
Secretaría de Educación Pública (2016c). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro, Tercer grado*. México: SEP.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.
Van Dijk, T. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.
Vergnaud, G. (1991). *El niño, las Matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
Verschaffel, L. y De Corte, E. (1993). A decade of Research on world problem solving in leuven: theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational psychology review*, *5*(3), 239-256.
Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

CAMILO RODRÍGUEZ
Dirección: Colonia La Haciendita, Avenida Médico Militar, Código Postal, 39087, Chilpancingo de los Bravo, México.
Teléfono: 7471842676;
Correo electrónico: camilorodriguez274@gmail.com

 DOI: 10.24844/EM3102.05

Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza[1]

Collaborative work between teachers and researchers in Mathematics Education: from reflection on practices to the elaboration of analysis axes for teaching

Patricia Sadovsky[2]
Horacio Itzcovich[3]
María Mónica Becerril [4]
María Emilia Quaranta[5]
Patricia García[6]

Resumen: En este artículo se comparten resultados de una investigación que se propone estudiar las elaboraciones que tienen lugar cuando docentes e investigadores en didáctica de la matemática colaboran para analizar problemas de enseñanza. Las discusiones sostenidas con un grupo de maestras

Fecha de recepción: 29 de agosto de 2018. **Fecha de aceptación**: 4 de marzo de 2019.

[1] Los resultados de este trabajo surgen de una investigación desarrollada por los autores en el marco de la programación 2016-2017 de la Universidad Pedagógica Nacional UNIPE.

[2] Departamento de Ciencias y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), Buenos Aires, Argentina, patsadov@gmail.com, orcid.org/0000-0001-6703-3315

[3] Departamento de Ciencias y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), Buenos Aires, Argentina, yayohiz@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4189-8593

[4] Departamento de Ciencias y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), Buenos Aires, Argentina, monicabece@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3922-447X

[5] Departamento de Ciencias y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), Buenos Aires, Argentina, memiliaquaranta@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3760-2369

[6] Departamento de Ciencias y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), Buenos Aires, Argentina, patgarcia41@speedy.com.ar, orcid.org/0000-0002-6247-0310

y la directora de una escuela pública del conurbano bonaerense posibilitaron la producción de un conjunto de ideas que organizamos alrededor de tres dimensiones de análisis: las relaciones entre las interacciones personales y grupales del docente con los alumnos, los distintos planos en los que intervienen las ayudas que las maestras pueden brindar a sus alumnos y las mediaciones necesarias para favorecer la disponibilidad de recursos y/o conocimientos. En el marco de las discusiones se hace visible el par *decisión de enseñanza-razones que la sostienen* como base de la construcción de criterios que orientan la acción docente. Poco a poco un estado inicial de incertidumbre en el que se piensan las maestras va dando lugar a un reconocimiento de la complejidad de la enseñanza, cuando se opta por incorporar los aportes de los alumnos al tratamiento de los conceptos matemáticos en sala de clase.

Palabras claves: *Trabajo colaborativo entre investigadores y docentes – Dimensiones de análisis de la enseñanza – Complejidad de la acción didáctica*

Abstract: Results from a research, which studies elaborations that take place when teachers and researchers in mathematics education collaborate to analyse teaching problems, are shared in this paper. Discussions held with a group of teachers and the head of a primary school in Buenos Aires suburbs gave rise to some elaborations. Three dimensions of analysis support them: relationships between personal and group interactions teachers and students hold, different levels in which teachers can help their students to contribute to learning progress and mediations to make certain knowledge available as a resource. Within the framework of these discussions, it becomes visible the pair *decision to teach – reasons that support it* as a basis for the construction of some criteria to guide teaching action. Little by little, an initial state of uncertainty in which teachers think about themselves is leading to an acknowledgment of the complexity of teaching when they decide to incorporate students´ contributions into the treatment of mathematical concepts in the classroom.

Keywords: *Collaborative work between researchers and teachers - Dimensions for teaching analysis - Complexity of the didactic action*

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados que compartimos en este artículo fueron elaborados en el marco de un proyecto de investigación que se viene desarrollando desde el año 2012 bajo el encuadre de trabajo colaborativo entre investigadores y docentes (Bednarz, 2013; Proulx, 2013; Sensevy, 2011). Como lo hemos comunicado en trabajos previos (Sadovsky, P., Quaranta, M.E.; Itzcovich, H.; Becerril, M.M.; García, P., 2015; Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M., Becerril, M.; García, P., 2016), nuestro grupo toma como objeto de estudio las ideas matemático-didácticas que se van elaborando en los intercambios que tienen lugar en espacios de discusión en los que integrantes de nuestro equipo se reúnen periódicamente con grupos de maestros de escuela primaria en sus lugares de trabajo, para analizar de manera conjunta cuestiones vinculadas a la enseñanza de la matemática. Los asuntos que van estructurando las conversaciones surgen de preocupaciones que atañen a la tarea de enseñanza que enfrentan los maestros y también, a medida que el grupo colaborativo se va enriqueciendo, de las propias elaboraciones que se van haciendo en su seno. En ambos planos los investigadores que coordinan los grupos se proponen construir y sostener posiciones simétricas entre los integrantes (Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, García, 2015; Sensevy, 2011). Nuestra investigación tiene dos grandes focos: los desarrollos del grupo que comparte con los maestros y el proceso de construcción de la colaboración en tanto el mismo supone una problematicidad ligada a históricas divisiones sociales del trabajo entre el mundo académico y el mundo de las prácticas de enseñanza que se refleja, entre otros aspectos, en los modos de enfocar los problemas, en los puntos de apoyo para las conclusiones a las que se arriba, en los tiempos disponibles para los análisis, en las responsabilidades que se asumen, en las referencias a los grupos profesionales de pertenencia y a los grupos sociales que ejercen control sobre el trabajo (Robert, 2003; Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M., Becerril, M.; García, P., 2016).

El grupo de colaboración se reúne periódicamente en la escuela. Allí se van abordando cuestiones de enseñanza de la matemática, en general propuestas por los maestros porque les resultan problemáticas y para las cuales se suelen delinear de manera conjunta modos de recoger material en las aulas (producciones de alumnos, registros de episodios de clases), que alimente la discusión. La decisión de sostener los intercambios sobre la base de esta documentación obedece a la intención de transformar aquello que se produce en las aulas en objeto de análisis y tener así una base empírica para reconstituir la matemática que allí se enseña.

Cada reunión es registrada en audio y, a partir de la desgrabación, el equipo de investigadores que asiste a la escuela realiza una síntesis que se lee al comienzo de la reunión siguiente. Esto permite retomar los temas, revisar las ideas tratadas e ir objetivando la discusión. Una condición metodológica fundamental es que tanto docentes como investigadores conciban el espacio de trabajo compartido como un ámbito en el que se construirán nuevas respuestas para las preguntas que se abordan. Esta condición no se realiza simplemente con la voluntad declarada de sostenerla sino que es producto de una construcción en el tiempo, en la que también intervienen la confianza que se va construyendo así como la reflexión sostenida en el grupo de investigadores sobre la marcha de la colaboración. Obviamente no se trata de respuestas *completamente* nuevas ya que provienen del bagaje conceptual de cada uno de los integrantes del espacio. Más bien, lo que queremos enfatizar es que ponemos cuidado en no proponer, sobre todo los investigadores, un repertorio de recursos ya acuñados que muchas veces no toman en cuenta el contexto particular que se analiza.

En este artículo damos cuenta de los procesos desarrollados en un caso,[7] el grupo de la Escuela 30 de Longchamps[8] en el que participaron las maestras de primero a cuarto grado, la directora y dos integrantes de nuestro equipo, que se reunieron periódicamente durante los años 2016, 2017 y 2018. Nos proponemos trabajos de largo plazo atendiendo a dos razones básicas: porque pensamos que es un modo de construir una historia de las ideas que se van produciendo, de retomarlas, revisarlas e ir resignificándolas y porque la constitución de la colaboración, como se ha enunciado, es subsidiaria de tiempos prolongados.

[7] La investigación asume un abordaje cualitativo e interpretativo y toma elementos de la metodología de estudios de casos. El caso se concibe como el conjunto de interacciones que se producen entre investigadores de nuestro equipo, docentes y directivos de una escuela.

[8] Se trata de una institución que en el año 2014 se transformó en escuela de jornada completa. La directora tiene una decisiva orientación hacia el trabajo pedagógico y es consultada por las maestras para quienes es referente en cuestiones didácticas. Reconocemos y agradecemos muy especialmente al equipo docente de la Escuela 30 de Longchamps, Almirante Brown, Provincia de Buenos Aires, su apertura al trabajo colaborativo, su compromiso y participación: Gisela Arce, Viviana Brancatti, Adriana De Lera, Lorena Navarrete, Flavia Romani, Liliana Torres, Alejandra Quercia, Paula Pérez.

De manera global, señalamos como resultado de esta investigación que los análisis llevados a cabo en el espacio de trabajo colaborativo fueron haciendo visible para todos los integrantes del grupo aspectos de la enseñanza –entramados entre sí– que se vuelven problemáticos cuando se acepta que la discusión sobre el conocimiento en el aula está afectada por las intervenciones de los alumnos. De esos aspectos damos cuenta en este artículo.

Una vez puesto a funcionar el grupo, las maestras declaran encontrarse *en transición*. Sus primeras intervenciones dan la impresión de que piensan que hay un *antes*, que ha configurado sus prácticas ligadas a la enseñanza de procedimientos convencionales de cálculo –y a las que los alumnos se han adaptado– y un *ahora* que no se termina de atrapar y que las envuelve en una situación de incertidumbre con relación a las decisiones que toman en las aulas.

En este primer momento la transición se describe enfatizando dos polos: un sistema de enseñanza, que sería el históricamente instalado y que las ha estructurado, y *lo que ahora se trata de pensar*, caracterizado por tres elementos básicos: dar lugar a diferentes procedimientos, ponerlos en común y aceptar los errores. A lo largo de las discusiones, esta mirada inicial se va abriendo –y enriqueciendo– para dar lugar a más elementos que suman complejidad a los procesos de enseñanza que se ven llamadas a sostener. Si bien este estado de transición les genera incertidumbre, sus argumentaciones reafirman su convicción de profundizar los cambios que van realizando.

Aunque parece prevalecer una idea de ruptura con las tradiciones de enseñanza, las diferentes dimensiones de análisis que van emergiendo en las discusiones a lo largo del desarrollo del espacio colaborativo dan cuenta de que sus propias historias de trabajo docente constituyen una referencia importante a partir de la cual van elaborando transformaciones en una perspectiva mucho más dialéctica entre pasado y presente que lo que explícitamente reconocen (Del Rey, 2012; Fisher, 2016). En otros términos, lejos de una visión según la cual la innovación tiene un valor por el solo hecho de ser tal, las maestras de este grupo toman en consideración la propia experiencia desarrollada en su trabajo de enseñanza y la van haciendo funcionar como un marco que les permite repensar muchas de las intervenciones que van realizando.

Desde un inicio de los intercambios, las docentes aportaron episodios de sus clases que proponían para el análisis conjunto. En general, se trataba de situaciones en las que interactuaban con un alumno –o con varios– a raíz de las decisiones que los niños tomaban al encarar la tarea que se les había propuesto. Podríamos decir que esos intercambios estaban signados por cierto desconcierto de las maestras frente a producciones de niños cuyo alcance, por diferentes razones, no terminaban de entender. Subrayamos el recorte que hacen las maestras en términos de su interacción con el accionar de los niños ya que entendemos que "habla" de un esquema de acción didáctico (Pastré, Mayen, & Vergnaud, 2006) en el que la intervención docente se estructura en función de las decisiones de los alumnos en la tarea y de la intención del docente al proponerla (Sensevy, 2011; Lave, 2001).

Si bien no estamos en condiciones de atribuirles a las maestras un uso consciente de este esquema de acción, el recorte sistemático que hacen para el análisis en las reuniones nos lleva a pensar que se trata de un grupo de docentes que se ve exigido de producir *in situ* intervenciones no previstas, reguladas por el accionar de los alumnos. Establecemos lazos entre la incertidumbre que estas respuestas generan y el hecho de recortarlas como asuntos que "merecen" una reflexión en el grupo. En este contexto interpretamos que la necesidad de las docentes de entender las decisiones de los niños conlleva –en principio– dos aspectos: las relaciones matemáticas implicadas en lo que el niño hace y el modo en que las incorporarán a su enseñanza.

Varias son las razones por las que un episodio llega a la mesa de trabajo por decisión de alguna maestra: una respuesta errónea, un procedimiento muy básico o anti económico, un bloqueo que pone de manifiesto que los niños no cuentan con un conocimiento que se concebía disponible, una demanda cuyas razones no terminan de entender… a medida que se analizan estas intervenciones, comienza a hacerse visible la complejidad del accionar docente cuando es un propósito explícito incorporar –integrar, transformar, extender, restringir– las producciones de los alumnos –sus ideas, sus representaciones, sus procedimientos, sus argumentos, sus creencias– a las conceptualizaciones que se van haciendo en el aula. Las divergencias, énfasis o matices que surgen en las discusiones del grupo colaborativo en lo relativo a los tipos de intervención docente –su función, su oportunidad, sus requerimientos, sus condicionamientos– y –de manera solidaria– en lo concerniente a los soportes que necesitan los niños para sostenerse y progresar en los aprendizajes, van dando lugar a una configuración de la enseñanza que nosotros organizamos en *ejes de análisis*, bajo el propósito de ir haciendo explícito el marco compartido que va surgiendo como resultado del trabajo colaborativo.

En los primeros intercambios, las diferencias en los puntos de vista sobre alguna cuestión eran tratadas por las maestras como "intercambios de opiniones" considerados por ellas todos complementarios y válidos. En ese momento, no se habían construido aún en el espacio colaborativo herramientas conceptuales que permitieran tratar dichas diferencias con base en argumentos. Al profundizar el análisis a lo largo de las reuniones con los aportes de unos y otros y, apoyados en el análisis de los materiales de las aulas, estas divergencias fueron derivando en la producción de razones que contribuían a sostener las diferentes posiciones. Tal el caso de lo ocurrido respecto de la pertinencia de hacer o no públicas para toda la clase las dificultades o errores de algún alumno o grupo de alumnos, que fue evolucionando hasta hacer posible una interpretación más conceptual de las posiciones y considerar criterios que respalden las decisiones que se toman al respecto. En esas condiciones entendemos que se pudo constituir como eje el análisis de las *relaciones entre las interacciones personales y las grupales* en sala de clase. Desarrollamos esta cuestión en el punto 2.

¿Qué significa ayudar a un alumno?; ¿cómo reconocer sus progresos?; ¿por qué a veces la ayuda "funciona" y otras no?; ¿por qué no siempre la apelación a algún material concreto es soporte para la resolución de un alumno que parece bloqueado?; ¿ayudar es guiarlo para que resuelva o es orientarlo para que desarrolle la idea que está poniendo en juego aunque no sea válida?; ¿es posible para el docente reconocer el progreso de sus alumnos en el marco de las ayudas que brinda?; una estrategia que se planifica para enfrentar un problema reconocido de enseñanza, ¿puede pensarse a la vez como ayuda?; ¿cómo se ayuda a los niños que parecen distantes de una intención de aprender? Estas preguntas dan cuenta de una problematización progresiva en la que se van enriqueciendo los contenidos, las estrategias y los sentidos de las ayudas a los niños. Analizamos este proceso en el punto 3.

Alentar a que los alumnos desplieguen sus propias estrategias frente a la resolución de problemas es una práctica instalada en el equipo de maestras, anterior a la constitución del grupo colaborativo. A la vez se preguntan ¿cómo impulsar su progreso?. En particular se analiza la relación entre la disposición de ciertos recursos de cálculo que podrían funcionar como mediadores y su uso específico para determinados fines. Desarrollamos las ideas vinculadas a esta cuestión en el punto 4.

Nuestras conclusiones retoman globalmente los análisis realizados bajo algunas preguntas: ¿cuáles son las grandes trazas de la producción del grupo?, ¿cómo se ha modificado el *estado* inicial de *transición* planteado por las maestras?, ¿y la incertidumbre asociada?, ¿en qué sentidos el trabajo compartido interpela las posiciones históricamente cimentadas de maestros e investigadores?, ¿qué relaciones establecemos entre la situación colaborativa y las transformaciones de los conocimientos de los integrantes del grupo?, ¿qué modificaciones se registran en el proceso investigativo? Se esbozan respuestas para estas cuestiones en el punto 5.

2. ¿INTERVENCIONES PERSONALES O GRUPALES? DEL INTERCAMBIO DE PUNTOS DE VISTA A LA CONSTRUCCIÓN DE UN EJE DE ANÁLISIS

Las maestras plantean inicialmente incertidumbres vinculadas al alcance de las producciones de los alumnos, sobre todo relativas a los problemas de resta: su nivel de elaboración, las ideas implicadas, la pertinencia de aceptarlas sin más o, por el contrario, de presionar para que avancen a otras de mayor complejidad. Esto deriva en el compromiso de realizar alguna actividad en las aulas y recoger trabajos de los niños, para analizar en el espacio las estrategias puestas en juego. Fue la primera tarea compartida en el grupo a la que las maestras aportaron gran cantidad de material. Surge en la discusión la siguiente cuestión: frente a las dificultades o errores de los alumnos, ¿es necesario interactuar con cada uno de ellos o podrían tratarse a través de una discusión grupal? Para algunos maestros parecían ser opciones contrapuestas. Sin embargo, no era éste nuestro punto de vista ya que, desde el enfoque didáctico que sostenemos, una decisión requiere para su análisis la explicitación de su intencionalidad y su relación con el contexto en el que se desarrolla. Reparamos así en la necesidad de ir proponiendo como proyecto para el espacio colaborativo la búsqueda de fundamentos para las decisiones que se toman. Se desarrolla a partir de este hecho una discusión que se va profundizando a lo largo del tiempo y de la que queremos dar cuenta en este apartado. Veamos.

Como mencionamos, la base de los análisis fue el material recogido en las aulas. Una de las maestras había planteado a sus alumnos el siguiente problema: *Ana está juntando plata para comprarse una patineta que cuesta $2345; ya tiene en su alcancía $1600, ¿cuánto dinero le falta?* Se reconoce la diversidad de estrategias posibles y, en particular, se valora positivamente la de sumar a 1600 su complemento respecto de 2345 que unos cuantos niños implementan. La preocupación de la maestra se centra en los chicos que suman las dos cantidades dadas y hace foco en el hecho de que los niños no controlan que obtienen un resultado inconsistente:

M1: Claro, no está esto de analizar si es posible este resultado, más allá de que sepan o no cómo hacer, ver si es posible [el resultado].
I: Bien, ¿cómo podríamos hacer ese análisis con ellos?
M1: Para mi gusto es un trabajo individual, porque lo que piensa esta nena, lo piensa esta nena, no lo piensa un grupo.
[...]
M2: Una puesta en común sería bueno.
[...]
M1: Es esa nena, quiero saber qué piensa, dónde está. (...) A mí me parece que al grupo lo forma lo individual de cada uno, por eso apunto a eso individual, pero por conocerlo, y en base a eso, sí, la dinámica del trabajo en matemática no es lo individual, pero para este trabajo es lo individual. (...) Yo estoy de acuerdo que la puesta en común enriquece.
[...]
I: Por ahí vos planteás el procedimiento para todos y preguntás "a ver, miremos entre todos esto, ¿cómo lo habrán pensado?"
M1: Y eso, digo yo, ¿me va a dar la respuesta de dónde está el obstáculo de esta nena puntualmente? Eso es lo que me pregunto.
[...].
M2: Porque también en la soledad del problema, quizás queda ahí, pero si ella lo puede confrontar con el resto...

La maestra 2 no termina de fundamentar su propuesta de puesta en común y, la maestra 1, piensa que un trabajo en el que se discuta con todo el grupo clase las ideas que subyacen a las estrategias erróneas, no le va a permitir conocer el modo de pensar de los niños que hicieron procedimientos desajustados aunque, en términos generales, sí valora las situaciones colectivas de trabajo. Interpretamos que las diferencias radican en este momento en los focos que hacen estas maestras: en el niño, en sus dificultades, para entender por qué hace lo que hace o en el grupo clase bajo el supuesto –no necesariamente compartido por todas las integrantes del grupo– de que la discusión grupal de una idea (correcta o errónea) resulta beneficiosa para todos. Aunque esto no se llega a desarrollar en ese momento, entendemos que ya se perfilaban dos modos de ver –relevantes para nosotros desde el punto de vista didáctico– que irían cobrando mayor nitidez en el tiempo: ¿dónde está el *asunto*?, ¿en las dificultades del niño, en la complejidad del objeto, en una interacción entre ambas?

Con el correr de los encuentros, estas discusiones reaparecen y se nutren con nuevos matices a través de dos grandes vías: 1) se siguen analizando las relaciones matemáticas que subyacen a diferentes estrategias de los niños y, 2) se discute acerca de su posible gestión en la clase.

Con relación a la primera de estas vías, el análisis de las estrategias en términos de conocimientos matemáticos en juego –esto es coincidente con resultados obtenidos en otros grupos con los que hemos trabajado–, contribuye a que se hagan visibles no sólo las ideas que los alumnos han utilizado sino las que deben aprender, contribuyendo a enriquecer un esquema de acción didáctica –ya señalado arriba– que coordina las ideas matemáticas de los alumnos con la intención de enseñanza. Se trata de momentos muy ricos, en los que, alrededor de una mesa, entre todas se producen verdaderas reconstrucciones acerca de cómo pudieron haber pensado los niños, se analizan las formas de representación y los recursos a los que apelaron, se comenta qué intervención tuvieron las maestras mientras los niños trabajaban, se comparan estrategias, se realizan consideraciones sobre las trayectorias de los niños y se las relaciona con sus producciones en cierto momento. Es decir, se amplía la mirada simultáneamente sobre la complejidad del objeto de enseñanza y sobre los saberes de los alumnos. La experiencia analítica de los investigadores tensa el análisis y hace visibles para las maestras sus propias posibilidades de interpretación de las acciones de los alumnos en términos de conocimiento matemático. Podemos dar cuenta entonces, de un nuevo caso que muestra que la práctica de análisis de las clases se adquiere participando con otros de la misma.

Con relación a la segunda vía de discusión que reconocemos, es decir al modo de gestionar en clase esta diversidad de estrategias, surgen un sin número de interrogantes: ¿cómo hacer para que se difundan los procedimientos "buenos"?; si un alumno pasa a narrar una estrategia, ¿es productivo que otros niños la tomen y la repliquen?; ¿se estarían "copiando"?; ¿no se inhibe de este modo que todos tengan una producción propia?; o, peor aun, ¿no se corre el riesgo de que mecanice lo que otros compañeros han pensado?; cuando surgen varias estrategias, ¿cómo seleccionamos cuáles trabajamos entre todos y cuáles sólo con los que las produjeron?, ¿la explicación o comprensión de los procedimientos utilizados por aquellos alumnos que se equivocaron o presentan procedimientos más básicos aportaría algo a aquellos que no cometieron esos errores o utilizan procedimientos más económicos? Estas preguntas, surgidas básicamente de las maestras abren a los ojos de nuestro equipo de investigación nuevos matices relativos a la complejidad que tiene para los maestros la gestión de las "puestas en común", a la que difícilmente se accedería sin este intercambio. Uno de los aspectos más ricos con relación a estas preguntas fue, desde nuestro punto de vista, arribar a la conclusión de que, más que admitir respuestas únicas o categóricas, abrir un camino de exploración en las aulas para conocer cómo se van recibiendo en cada caso las intervenciones –sea de los alumnos, sea de las maestras– que explican los procedimientos que emergen en sala de clase.

En este contexto también se elaboran algunas ideas que funcionan como criterios de evaluación de los conocimientos de los niños (por ejemplo, *si los alumnos aplican los procedimientos "copiados" de sus compañeros en otros problemas en los que se cambian los números o las relaciones, podríamos confiar en que los han reconstruido*) o puntos de apoyo para la intervención a partir de la estrategia de un alumno (por ejemplo, *sería interesante desarrollar las ideas implicadas en las estrategias erróneas para considerar con los alumnos sus consecuencias y detectar contradicciones*), o fundamentos para decidir –no siempre de la misma manera– respecto de qué grado de apertura alentar (por ejemplo, *no siempre es conveniente llamar a que "hagan como puedan" para lograr que avancen, para que abandonen los palotes; a veces es necesario orientarlos un poco porque se abruman frente a un gran abanico de posibilidades; pero tienen que entender que no se buscan caminos únicos, el "hagan como puedan" ayuda a que resuelvan con control, entonces, ¿abrimos o marcamos un poco más lo que pueden hacer?*). Es así como se va definiendo como dimensión de análisis el tipo de tratamiento que se da a los procedimientos de los alumnos y se introducen en ella diferentes variables que asumirán distintos valores según el contexto, la situación, los niños, los propósitos.

El análisis compartido sobre procedimientos de los niños y posibles intervenciones de una maestra con relación a un problema "de resta" similar al anterior pero propuesto en otro grado *(Hay que juntar 280 pesos, ya tenemos 135, ¿cuánto falta juntar?)* constituyó, desde nuestra perspectiva, un punto de inflexión en las consideraciones acerca del eje *personal-grupal* que se venían haciendo. En general, se recogieron diversidad de estrategias cuyo análisis ocupó un buen tramo de la reunión. Unos pocos niños sumaron las dos cantidades involucradas y en cierto momento la conversación se focaliza en ese procedimiento. La maestra comenta la dificultad para reconocer que los 135 pesos "son parte" de los 280 pesos que hay que juntar y que intervino con los niños recalcando esa relación (*fijate que vos tenés que juntar 280, pero ya tenés algo, ¿cuánto tenés?*). Es decir, ella subraya una complejidad relativa a este tipo de problemas en lugar de centrarse en la dificultad de los niños (que de hecho existe). Dado que, en el momento en que lo trae al espacio, los niños habían resuelto el problema en sus mesas pero no había ocurrido una instancia de puesta en común, se discute cómo organizarla:

> *M: No. Mi intención era que pasaran tres chicos que hicieron procedimientos variados, poder verlos, poder charlarlo con ellos, pero ahora con lo que estamos charlando.... Ahora, escuchando lo que decimos acá, tal vez pienso que podemos hablar antes de que pasen a hacer los procedimientos, quizás subrayar esto de que los 135 son parte de los 280 para todos, esto que sirvió para los que sumaron.*
> *I: ¿Y eso lo querrías recuperar para todos?*
> *M: Y, sí.*

Entendemos que al haber subrayado en la discusión el valor de la intervención de la maestra que reconoce la complejidad de la relación implicada en el problema, se aprecia el interés de compartirlo con toda la clase y, ya no se piensa en términos del error de *un* alumno. Es decir, empieza a aflorar un criterio por el cual se interpreta que el error de un alumno puede estar mostrando la complejidad de una relación a construir y, en ese sentido, puede resultar interesante discutirlo con todos, hayan o no cometido errores. Este cambio de perspectiva ha sido, desde nuestro punto de vista, central en la constitución de este eje de análisis y consideramos que es una idea didáctica que puede generalizarse más allá de esta situación particular.

3. ¿QUÉ SIGNIFICA AYUDAR A LOS ALUMNOS? ¿CÓMO RECONOCER SUS PROGRESOS?

De una u otra manera estas preguntas fueron recorriendo las reuniones a la vez que su significado se fue transformando a medida que se profundizaban las discusiones. Los distintos tipos de ayudas que se pueden ofrecer a los alumnos, así como las reflexiones más generales que orientan su producción −y que nosotros insistíamos en explicitar como modo de construir fundamentos para la intervención− fueron temas traídos a la mesa de trabajo, siempre apoyados en los episodios de clase que las maestras aportaron. Los análisis también están atravesados en este caso por ese *estado* de transición al que con frecuencia, sobre todo en los primeros intercambios, refieren las maestras: se duda acerca del momento en que se debe ayudar a un niño, se interroga sobre su modo, su pertinencia.

De manera global podemos decir que, con el correr de las discusiones, se va contraponiendo la idea de *guiar* a los alumnos con la de *promover el desarrollo de sus ideas* para interactuar con ellas. Pero esta oposición tiene la intención de favorecer nuestro análisis y no resulta pertinente para interpretar el accionar de las maestras que aparece mucho más matizado y, sobre todo, muchas veces condicionado por el tipo de producción de los alumnos. Veamos.

Algunos docentes conciben la ayuda como una *guía* que se debe proporcionar a los alumnos. El modo en que se hace referencia a la acción de "guiar" parece sugerir que los alumnos con alguna dificultad estarían detenidos en algún punto del camino y la intervención docente aseguraría que continúen –solos o acompañados– para arribar a una meta prevista. Todo ocurre como si se supusiera un recorrido anticipado por las maestras y la guía permitiría ubicar al niño en esa senda e indicarle las acciones a realizar para llegar.

Sin embargo, como intentamos señalar antes, este criterio no es homogéneo en el grupo de maestras y tampoco lo es para una misma maestra frente a situaciones diferentes. Es así como, por ejemplo, cuando se discute en el espacio alrededor de un problema de tipo aditivo, con números de dos cifras (45 y 17, referidas a panes y budines), planteado en un tercer grado, la maestra involucrada da cuenta de diferencias en la índole de ayuda que brindó a distintos grupos de alumnos:

– Frente a la producción de un niño que escribe el 4 (de 45) corrido hacia la izquierda respecto del 1 (de 17), la maestra, probablemente centrada en el algoritmo convencional, le plantea al alumno *si acaso hay 400 panes*. En este caso, le estaría atribuyendo al niño un intento vinculado al algoritmo convencional y, desde esa interpretación, lo estaría *guiando* para que corrija la posición del número 4 y lo ubique en la "columna" de las decenas. No obstante, ninguna traza del trabajo del alumno permite inferir que esté pensando en un procedimiento basado en el valor posicional.
– La maestra relata otro episodio referido al mismo problema: *yo escuchaba que una de las nenas decía a sus compañeros de grupito "mirá, si yo me paro en el 45 y voy para allá"* [refiriéndose a la banda numérica colgada en el pizarrón] *entonces empezaron a contar para atrás. Después les pregunté "¿qué son los 45?, ¿por qué corriste para allá?". Y me contesta*

"estos (45) son los panes y éstos son los que se vendieron". Y por ahí escucho que en el grupito dicen "aah...".

– Un tercer episodio se diferencia, a nuestro juicio, de los anteriores: *un grupito de alumnos sumó y yo les dije, "a ver, si yo tengo panes y los vendo, ¿voy a tener más o voy a tener menos?". Y entonces una nena le dijo a la otra, "¿viste que teníamos que restar?".*

Subrayamos que las tres intervenciones provienen de la misma maestra. En la primera, frente a la disposición "cuenta" que hace el alumno, ella parece dar por sentado que el niño se sitúa en el algoritmo convencional, no lo verifica y lo *guía* para que corrija. A raíz del segundo procedimiento, donde la alumna combina dibujo y conteo, tal vez con la intención de que se introduzcan elementos relativos al sentido de las operaciones –pero sobre la base de una resolución "correcta"– la maestra apunta a que la niña desarrolle sus ideas al pedirle que explicite sus razones. La docente registra –y relata en el espacio– que esta intervención irradió cierta comprensión en el grupito de niños, lo cual contribuye a poner sobre la mesa de trabajo que las explicaciones aportan comprensión aun cuando las resoluciones hayan sido correctas. La tercera intervención, orientada a que los alumnos revisen la operación que eligieron para resolver el problema, se basa en criterios más externos (*si el resultado tiene que ser menor, no tiene sentido sumar*) y no apunta a conocer por qué razones los niños optaron por sumar cuando debían restar.

El ejemplo nos permitiría inferir que no es pertinente atribuirle a un maestro una única posición con relación a sus modos de ayudar, sino más bien subrayar que las posibilidades de interpretación que ofrece la producción de los alumnos, así como el hecho de que sea "correcta" o "errónea", resultan componentes importantes para motorizar el tipo de ayuda.

Un avance en las discusiones llevará a hacer explícita la necesidad de asumir una posición en la que el docente reconoce la necesidad de apuntar al desarrollo de las ideas que subyacen a la producción de los alumnos –correcta o errónea– como condición para interactuar con ellas.

A lo largo de las reuniones se van planteando estrategias de ayuda generales: pedirles a los niños que dibujen, que realicen un esquema de la situación, que subrayen los datos, que anoten. Asimismo, se reconoce que algunas intervenciones a veces son productivas y otras no lo son. Se alude a diversos recursos que no siempre constituyen soportes para orientar a los niños: grillas de números, descomposiciones, billetes y monedas, dibujos.

El asunto que parece estar detrás de estas discusiones es el de articular algunas estrategias generales de ayuda con el contexto particular en el que deben insertarse –ahí el tipo de situación que los alumnos abordan y las producciones que realizan son determinantes-. Es decir, el tema que se empieza a instalar es que apelar a algunos procedimientos que tienen cierto grado de estandarización en las prácticas de enseñanza (que los niños subrayen, relean o dibujen) no le ahorra al docente el trabajo de hacer una interpretación respecto de las ideas que subyacen a la producción de los alumnos como para estar en condiciones de generar verdaderas interacciones.

> M: *Sí. Intentamos ver qué procesos hace y después ver cómo intervenimos nosotros para darle una validación, que tenga un significado.*

Se generan condiciones para que podamos explicitar que las ayudas se basan en supuestos sobre las ideas de los niños, que es necesario tomar conciencia de ello y pensar a través de qué medios el docente puede confirmar sus interpretaciones sobre la producción de los niños y ayudarlos a validarla (Margolinas, 1993). Este es el punto que se empieza a hacer visible a raíz del análisis sostenido de episodios que las maestras aportan a las reuniones.

En este marco, el análisis de las producciones de los alumnos que los docentes aportaban a los encuentros permitió identificar que los niños, en numerosas oportunidades, ponían en juego relaciones que no siempre se reconocían fácilmente. La necesidad de que los alumnos desplieguen sus ideas y de entender qué hicieron o por qué no hicieron como condición para ayudarlos toma cuerpo. Este contexto resulta favorable para que se revisen ciertas estrategias instaladas en algunas docentes:

> M: *Yo no sé bien cómo se hace para que avancen. Yo, frente a un problema, iba dibujando lo que estaba leyendo. Yo, no ellos. Es que a veces tengo quizás esa tendencia a adelantarme yo al dibujo y quizás sería mejor que lo hagan ellos, sería otra instancia.*

La estrategia de promover ayudas entre los alumnos también se analiza a partir de los aportes de las maestras. Es así como se conversa sobre la necesidad de *enseñarles a los niños a ayudar* a sus compañeros, *sin decirles directamente el resultado*. Entendemos que se conciben acá dos direcciones: para el alumno que tiene que elaborar una explicación y que se ve exigido de explicitar las relaciones matemáticas consideradas y, al mismo tiempo, para el alumno que recibe dicha explicación con la expectativa de las maestras de que cuente con más puntos de apoyo para tratar con el problema en cuestión.

Otra dimensión de análisis que se aborda se vincula a la producción de estrategias didácticas frente a respuestas de los alumnos que parecen no asumir como parte de la resolución la validez, pertinencia o coherencia de sus resultados. Al respecto, una maestra comparte su preocupación por el hecho de que varios de sus alumnos actúan, en algunas oportunidades, como si intentaran adivinar los resultados de los problemas, dando respuestas inconsistentes. En algunas reuniones se había discutido cómo contribuir a que los niños se responsabilicen por la validez de sus soluciones y, a raíz de esa cuestión, se había analizado la posibilidad de alentar a que los alumnos estimaran los resultados, dando un rango posible en el que podría encontrarse la solución.

Esta idea es recuperada por la maestra a la que estamos haciendo referencia, quien comenta en el espacio que les propone a sus alumnos un problema y les demanda anticipar cuál podría ser el resultado. Toma la decisión de confrontar a los "chicos con los propios chicos", es decir, los resultados encontrados con sus propias anticipaciones. Está promoviendo de esta manera que los alumnos se hagan una primera representación que –se analiza en el grupo colaborativo– actuaría como marco y punto de apoyo para la resolución de los niños. La confrontación entre lo anticipado y lo obtenido a la vez se transforma en un soporte a partir del cual la maestra puede organizar una discusión. Entendemos que esta estrategia se sostiene en un supuesto: la contradicción en la que incurrirían los niños al constatar las diferencias con lo anticipado es una fuente de producción en la medida en que se generan condiciones para intentar explicarla. Una hipótesis a seguir explorando surge a partir de este episodio: apelar a la anticipación de los alumnos es un tipo de ayuda que en sí misma moviliza ideas de los niños que pueden considerarse como base para la resolución y la validación de los resultados. Se generan condiciones para la producción de herramientas que hagan posible la validación por parte de los alumnos; estas condiciones se ligan a tomar el problema que se resuelve como objeto de análisis.

En el apartado precedente, referimos un episodio en el que una maestra, a raíz de un problema de resta, interviene a nivel de las relaciones involucradas. Lo recuperamos ahora para analizarlo desde el punto de vista de las ayudas. ¨Para el problema en cuestión (*Hay que juntar 280 pesos, ya tenemos 135, ¿cuánto falta juntar?),* la docente interactúa con un niño que sumó las dos cantidades y subraya la relación parte-todo implicada en el problema (*fijate que* *vos tenés que llegar a tener 280, pero vos ya tenés algo, ¿cuánto tenés?).* Entendemos que la maestra asumió que este alumno no estaba identificando la relación existente entre los datos y, desde esa interpretación, interactúa con el alumno. Intervenir a nivel de las relaciones implicadas más que de las acciones a realizar supone, desde nuestro punto de vista, un cambio en los sentidos de las ayudas a los niños que este grupo colaborativo logró producir.

Se analizan en el grupo episodios en los que se hace visible que, al tiempo que se ayuda a los niños, se reconocen sus progresos. Un lema que se hace explícito envuelve estas discusiones: para entender las ideas de los niños hay que intervenir y a la vez esa comprensión da lugar a nuevas intervenciones. En este contexto la ayuda podría entonces interpretarse como una mediación entre ciertos conocimientos de los niños y otros, que constituyen parte de la intención docente, a ser elaborados, modificados, transformados, generalizados.

En una reunión de balance sobre los avances del grupo colaborativo, la cuestión de las ayudas a los niños tuvo un lugar relevante:

M1: Más allá de que esté la hoja en blanco, que la intervención docente lo ayude a aquel que se equivocó...
M2: Igual, ¿qué es la ayuda? Porque es eso lo que uno se está planteando, ¿qué es ayudarlo?
[...]
M2: Sí, lo estoy pensando, revisar qué es ayudar porque quizás nosotros también los ayudábamos. Pero, ¿cómo los ayudábamos a que se metan?
M3: Sí, yo creo que desde todo punto de vista, ayudarlo para que pueda avanzar, pero también ayudarlo a que quiera trabajar, porque si nos quedamos con el que es rápido para las matemáticas y al que le cuesta más o se muestra paralizado...
M: [refiriéndose a un alumno] él fue el que explicó cómo se hacía, entonces es como que la ayuda no es sólo para el alumno, sino también entender lo que el chico está pensando y puede hacer, lo ayuda a él y nos ayuda a nosotros...
M3: Y ayuda a toda la clase.
[...]
M4: Yo creo que es fundamental no perder de vista a los chicos, y los procesos de los chicos.

Sostener la discusión sobre "las ayudas" a lo largo del tiempo, problematizarlas, hizo posible que el espacio de trabajo quedara más cerca de concebirlas como favorecedoras del desarrollo de las ideas de los alumnos, como base para la interacción con ellos, que de entenderlas como guías para la acción. En esta línea se conceptualiza la relación entre algunas estrategias didácticas generales y la necesaria producción por parte del docente que implica su contextualización en un caso específico de intercambio con los alumnos. Asimismo, se identifica que son necesarias en diferentes momentos: para entrar en el juego, para explicitar o reconocer relaciones, para avanzar en ciertos recursos, para explicar decisiones, para provocar confrontaciones y producir ideas a partir de ellas.

Si bien, nos parece claro identificar a las ayudas como intervenciones didácticas específicas, nos hemos preguntado qué las distingue de otras intervenciones. Esta demarcación resulta difusa, cualquier intervención docente podría ser pensada en sentido amplio como una ayuda. Sin embargo, cuando las maestras las han traído al espacio, fue para considerar situaciones que de alguna manera les resultaban extremas. A su vez, fueron estas situaciones las que hicieron más fácilmente visibles condiciones del funcionamiento de la clase en general, amplificando fenómenos que suelen correr más silenciosamente en el aula.

4. LAS MEDIACIONES NECESARIAS PARA LA UTILIZACIÓN DE RECURSOS POR PARTE DE LOS ALUMNOS

Las docentes proponen en sus aulas diferentes tipos de problemas para que los niños movilicen sus propios conocimientos, con la expectativa de que sean punto de apoyo para arribar a las relaciones matemáticas que ellas se plantean enseñar. Sin embargo, muestran preocupación porque consideran que unos cuantos niños despliegan procedimientos muy básicos: dibujos, palitos... Cómo promover que los alumnos dejen de usar dibujos y reconozcan y usen operaciones aritméticas, es considerado un problema de enseñanza sobre el que proponen discutir. Se reconoce que este pasaje de dibujos a números y, más en general, del uso de recursos considerados muy elementales a otros más elaborados, no es automático.

Se comparten en el espacio colaborativo diferentes intervenciones que proponen las maestras en sus aulas y que evidencian la intención de favorecer progresos en los recursos que utilizan sus alumnos: apelar al uso de billetes como soporte del conteo, alentar la descomposición aditiva de números como puente hacia la realización de cálculos, promover el uso de tablas de números ordenados para impulsar la coordinación entre numeración hablada (conteo) y representaciones escritas de los números e incluso sugerir explícitamente el uso de escrituras numéricas en lugar de palitos o dibujos. Se analiza que, al poner en funcionamiento algunos de estos recursos, se hace visible para las docentes la necesidad de otros en los que no habían pensado (*les propuse contar billetes y mientras lo hacían me di cuenta de que muchos no sabían contar de 5 en 5 o de 10 en 10, lo cual me obligó a hacer una actividad para eso).* Episodios como éstos muestran simultáneamente la atención que las maestras prestan al modo en el que los niños responden a las actividades y la disposición que tienen a proponer, *sobre la marcha de la clase*, otras actividades mediadoras cuando reconocen la ausencia de ciertos recursos por parte de los niños. De manera que la relación entre problemas y recursos está presente en el accionar y en la conciencia de las docentes y la discusión en el espacio colaborativo va a permitir profundizarla. Veamos.

En distintas oportunidades varias maestras hacen referencia a que proponen la realización de descomposiciones aditivas de los números con la expectativa de facilitar la entrada en el cálculo:

> M: *Ahora quiero ver si trabajando mucha composición y descomposición de números, y ahí me planteaba si podían hacer cálculos.*

Parecía haber un supuesto en esas expectativas: si, como está muy documentado, la descomposición aditiva basada en la organización decimal de las escrituras numéricas es un recurso que los niños usan para sumar y restar, un paso previo para promover el pasaje al cálculo sería que se ejerciten en la descomposición aditiva de los números en "cienes, dieces y unidades". Sin embargo, las mismas maestras constatan que apelar a las descomposiciones, los billetes y otros recursos no produce de manera inmediata que los alumnos se "vuelquen" al cálculo, lo cual les provoca cierta incomprensión y desconcierto. La discusión en el espacio sobre este asunto contribuye a problematizar los supuestos que subyacen al punto de vista según el cual *hacer descomposiciones* habilita, de manera general, su uso en el cálculo.

> *I: Lo que está apareciendo es que las sumas con dieces, cienes, miles no es algo que los chicos usan solos.*
> *Varias M: No.*
> *M: Yo lo que veo inclusive es que la descomposición la hacemos para enseñar la numeración, porque se hace, lo hacemos, pero después para volcarlo en el repertorio*

de operaciones no lo hacemos (...) y no aprovechamos, no utilizamos este sumar cienes, dieces y después terminamos haciendo el procedimiento tradicional.
I: Si no se enseñan cómo juegan en los cálculos...
[...]
M: Si después de haber aprendido a descomponer los números, los van a poder llevar a resolver un problema.... con estas dos cuestiones a mí me abren más incógnitas... ¿cómo hago para que aprendan a descomponer?, ¿cómo llevan eso a la resolución del problema?

A partir de estas intervenciones en las que se pone de manifiesto que no es lo mismo comprender el funcionamiento de un recurso que usarlo en la resolución de una cuestión específica, se empieza a desarrollar una discusión en la que se plantean dos grandes puntos: a) los recursos, para que sean tales, no deberían aislarse de los problemas para los cuales pueden constituirse en procedimientos de resolución y, b) tal vez sea necesaria la intervención explícita de las docentes para movilizar el uso de estrategias, intervención que muchas maestras parecen eludir por temor a invadir el ámbito de construcción autónoma del niño[9]. En esta discusión se puede apreciar cómo se van entramando de manera coordinada los aportes de investigadores y docentes: al intentar explicar un hecho desconcertante para las maestras con el que se encuentran en sus prácticas (los niños no ponen en juego un recurso *ejercitado*), se vuelve significativa una idea más general según la cual la movilización de un recurso es inescindible de su aprendizaje "en situación".

Como síntesis de estas discusiones se identifica que el avance en los recursos que producen los alumnos requiere, más que de una secuencia lineal de adquisiciones, de un entramado de relaciones matemáticas en el que los niños elaboran de manera coordinada ideas cercanas entre sí: relaciones aritméticas implicadas en las escrituras numéricas, uso de esas relaciones para el cálculo, vínculos entre contar y operar.

En la misma línea –así lo entendemos– de lo ocurrido entre descomposición de los números y uso de esta estrategia para calcular, es decir en la línea de problematizar las diferencias entre las expectativas de las maestras con relación

[9] En las distintas experiencias de trabajo colaborativo que hemos llevado a cabo en nuestra investigación nos hemos encontrado frecuentemente con "temores" de este tipo por parte de las docentes. Entendemos que provienen de una interpretación del constructivismo – probablemente devenida en un cierto "sentido común" – en la que se sostendría que *si el docente* "*dice*"*, el alumno* "*no construye*". Los análisis del grupo colaborativo han permitido visibilizar y poner en cuestión esta idea.

al accionar de los chicos y lo realmente sucedido, ubicamos los análisis realizados en el grupo con relación a un recurso didáctico, frecuente en las prácticas escolares, como es el de "bajar los números" cuando los niños encuentran dificultades para resolver un problema.

En efecto, nuevamente en el marco del trabajo con relación a la resta, una docente comenta que propuso a sus alumnos un problema cuyas cantidades eran números de tres dígitos y que su abordaje pareció paralizar a unos cuantos niños. La docente comparte en el espacio que conversó estas dificultades con una compañera (también integrante del grupo) que le sugirió proponer un problema similar con números de dos dígitos. Esta decisión parece sostenida en el siguiente supuesto: si los alumnos tratan el problema con números más chicos, los recursos y relaciones que allí desplieguen servirían como punto de apoyo para tratarlo con números más grandes.

Varios docentes comparten este modo de *mediar*: bajar los números para que los alumnos puedan atrapar las relaciones matemáticas que subyacen al problema. Sin embargo, las mismas maestras reconocen que no siempre esa mediación *funciona* y que al retomar el problema con números más grandes los alumnos no reutilizan las relaciones que sí movilizaron con un rango de números menor. La docente que inicialmente trajo la cuestión al grupo analiza que tuvo *necesidad* de realizar una puesta en común, desmenuzando las relaciones entre el primer problema y el segundo (con números menores) para que los alumnos pudieran abordarlo. Notemos que los vínculos entre *contar para atrás*, recurso que utilizan los niños cuando los números son relativamente bajos, y restar tampoco eran evidentes para muchos alumnos y que el análisis de los dos problemas en conjunto permite tematizar.

Estos dos episodios que acabamos de compartir nutrieron al espacio de un asunto que continuó siendo tema de discusión: para ser reutilizadas por los alumnos, las mediaciones a las que recurren los docentes requieren la elaboración de relaciones matemáticas –nuevas para los chicos– que muchas veces el docente debe aportar. De manera transversal, la pertinencia de la intervención docente se vuelve a poner sobre la mesa como tema de debate.

5. CONCLUSIONES

Estado de transición e *incertidumbre* fueron *palabras claves* para caracterizar inicialmente el posicionamiento del grupo de docentes de la Escuela 30 al comenzar el trabajo colaborativo. Poco a poco, las discusiones fueron profundizando –desarrollando– el contenido de estas *claves* al tiempo que se iba haciendo visible la complejidad de la enseñanza cuando existe la intención genuina de dar lugar a las ideas de los alumnos en las discusiones matemáticas del aula. El accionar docente se problematiza en términos de *dimensiones de análisis* a tener en cuenta como soporte de las decisiones de enseñanza y también de nuevas *disposiciones* acerca de las cuales los integrantes del grupo no teníamos conciencia plena. Asimismo, el examen de los episodios de las aulas contribuye a poner de manifiesto la gran cantidad de pequeñas relaciones matemáticas constitutivas de los conocimientos que los alumnos deben elaborar y que sólo se pueden reconocer cuando se estudian en profundidad las interacciones en sala de clase en términos de relaciones matemáticas implicadas y, de interpretaciones que las comandan y se hipotetiza acerca de cómo retomarlas e inscribirlas en conceptos más generales.

Los ejes de análisis que fueron emergiendo (intervenciones grupales o personales, tipos de ayudas, mediaciones necesarias para el progreso de los alumnos) en este grupo se fueron reconociendo a partir de considerar como asunto de discusión en el espacio colaborativo las dudas de los distintos participantes, los desconciertos generados por las distancias entre expectativas (de los docentes) y hechos (de las aulas), las diferentes interpretaciones sobre aquello que en principio se manifestaba como incomprensiones de los alumnos, la confrontación entre las distintas decisiones tomadas por las maestras frente a situaciones similares. De ninguna manera pretenden abarcar todas las dimensiones posibles de análisis de la enseñanza de la matemática y, muy probablemente, en otro grupo emergerían otras líneas de análisis en función de los problemas que reconocen los docentes.

Para cada uno de los ejes tratados en este artículo, formulamos a modo de síntesis una pregunta que estructura su contenido: ¿en qué sentido las elaboraciones de un alumno (o de un grupo) –sean correctas o erróneas, hayan apelado o no a modos convencionales de escritura– contribuyen a ampliar las consideraciones sobre el objeto de enseñanza-aprendizaje para el conjunto de la clase (alumnos y docente)?; ¿cuáles son los distintos niveles de intervención que contempla la intención de ayudar a los alumnos?; ¿qué relaciones –qué condiciones– se pueden entablar entre la consideración de un procedimiento, una relación, una forma de representación entendidos como medios de resolución y su utilización efectiva? Notemos que son preguntas que, lejos de derivar en un conjunto de reglas de acción, abren perspectivas de análisis. Las respuestas que se van encontrando, ligadas al contexto particular en el que emergieron, contribuyen a la elaboración de criterios para la acción. Estos criterios, ligan una decisión (de enseñanza) con sus razones (las que se han elaborado en el caso particular) y, justamente por no constituir reglas, no predeterminan el accionar docente ni estandarizan las intervenciones posibles de los maestros (Bednarz, 2013).

Las elaboraciones realizadas a raíz de cada uno de los ejes fueron delineando distintos tipos de intervenciones docentes y a la vez este proceso de problematización dio lugar a tomar conciencia de que la posibilidad de integrar a la enseñanza las ideas de los alumnos está ligada a una *disposición* docente (a ir a *buscar* las ideas de los niños, a interpelarlas, a promover su desarrollo) que, lejos de depender exclusivamente de la voluntad, se va construyendo y consolidando en la medida en que las interacciones en sala de clase se constituyen en asunto de estudio. De manera solidaria con estos posicionamientos se fue registrando cada vez con mayor precisión que los objetos de enseñanza se modifican al proponer esta integración. Como síntesis de estas cuestiones, podríamos decir que la disposición a incorporar las ideas de los niños y la conciencia de que se modifica el objeto de enseñanza se constituyen en dos pilares de la conceptualización que tiene lugar en el espacio.

A medida que el grupo colaborativo consolidaba su constitución, las maestras fueron adoptando una posición exploratoria desde la que proponían estrategias didácticas para abordar problemas que reconocían en la enseñanza, las desarrollaban en sus aulas y recogían material para considerar el funcionamiento de su implementación en el espacio colaborativo. El análisis en el grupo permitió revisar y ajustar las estrategias elaboradas, identificar relaciones y variables que intervienen, tomar conciencia de que el examen minucioso de los sucesos de la clase contribuye a reformular las situaciones que se proponen para los alumnos con la intención de lograr con mayor solidez los objetivos. La idea de que las estrategias que se planean y las intervenciones que se realizan obedecen a supuestos que el análisis permite explicitar va haciendo visible una postura según la cual los proyectos de enseñanza se interpretan como hipótesis a explorar en las aulas y esto fortalece –así lo entendemos– la posición de las maestras como productoras de conocimiento. Fue así como el espacio de colaboración fue tornándose en una referencia explícita para las decisiones didácticas que las maestras tomaban en las clases al tiempo que las interacciones (maestro-alumno-saber) se constituían en la referencia que nutría la construcción del espacio. Esta dinámica hizo posible objetivar cada vez más las discusiones y fue fundamental en el proceso de reconfiguración conceptual de la enseñanza.

Detengámonos en el grado de generalidad que tiene esta reconfiguración y, en qué sentido, podríamos considerar que los conocimientos producidos en el espacio colaborativo podrían retomarse en procesos de formación docente más descontextualizados. Desde nuestro punto de vista, la producción central se refiere a que los ejes de análisis contribuyen a tomar conciencia de dimensiones a considerar y no prescriben acerca de cómo deben plasmarse en cada caso. Digamos también, que estos ejes, surgidos del examen analítico de episodios de las prácticas de enseñanza que las mismas docentes recortaron, no se contraponen en absoluto a otras dimensiones de análisis provenientes de marcos teóricos que venimos sosteniendo los investigadores y que están implicados en los aportes que hacemos al espacio de trabajo; por ejemplo, la consideración de las relaciones entre los problemas que se plantean y las elaboraciones a las que dan lugar, o los modos que adquiere la validación de las resoluciones en la clase o las maneras en las que se distribuyen las responsabilidades por la validez de las afirmaciones, todos estos ejes delineados en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007)). Queremos enfatizar que se trata de dimensiones analíticas que provienen de diferentes modos de problematizar el conocimiento y que no son –pensamos– incompatibles entre sí: uno toma como referencia principal las prácticas de producción de conocimiento matemático y otro, las prácticas de enseñanza de la matemática en el contexto escolar. Una hipótesis que se asoma a partir de nuestro estudio y que necesitará ser explorada con profundidad es que la coordinación entre estas diferentes fuentes de problematización encuentra un lugar posible de realización en el trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. Se trata de un trabajo teórico no desarrollado aún.

El sostener las discusiones durante un período prolongado ha hecho posible retomar aspectos tratados en un cierto momento y resignificarlos a raíz de nuevos asuntos de enseñanza, tanto para encontrar elementos comunes como para establecer diferencias. La misma idea de evolución de los aprendizajes, que fue un hilo estructurador de las reuniones, comporta una dimensión temporal que excede ampliamente el análisis de episodios puntuales. Asimismo, la necesidad de respetar los estilos de cada docente, al tiempo que se asegura a través de la discusión la construcción de acuerdos que comprometen a todo el equipo estuvo presente, sobre todo en las reuniones de balance. Vemos entonces que las dimensiones temporal e institucional se instalan en el grupo colaborativo, haciendo visible la noción del aula como sistema abierto y de la enseñanza como hecho público, entablando un diálogo entre cada episodio y proyecto y, otorgando sostén a la necesidad de la construcción de *lo común*.

Como hemos señalado, aunque no fue el foco de este artículo, nuestro grupo estudia la constitución de la colaboración. La perspectiva de construcción de simetría entre investigadores y docentes propuesta por Sensevy (2011), a la que ya hemos hecho referencia, ha tenido un alto valor heurístico en nuestro proceso de producción. Reconociendo su importancia, queremos señalar que consideramos necesario matizar esta noción para no caer en una visión que nos haga conceptualizar a cada uno de estos dos grupos como homogéneos (*los* docentes y *los* investigadores), lo cual podría comportar el riesgo de que pasaran inadvertidas las diferentes perspectivas de los integrantes de cada grupo, que tan ricas han resultado para potenciar los procesos de discusión.

Finalmente, queremos volver una vez más a la idea de incertidumbre con la que abrimos este artículo. Las maestras de este grupo, al compartir su experiencia en la que han entramado sus análisis, su compromiso y sus preocupaciones, nos han enseñado que existe un punto irreductible (que una de las maestras nombró de manera sabia como *caja negra)*: nunca terminaremos de entender las razones por las que algunos niños no estabilizan las relaciones que parecían comprendidas, no reutilizan las ideas tal como esperábamos o no terminan de entrar en el juego de conocimiento que les proponemos. Esa zona de misterio requiere seguir siendo explorada y sus enigmas nos reúnen y nos motorizan.

6. REFERENCIAS

Bednarz, N. (2004). *Collaborative research and professional development of teachers in mathematics. ICME 10.* (U. o. Monreal, Ed.) Montreal, Canada.

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des rechreches collaboratives en éducation au Québec. In N. Bednarz, *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (pp. 13-29). Paris: L'Harmattan.

Bednarz, N., & Proulx, J. (2010). Développement professionelle des enseignants en mathématiques. In B. De Lièvre, A. Braun, V. Carelle & W. Lahaye, *Éducation et formation. Travail en communautés, collaboration et partenairiats pour le développement professionelle des enseignaints, e-293* (pp. 21-36). Bélgica: Université de Mons.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Del Rey, A. (2012). *Las competencias en la escuela. Una visión crítica sobre el rendimiento escolar.* Buenos Aires: Paidós.

Delprato, M. (2013). *Condiciones para la enseñanza de la matemática a adultos de baja escolaridad.* (Tesis de doctorado no publicada), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Retrieved from https://ansenuza.unc.edu.ar/comunidades/handle/11086.1/809

Fisher, M. (2016). *Realismo capitalista.* Buenos Aires: Caja Negra.

Lave, J. (2001). La práctica del aprendizaje. In S. Chaiklin & J. Lave, *Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto* (pp. 15-45). Buenos Aires: Amorrortu editores.

Margolinas, C. (1993). *De l´importance du vrai et du faux.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Pastré, P., Mayen, P., & Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie 154*, 145-198.

Proulx, J. (2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique: possibilités et excès. In N. Bednarz, *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (pp. 327-349). Paris: L'Harmattan.

Robert, A. (2003). De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). *Didaskalia 22*, 99-116.

Sadovsky, P., Quaranta, M.E., Itzcovich, H., Becerril, M.M., & García, P. (2015). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docenetes. *Educación Matemática, 27*(2), 7-36.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M., Becerril, M., & García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 28*(3), 9-29.

Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril & García. (2015). Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, & D. Fridman, *Prácticas Pedagógicas y Políticas Educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense* (pp. 221-250). Gonnet: Unipe: Editorial Universitaria.

Sadovsky, Quaranta, M., García, P., Becerril, M., & Itzcovich, H. (2018). Los análisis de las intervenciones docentes en el marco del trabajo colaborativo entre investigadores y docentes como puente hacia la inclusión educativa. En A. Pereyra, S. Bernatené, &

D. Fridman, *Los desafíos de la educación inclusiva. Actas del 4o Coloquio Internacional sobre Educación Inclusiva.* (págs. 614-621). Buenos Aires: Unipe Editorial Universitaria.
Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir.* Bruselas: De Broeck.

Patricia Sadovsky
Domicilio: Solier 4869. Villa Domínico
Avellaneda, Buenos Aires
CP 1874
Teléfono: +54 911 3 589 7692

 DOI: 10.24844/EM3102.06

Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado

Construction of a praxeology for teaching in the teacher training institution

Alicia Ruiz-Olarría[1]
Marianna Bosch Casabò[2]
Josep Gascón Pérez[3]

Resumen: Presentamos una metodología para la reconstrucción de praxeologías matemáticas para la enseñanza basada en los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado. Ejemplificamos dicha metodología mediante la construcción de una praxeología para la enseñanza, que surge como respuesta a la cuestión generatriz: "¿Cómo organizar la enseñanza de la modelización funcional elemental en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) y qué papel asignar a la proporcionalidad en dicha organización?". La experimentación se ha llevado a cabo en el Máster oficial de formación del profesorado de secundaria.

Palabras clave: *REI, TAD, praxeología, modelización matemática, formación de profesorado de matemáticas.*

Abstract: We present a methodology for the reconstruction of a mathematical praxeology for teaching based on study and research paths for teacher

Fecha de recepción: 26 de febrero de 2019. **Fecha de aceptación**: 1 de julio de 2019.

[1] Facultad de Formación del Profesorado y Educación. Departamento de Didácticas Específicas. Universidad Autónoma de Madrid, España. alicia.ruiz@uam.es, orcid.org/ 0000-0003-1552-1434

[2] IQS. Universitat Ramon Llull, España. marianna.bosch@iqs.url.edu, orcid.org/ 0000-0001-9756-116X

[3] Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona, España. gascon@mat.uab.cat, orcid.org/ 0000-0001-5570-1144

education. This methodology is illustrated through the construction of a praxeology for teaching that emerges as an answer to the generating question: "How to organize the teaching of about elementary functional modeling at lower secondary school (12-16 years old) and what role can be assigned to proportionality in this organization?" The experimentation took place in the Master for secondary school teacher education.

Keywords: *SRP, ATD, praxeologie, mathematical modeling, teacher training in mathematics.*

1. INTRODUCCIÓN: EL OFICIO Y LA PROFESIÓN DOCENTE

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) ha estado siempre estrechamente relacionada con la formación inicial y continua de los profesores por distintas razones. En primer lugar, porque numerosos profesores forman parte de diversos equipos de investigación que trabajan en el ámbito de la TAD. En segundo lugar, desde el momento en que Chevallard (1985) evidencia el fenómeno de la transposición didáctica, la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye, además, todas las instituciones que participan en este proceso entre las que se cuentan el propio profesorado y aquellas que intervienen en su formación inicial y continua. En tercer lugar, porque algunos investigadores que trabajan en el marco de la TAD se han visto involucrados en la formación del profesorado de los distintos niveles educativos. De ahí, que el desarrollo de esta teoría se haya visto potenciado por los problemas que surgen en dichos procesos de formación y el esfuerzo por aportar elementos de respuesta. No sorprende, pues, que la formación de profesores se considere como uno de los principales ámbitos de estudio e investigación de la TAD.

Por otra parte, aun hoy persiste en amplios sectores de la sociedad –incluida la "noosfera"–, una concepción del oficio docente que conduce a responsabilizar al profesor de los resultados de la enseñanza, puesto que es visto como un pequeño productor independiente que se debe procurar sus recursos de manera individual. En consecuencia, el profesor se ve abocado a considerar que los problemas y dificultades que encuentra en el desarrollo de su profesión provienen, principalmente, de sus limitaciones personales. Si el docente se viera a sí mismo como miembro de una profesión, su oficio cambiaría profundamente al poder identificar varios de los problemas docentes no como limitaciones propias sino como problemas de la profesión. De esta forma, la responsabilidad de buscar respuestas no recaería sobre el profesor, individualmente considerado, sino sobre la profesión como institución, que a su vez debería liderar el cambio en las creencias más arraigadas acerca del oficio docente.

2. EL PROBLEMA DE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EN LA TAD: LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Desde la TAD se propone formular el problema de la formación del profesorado en términos de las praxeologías por enseñar, las praxeologías para la enseñanza y las praxeologías para la profesión, como propone Cirade (2006), con la consideración de lo siguiente:

> ¿Cuáles son las cuestiones cruciales que deben afrontar los profesores en su práctica docente y qué puede hacer la formación para ayudarlos a construir respuestas satisfactorias —en forma de praxeologías— a estas cuestiones? En particular, ¿cómo se generan las cuestiones que están en el origen de las praxeologías matemáticas por enseñar y de las praxeologías matemáticas para la enseñanza? ¿Cuáles son los problemas que constituyen la razón de ser de las praxeologías de la profesión docente?

Si la propuesta del dispositivo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se formula mediante los recorridos de estudio e investigación (REI), con el fin de integrar la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2013), y favorecer el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional, como lo han señalado Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010) y Serrano (2013), parece evidente que una aproximación progresiva al nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo requiera la transformación de las condiciones del trabajo matemático del profesorado y, en particular, un replanteamiento radical del tipo de formación necesaria para la enseñanza de las matemáticas.

Así, el dispositivo para la formación del profesorado que se propone desde la TAD tiene estructura de *recorrido de estudio e investigación* (REI-FP), recorrido que parte de una cuestión problemática para la profesión docente, que denominamos Q_0-FP. El estudio de esta cuestión se va a articular en cinco módulos que constituyen los componentes del REI-FP, con las características que se describen a continuación.

2.0. Módulo M_0: ¿Cómo enseñar un contenido C?

A fin de partir de una cuestión inicial que forme parte de la problemática de la profesión, los REI-FP tienen origen en un determinado ámbito, competencia o contenido matemático *C* –la proporcionalidad, el álgebra elemental, la modelización, etc.– y en un tipo de cuestión que es umbilical para la profesión: "¿Cómo organizar el estudio de *C*?"

Este módulo contiene tanto la construcción de Q_0-FP (su elección y asunción), así como las exploraciones iniciales con vista a elaborar primeros elementos de respuesta, generalmente a partir de los *media* más habituales para los profesores: currículum, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos en la práctica de los gestos básicos del cuestionamiento didáctico:

> ¿Qué es *C*? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba? ¿Por qué hay que enseñarlo? ¿Cuáles son sus razones de ser en la matemática escolar (las establecidas explícita o implícitamente y las potenciales)? ¿Qué propuestas de enseñanza existen? ¿Qué se dice o sabe de ellas?, etc.

Es muy importante que durante todo el REI-FP, estas cuestiones se mantengan vivas, es decir, a la vez presentes y sin respuesta definitiva. Desafortunadamente, no es la actitud habitual en nuestra sociedad, ni en relación con las cuestiones docentes ni en relación con muchas otras. Y. Chevallard (2003) retomaba al respecto algunas afirmaciones totalmente pertinentes del literato francés Maurice Blanchot:[4]

[4] Cita traducida por autores.

> Tendemos a ver el mundo como un conjunto de respuestas a preguntas que pronto olvidaremos. "En los llamados períodos felices, solo las respuestas parecen estar vivas", observa con razón Maurice Blanchot (1907-2003). Por el contrario, ver el mundo como un conjunto de preguntas –posiblemente sin (buenas) respuestas– no sucede espontáneamente [...] Además, la asunción de una pregunta Q puede reducirse a la nada por la imposición demasiado rápida, intempestiva, de la respuesta dogmática R que se adelantaría solamente para ocultar y más tarde olvidar la pregunta, según un mecanismo que Blanchot ha condensado en un valioso aforismo: "La respuesta es el infortunio de la cuestión." Sea como sea, la respuesta R debe considerarse como provisional, un simple medio de satisfacer necesidades perentorias, en un gesto que no es fijo ni cerrado sobre sí mismo, aunque lo provisional pueda parecer durable. Cualquier respuesta a una pregunta debe considerarse como puesta a disposición para su aprovechamiento fértil en forma de deconstrucciones y reconstrucciones: "cuando afirmas, no dejas de cuestionar", enfatizó Blanchot. (Chevallard, 2003, p.7)

Podemos, en definitiva, definir este módulo inicial y transversal del REI-FP como el módulo de la problemática del profesor, donde se parte de una cuestión o de un conjunto de *cuestiones* propias de la profesión para las que se irán elaborando poco a poco elementos de respuesta colectivos y para las que, al final del proceso, cada uno de los profesores deberá también poder aportar sus respuestas personales.

Estas *cuestiones* están en la base de la investigación didáctica ya que tienen que ver con "las razones" que justifican el estudio de un objeto matemático o de un ámbito de la matemática. Por otra parte, y dado que se puede considerar este módulo inicial también trasversal, se espera su enriquecimiento con algunas otras surgidas a lo largo del estudio en los módulos siguientes.

2.1. Módulo M_1: Vivir un REI

En el transcurso del módulo M_0 se espera que aparezca una variedad de respuestas institucionales elaboradas en distintos ámbitos, como propuestas de enseñanza de *C*. Puesto que no es fácil obtener elementos cuestionadores o refundadores de *C*, la herramienta principal disponible en didáctica para este cuestionamiento es el modelo epistemológico de referencia (MER)[5] –relativo a *C*– y las distintas formas

[5] Un MER es una interpretación, en términos praxeológicos, de cierto ámbito de la actividad matemática.

que pueda tomar. Dado que este MER puede sustentar la puesta en marcha de un REI, una posible manera de poner el MER a disposición de los profesores es realizar el REI directamente durante el proceso de formación.

En consecuencia, el objetivo de este módulo es que el estudiante-profesor viva un REI como miembro del sistema didáctico $S(X, Y, Q_1)$ situado en la institución de formación del profesorado, donde X denota la comunidad de estudiantes para profesor, Y los formadores –aquí como directores del estudio– y Q_1 la cuestión a la que deberán aportar su propia respuesta. En esta fase del recorrido de formación, Q_1 es la cuestión generadora del REI llevado a cabo en secundaria.

2.2. Módulo M_2: "Analizar el REI vivido"

La cuestión generatriz Q_2 que dirige esta segunda fase del recorrido de formación debe girar en torno al cuestionamiento matemático-didáctico del REI vivido anteriormente en posición de estudiante.

En este módulo se debe cuestionar y analizar en profundidad la estructura y la dinámica del REI vivido, tanto en lo que respecta a las praxeologías matemáticas construidas efectivamente, como a la organización didáctica de este proceso, en términos de la articulación de los *momentos* y las *dialécticas del estudio*, de los *gestos* y las *técnicas y tecnologías didácticas* que se han puesto en juego, y en términos de las responsabilidades que han asumido los profesores en formación en su papel de estudiantes y el formador en su papel de director del proceso de estudio (Chevallard, 1999). Para llevar a cabo este análisis, los profesores en formación pueden recurrir al material empírico utilizado en el módulo M_0, a los materiales que describen la experimentación realizada previamente con los alumnos de Secundaria[6], así como al material elaborado en su propia vivencia del REI.

Es obvio que, como en todo análisis científico, la elección de las cuestiones que dirigirán el análisis estará guiada por el punto de vista que se tome para realizarlo. En este caso, al igual que en el módulo anterior, el punto de vista lo proporcionan el MER construido en la investigación y los distintos elementos de análisis de los procesos de estudio que proporciona la TAD. El MER muestra las limitaciones del modelo epistemológico dominante en la institución de

[6] En muchas ocasiones el REI vivido por los profesores en formación ha sido previamente experimentado con alumnos de Secundaria.

enseñanza (infantil, primaria, secundaria, ...) y una manera de hacerlo asequible a los profesores en formación, es mediante las cuestiones que de manera explícita se plantean en este módulo.

2.3. Módulo M_3: Diseñar un REI

La cuestión generatriz Q_3 que dirige esta fase del recorrido de formación puede enunciarse así:

> ¿Cómo llevar a cabo la tarea de diseñar un REI para los alumnos de cierta etapa educativa, análogo al vivido, y analizado en las fases anteriores?

Esta cuestión da origen a otras más concretas tales como: (a) ¿qué elementos componen el diseño de un REI?, (b) ¿cuál es el orden más razonable para diseñar cada uno de dichos elementos?, y (c) ¿cómo deben expresarse materialmente dichos elementos del REI?

Los criterios básicos para dar respuesta a estas cuestiones y explicitar un diseño didáctico a priori de un REI análogo al vivido surgen en cierta medida de las respuestas aportadas en los módulos anteriores, teniendo en cuenta que la aplicación de los criterios matemático-didácticos obtenidos no es inmediata.

2.4. Módulo M_4: Gestionar y experimentar un REI

El objetivo de este módulo es doble. Por un lado, dar soporte regular a los profesores que se inician en el diseño y gestión de los REI y, por otro, recoger las cuestiones, dificultades y obstáculos que han podido surgir durante esta gestión. Este trabajo experimental debería proporcionar criterios fundados para modificar el diseño de los REI de cara a nuevas experimentaciones e introducir a los profesores a la problemática ecológica en didáctica, mediante el análisis de las condiciones y restricciones institucionales con que se van a topar.

Aunque todavía no podemos decir gran cosa de este módulo, puesto que son pocas las experimentaciones realizadas (Barquero, Bosch y Romo, 2015, 2018; Florensa, Bosch, y Gascón, 2016), consideramos que es clave por diversos motivos. En primer lugar, porque constituye un ámbito de validación experimental final del REI-FP llevado a cabo y de las nuevas posibles formas de organizar tanto los contenidos matemáticos curriculares como su enseñanza y aprendizaje. En segundo lugar, porque es también una fuente de nuevas cuestiones para proseguir con el estudio, tanto para los profesores que lo experimentan como para los investigadores o formadores. Finalmente, creemos que este módulo puede representar un buen terreno de cooperación entre profesores e investigadores en una perspectiva análoga a la que propone el equipo de la Universidad de Turín dirigido por Arzarello *et al.* (2013).

3. DISEÑO Y DESARROLLO DE UN REI-FP EN TORNO AL PROBLEMA DE LA INTEGRACIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA MODELIZACIÓN FUNCIONAL ELEMENTAL DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Al plantearse la cuestión de la formación del profesorado, parece razonable construir las praxeologías para la enseñanza sobre la base de las praxeologías matemáticas por enseñar reconstruidas y descritas por el correspondiente MER alternativo –el modelo construido en la investigación didáctica–, en lugar de hacerlo a partir de las organizaciones matemáticas escolares habituales. En coherencia con ello, parece obvio utilizar algunos de los REI diseñados y experimentados previamente en la enseñanza secundaria. Asimismo, es necesario delimitar el ámbito institucional donde se situará el problema relativo a la reconstrucción de praxeologías para la enseñanza.

En la investigación llevada a cabo (Ruiz-Olarría, 2015), nos hemos centrado en la formación inicial del profesorado y, más concretamente, en la formación matemático-didáctica que es posible impartir en los estudios del máster oficial (en España) de formación del profesorado de secundaria. Uno de los problemas abordados en esta investigación ha sido el de la construcción y reconstrucción de una praxeología para la enseñanza mediante la puesta en marcha (diseño y gestión didáctica) de los módulos M_0, M_1 y M_2 del dispositivo REI-FP.

Una vez constatados los problemas didácticos asociados al fenómeno de la desarticulación y la pérdida de sentido de la modelización funcional en la educación secundaria obligatoria (ESO) y, muy especialmente, para responder al problema docente en torno a la proporcionalidad, García (2005) y García, Gascón, Ruiz Higueras y Bosch (2006) proponen un MER que sitúa la razón de ser de la proporcionalidad en el ámbito de las modelizaciones funcionales elementales. En concreto, el MER propuesto, parte de la caracterización de diferentes tipos de variación de magnitudes. Para ello, y teniendo en cuenta las restricciones institucionales que provienen de la ESO, se consideran dos magnitudes M y M′ discretas, se parte de un conjunto de cantidades de la primera magnitud que están en progresión aritmética y se analiza el tipo de variación de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud.

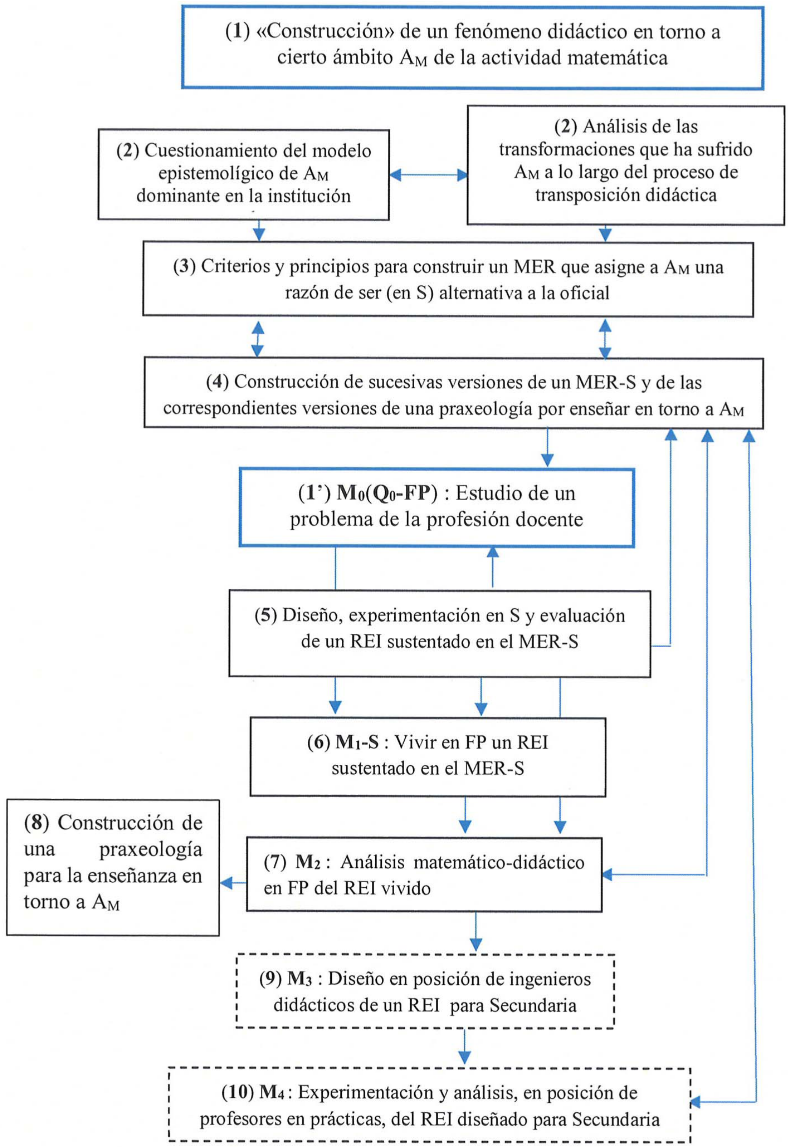
En este punto aparece la necesidad de tomar una decisión que será fundamental en la construcción del MER: ¿Qué criterio utilizar para definir diferentes "tipos de variación"? En la práctica se utiliza el criterio que proporciona la imposición de determinadas condiciones elementales sobre el tipo de variación. Por ejemplo, se define la *condición de equidad* imponiendo que las cantidades correspondientes de la magnitud M′ también estén en progresión aritmética. Y, por extensión, la *condición de diferencias constantes de orden n* imponiendo que las diferencias de orden *n* de la sucesión de imágenes sean constantes.

De esta forma, la relación de *proporcionalidad directa* queda caracterizada como un caso particular de la condición de equidad. En efecto, la relación de proporcionalidad directa cumple la condición de equidad y, además, transforma progresiones geométricas en progresiones geométricas de la misma razón, lo que comporta que cumpla la condición de *linealidad*. Junto a ella aparecen otros tipos de relaciones (afines, cuadráticas, exponenciales, de proporcionalidad inversa, etc.) según el tipo de variación que caracteriza cada tipo de relación.

En definitiva, el MER propuesto en García (2005) integra, mediante la modelización funcional elemental, el estudio de diferentes tipos de sistemas en los que las cantidades de magnitud son susceptibles de variar según las condiciones enunciadas, conformando una organización matemática regional articulada en torno a la teoría de las funciones reales de variable real.

Igualmente, en este mismo trabajo se describe con todo detalle el diseño a priori y la experimentación del REI llevado a cabo con alumnos de la ESO y sustentado en el MER que éste propone, sobre los que nos hemos apoyado para el diseño y la experimentación de los módulos M_0, M_1 y M_2 del REI-FP. En Ruiz-Olarría (2015), se describe con detalle el trabajo relativo al análisis y experimentación de un REI-FP en torno a la proporcionalidad y su integración en la modelización funcional elemental, por lo que en este trabajo nos limitaremos a describir una estrategia encaminada a reconstruir praxeologías matemáticas para la enseñanza, lo que consideramos como uno de los principales frutos de la puesta en marcha de un REI-FP. A continuación, presentamos un esquema (véase figura 1) de las etapas realizadas en la construcción de una praxeología para la enseñanza que se describirán con detalle en la sección 4.

Figura 1. Esquema parcial de la metodología para construir praxeologías para la enseñanza.



4. ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA RECONSTRUIR UNA PRAXEOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA

Como hemos indicado, en Ruiz-Olarría (2015) se describe la estrategia llevada a cabo en un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria para reconstruir una versión de una praxeología matemática para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental (MFE), mediante la experimentación de los Módulos M_0, M_1 y M_2 de un REI-FP.

Dado que la estructura de esta estrategia es aplicable a otros muchos casos, con el fin de reconstruir praxeologías matemáticas para la enseñanza (Licera, 2017), consideramos que la citada estrategia constituye una aportación central en la metodología que propone la TAD para la formación del profesorado. Resumiremos brevemente en lo que sigue sus principales etapas y las relaciones entre ellas, advirtiendo que no es posible establecer una linealidad temporal estricta entre las mismas, puesto que algunas se desarrollan de manera simultánea en la práctica efectiva y, en ciertos casos, se establecen relaciones recíprocas entre etapas debido a que el desarrollo de cada una de ellas provoca modificaciones importantes en el desarrollo de las otras.

Señalaremos cada una de estas etapas con el mismo número que aparece en el esquema adjunto (ver figura 1).

(1) y **(1')** *Dialéctica entre la formulación de un problema de la profesión docente y la toma en consideración de un fenómeno didáctico*

La estrategia puesta en marcha parte de la constatación de un problema de la profesión docente que, en nuestro caso, es el problema relativo al diseño y gestión, en la ESO, de la enseñanza y el aprendizaje de la MFE, incluyendo el papel que juega la relación de proporcionalidad en la matemática escolar (Ruiz-Olarría, 2015). Simultáneamente, dicha estrategia se inicia con la toma en consideración de un fenómeno didáctico emergente en dicho ámbito que se manifiesta en la ausencia de problematización de los sistemas de variación. En la organización matemática escolar, éstos se utilizan de forma transparente y accesoria, lo que permite explicar en parte el aislamiento de la proporcionalidad del resto de relaciones funcionales y las dificultades del currículo (y, por lo tanto, de los profesores) para integrar el estudio de la proporcionalidad en una praxeología regional en torno a la MFE. Esta simultaneidad entre la constatación de un problema de la profesión docente relativo a un ámbito de la actividad matemática escolar, y la toma en consideración de un fenómeno didáctico emergente en dicho ámbito no es meramente una coincidencia temporal. De hecho, la constatación de un problema docente constituye un componente importante de la base empírica para construir el fenómeno didáctico y, recíprocamente, la toma en consideración del fenómeno en cuestión permite replantear el problema docente como un verdadero problema de investigación didáctica.

En nuestro caso, la formulación del problema de la profesión docente se planteó en el módulo M_0 en los términos siguientes:

> Q_0-FP: ¿Cómo organizar la enseñanza de la MFE en la ESO y qué papel asignar a la proporcionalidad en dicha organización?

(2) *Cuestionamiento de la matemática escolar, análisis de los procesos transpositivos y caracterización del modelo epistemológico dominante en Secundaria*

La formulación del fenómeno didáctico citado –ausencia de problematización de los sistemas de variación– y el replanteamiento del problema docente asociado requieren el cuestionamiento de la organización matemática escolar en torno a la MFE y, correlativamente, el análisis de las transformaciones que ha sufrido dicho ámbito a lo largo del proceso de transposición didáctica, para poder caracterizar el modelo epistemológico dominante en la ESO en torno a la MFE. Para llevar a cabo dicho cuestionamiento, la estrategia metodológica requiere que se planteen cuestiones tales como:

> ¿Qué se entiende en dicha institución por MFE? ¿Cuál es la razón de ser "oficial" que la institución escolar le asigna? ¿Qué actividades matemáticas se llevan a cabo en la ESO en las que intervenga la MFE? ¿Cómo se relaciona la proporcionalidad con el resto de las relaciones funcionales elementales que aparecen en la matemática escolar?

En resumen, el objetivo de este cuestionamiento y del correspondiente análisis transpositivo, consiste en indagar el sistema de reglas y principios que regulan la estructura y el funcionamiento de la MFE en el sistema escolar y su relación con la proporcionalidad, esto es, analizar la "economía escolar" (Josep Gascón, 2011) de dicho ámbito de la actividad matemática en la ESO.

(3) *Criterios y principios para construir un MER-S*

El análisis del citado modelo epistemológico dominante en la ESO en torno a la MFE y la clarificación de la consiguiente "razón de ser oficial" que se asigna a dicho ámbito en la matemática escolar aportan, con la ayuda de los instrumentos que proporciona la TAD, algunos criterios y principios necesarios para construir un MER-S, esto es, un MER que asigne en la enseñanza secundaria una razón de ser alternativa (o, según el caso, complementaria) a la razón de ser oficial. Estos criterios y principios se basan esencialmente en el análisis del fenómeno didáctico y, correlativamente, en el estudio del problema de la profesión docente asociado, por lo que su formulación reflejará los nuevos objetivos matemático-didácticos que el MER-S encarnará. Esta explicitación de objetivos matemático-didácticos posibles constituye una de las etapas cruciales de la estrategia metodológica.

En nuestro caso, la nueva praxeología por enseñar redefinida por el MER-S explicita como objetivos didáctico-matemáticos posibles la integración de la problematización de los sistemas de variación, la superación del aislamiento de la proporcionalidad del resto de relaciones funcionales y su integración en una praxeología regional en torno a la MFE.

(4) *Construcción de un MER-S y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar en Secundaria*

La estrategia metodológica continúa con la construcción efectiva de una primera versión del MER-S a partir de los citados principios y criterios, lo que comporta una nueva redefinición de lo que se entiende en la ESO por "modelización funcional elemental", de su relación con la proporcionalidad y de su posición curricular con respecto al resto de áreas de la matemática escolar. En consecuencia, cada versión del MER-S delimita, reestructura y redefine, una praxeología por enseñar en torno a la MFE en la ESO (que puede diferir ampliamente de la praxeología por enseñar oficial). Se supone que esta nueva praxeología por enseñar permitirá llevar a cabo un proceso de estudio que se acerque progresivamente (a medida que se construyen nuevas versiones de la misma) a ciertos objetivos matemático-didácticos determinados de antemano –como así se indica en el punto (3)– y, potencialmente diferentes a los que era posible alcanzar en el ámbito de la actividad matemática escolar –en el caso que nos ocupa, en torno a la MFE, cuando estaba definida y estructurada sobre la base del antiguo modelo epistemológico dominante–. La construcción efectiva del MER-S puede provocar cambios en los criterios y principios que regulan *a priori* su construcción.

(5) *Diseño, experimentación y evaluación de un REI en Secundaria*

Una vez construida en el ámbito de la investigación didáctica una versión del MER-S que, no debe olvidarse, tiene el estatus de hipótesis científica, la estrategia metodológica que estamos describiendo –cuyo objetivo final es reconstruir una praxeología para la enseñanza– continúa con el diseño, experimentación y evaluación en secundaria de un REI sustentado en dicho MER-S. Este REI, que cristaliza en un proceso de estudio con un grupo de alumnos y un profesor concretos en una institución determinada, constituye implícitamente una respuesta a Q_0-FP que puede considerarse surgida de la investigación didáctica. En nuestro caso se trata del REI de los Planes de Ahorro (García, 2005).

Como hemos señalado, cada experimentación y evaluación de un REI sustentado en un MER-S proporciona criterios para contrastar empíricamente el propio MER-S. Esto significa que el análisis *a posteriori* del desarrollo del REI permitirá comprobar hasta qué punto la actividad matemática que encarna dicho MER-S posibilita alcanzar los objetivos matemático-didácticos previstos de antemano. En todo caso, el citado análisis aportará datos para modificar el MER-S.

Suponiendo que se ha construido un MER-S y que se ha experimentado en Secundaria un REI que lo sustenta, la estrategia metodológica que estamos describiendo propugna utilizar la experiencia y los resultados de dicho proceso para diseñar un REI-FP, cuyo objetivo sea posibilitar el estudio de un problema de la profesión, construido a la vez que el MER-S. La formulación de dicho problema y las primeras etapas de su estudio se llevan a cabo en el Módulo M_0, generado por una cuestión Q_0-FP. La primera tarea que propone la estrategia metodológica para empezar a estudiar dicha cuestión consiste en indagar cuál es la respuesta que aporta la institución escolar y, paralelamente, qué otras posibles respuestas están disponibles en otras instituciones como son la investigación didáctica o la formación del profesorado.

Así, como punto de partida del proceso de formación del profesorado llevado a cabo a lo largo del REI-FP, se planteó la cuestión generatriz Q_0-FP de dicho REI-FP. Dicha cuestión se propone en el Módulo M_0 que, en el caso que nos ocupa, se formula, como ya hemos indicado, en los términos siguientes:

> Q_0-FP: ¿Cómo organizar la enseñanza de la MFE en la ESO y qué papel asignar a la proporcionalidad en dicha organización?

Para facilitar la solución de esta cuestión y ayudar a los profesores en formación a iniciar el trabajo de búsqueda de elementos de respuesta disponibles, se decidió acompañarla con el siguiente conjunto de cuestiones derivadas:

> ¿Qué características presenta en la ESO la organización matemática curricular en torno a la modelización funcional elemental? ¿Qué tipos de modelos funcionales aparecen? ¿Cómo se relacionan entre sí? ¿A qué cuestiones viene a responder la modelización funcional elemental en la ESO? ¿Por qué y para qué se introducen los modelos funcionales en la ESO? Esto es, ¿cuál es la razón de ser oficial que la matemática escolar (el currículo y los libros de texto) asigna a los modelos funcionales que aparecen en la ESO? ¿Qué papel desempeña la proporcionalidad con relación al conjunto de modelos funcionales elementales que aparecen en la ESO?
>
> Además de la respuesta del sistema escolar, ¿qué otras propuestas didácticas alternativas existen (en los trabajos de innovación didáctica, en los artículos de investigación, en los materiales de formación del profesorado, etc.) para organizar la enseñanza de los modelos funcionales en la ESO?

Para buscar respuestas disponibles a estas cuestiones, los profesores en formación se pueden valer de cualquiera de los documentos virtuales y materiales que tengan a su disposición: libros de texto, currículo oficial de la ESO, artículos de investigación e innovación didáctica, materiales de formación del profesorado, producciones de la noosfera, su propia experiencia como alumnos, etc. También cabe la posibilidad de que los formadores indiquen algunos de los *media* más accesibles, aunque es de suponer que los estudiantes no tengan dificultades en este ámbito.

El diseño *a priori* de este módulo prevé que la recopilación y análisis preliminar de las respuestas que se aporten a la cuestión Q_0-FP provocará la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas. En particular, la discusión dentro de los grupos de trabajo debe hacer surgir cuestiones relativas al problema de la fundamentación y validación de dichas respuestas y a la propia noción de MFE (ausente en el discurso curricular oficial), así como a las posibles incoherencias internas de las praxeologías matemáticas escolares y a las carencias de componentes praxeológicos que se detectan en los libros de texto.

Con la realización de esta primera tarea, se pretende que los profesores en formación cuestionen las organizaciones matemáticas escolares en torno a la proporcionalidad y la modelización funcional como punto de partida para analizar las organizaciones didácticas asociadas. Se pretende así superar la tendencia a identificar cualquier ámbito matemático (en este caso la MFE) con los contenidos escolares que aparecen habitualmente en los libros de texto.

Como segunda tarea, se propone que cada grupo exponga brevemente al gran grupo sus conclusiones provisionales relativas a su estudio de la cuestión Q_0-FP. En gran grupo se discutirán y contrastarán las diferentes respuestas y se elaborará una caracterización provisional de la organización matemática de la ESO en torno a la MFE.

(**6**) *Módulo M_1: vivir un REI sustentado en un MER-S*

En este Módulo M_1 la estrategia metodológica pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta a Q_0-FP. Como primer paso, este módulo constituye un dispositivo didáctico diseñado para proporcionar a los profesores en formación la posibilidad de vivir en propia carne un REI, sustentado en un MER-S y experimentado previamente en Secundaria. Se pretende que los estudiantes construyan por ellos mismos una respuesta a la cuestión generatriz Q_1 de dicho REI que contenga, en cierta forma, la proporcionada previamente por los alumnos de Secundaria. Para ello se les propone vivir dicho REI en posición de estudiantes. Esto significa que, en primera instancia, deberán construir una respuesta a Q_1 que, en nuestro caso, se materializó en la construcción de una praxeología en torno a los planes de ahorro. Sólo en segunda instancia podrán interpretar, en el Módulo M_2, que el trabajo llevado a cabo para construir esta respuesta puede tomarse como una respuesta provisional a Q_0-FP. Esta respuesta, revisable, relativamente análoga a la proporcionada por la TAD (García, 2005), les proporcionará un punto de vista, un sistema de referencia, desde el cual observar, analizar y evaluar otras posibles respuestas a dicha cuestión.

En el REI-FP experimentado, la cuestión generatriz de este módulo —prácticamente idéntica a la experimentada por García (2005)— se formuló como sigue:

> Q_1: Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un Plan de Ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación

> de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades que deberían aportarse en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar ni cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje. El objetivo final es preparar un informe, que podamos presentar a la dirección del centro, y que ayude, en los años sucesivos, a planificar el ahorro de dinero a vuestros compañeros. Este informe debería dar respuesta a cuestiones tales como: ¿Qué posibles planes o estrategias de ahorro se pueden considerar? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene cada uno? ¿Cómo decidir los plazos, las cantidades a dar en cada plazo, la duración del ahorro, etc.?

Como síntesis del trabajo realizado por los grupos y como primer esbozo de la respuesta conjunta de la comunidad de estudio, se elaboró en gran grupo, bajo la dirección de los formadores, un mapa provisional de planes de ahorro que integra y articula las aportaciones de todos los grupos (véase figura 2).

Este mapa constituye el primer esbozo de una praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental reconstruida por la comunidad de estudio. En dicho mapa aparecen determinadas caracterizaciones de los planes de ahorro (inicialmente mediante la ley recursiva que relaciona cada cuota con la anterior) y, consecuentemente, caracterizaciones de los modelos funcionales asociados a cada tipo de plan de ahorro.

(7) *Módulo M_2: Analizar el REI vivido sustentado en un MER-S*

En esta etapa de la estrategia metodológica que estamos describiendo, los profesores en formación llevan a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido. Para ello, se retoma el problema de la profesión docente descrito mediante la cuestión Q_0-FP, así como las respuestas parciales que los profesores en formación hayan encontrado en el Módulo M_0 a partir de la exploración de los diversos documentos oficiales que tienen a su disposición (incluyendo su propia experiencia como alumnos). Estos datos, junto a una descripción de la respuesta particular a la cuestión Q_0-FP surgida en el ámbito de la investigación didáctica y materializada en el REI experimentado en el cuarto curso de la ESO, constituyen los *media* de los que disponen los profesores en formación para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

Figura 2. Mapa provisional de una praxeología para la enseñanza

En nuestro caso, las cuestiones planteadas para la realización del análisis mencionado fueron:

Q_{21}: ¿Cómo se puede describir la actividad matemática desarrollada para responder a la cuestión Q_1? ¿Cuáles son los elementos matemáticos (nociones, técnicas, propiedades, etc.) utilizados y el procedimiento seguido?

Con el objetivo de precisar el significado de la cuestión Q_{21} se introdujeron algunas cuestiones derivadas para guiar el análisis praxeológico (matemático) del REI vivido:

> ¿Se han analizado y comparado las ventajas e inconvenientes de utilizar unas técnicas (aritméticas, algebraicas, gráficas u otras) para estudiar los planes de ahorro?
>
> ¿Qué papel han desempeñado las técnicas aritméticas a lo largo del proceso de estudio?
>
> ¿En qué momentos concretos del proceso ha surgido la necesidad de utilizar técnicas algebraicas? ¿Qué limitaciones de las técnicas aritméticas se han puesto claramente de manifiesto?
>
> ¿Se han articulado las técnicas algebraicas y las técnicas funcionales a fin de abordar ciertas tareas matemáticas?
>
> Para estudiar los planes de ahorro ¿se han utilizado técnicas gráficas? ¿Cómo se han justificado?
>
> ¿Qué papel ha desempeñado la proporcionalidad en la actividad matemática desarrollada?
>
> ¿Cómo se ha relacionado la proporcionalidad con el resto de relaciones funcionales? ¿Aparece como una relación funcional "especial" o como una más en el conjunto de relaciones funcionales elementales?
>
> ¿Consideráis necesario continuar el proceso de estudio varias sesiones más o, al contrario, tenéis la sensación de haber dedicado un tiempo suficiente al problema de los planes de ahorro?
>
> ¿Cuáles han sido los objetivos del proceso de estudio vivido (aunque de manera incipiente)? Esta cuestión se refiere tanto a los objetivos relativos a los contenidos matemáticos, como a los relativos al tipo de actividad matemática desarrollada.
>
> Por otra parte, se pretendía que los estudiantes comparasen la organización matemática escolar en torno a la modelización funcional –analizada previamente– con la vivida por ellos mismos en el módulo M_1. Por lo tanto, las cuestiones que se plantearon (y que enunciamos a continuación) requerían dos respuestas: la relativa al REI vivido y la correspondiente a la actividad matemática escolar habitual, así como la comparación entre ambas.

> ¿Se estudian, se analizan, se cuestionan, diferentes tipos de relaciones funcionales que pueden relacionar dos o más magnitudes? ¿Se plantean situaciones en las que se tenga que indagar el tipo de variación que relaciona dos magnitudes o, por el contrario, el tipo de relación funcional está normalmente determinado de antemano?
>
> ¿Cuáles son, en cada caso, las cuestiones a las que viene a responder la proporcionalidad? Esto es, ¿cuál es la razón de ser que se asigna a la proporcionalidad?
>
> En el caso de la proporcionalidad, ¿perviven componentes de la organización clásica como, por ejemplo: razón = cociente entre cantidades de magnitud (que no hay que confundir con fracción = cociente entre dos números enteros) y proporción = igualdad entre dos razones que consta de dos medios y dos extremos? En caso afirmativo, explicad el papel que juegan dichos elementos.
>
> ¿Se proponen propiedades de las proporciones (como, por ejemplo, que el producto de medios es igual al producto de extremos) a fin de evitar el uso del instrumento algebraico?
>
> Los problemas de proporcionalidad, ¿son considerados como problemas aritméticos o bien como problemas de modelización algebraico-funcional? ¿Qué relación se establece entre el mundo de la proporcionalidad y el mundo funcional?
>
> ¿Aparece la regla de tres? En caso afirmativo, ¿se interpreta en términos funcionales o bien en términos aritméticos (meramente numéricos)? ¿Existe en los textos un discurso matemático justificativo de la regla de tres o, por el contrario, ésta aparece como una técnica auto-justificada, esto es, como una técnica que no precisa de ningún tipo de justificación exterior porque es culturalmente inteligible y, como tal, se justifica a sí misma porque "funciona"?
>
> ¿Aparecen situaciones problemáticas en las que se pongan claramente de manifiesto las limitaciones de las técnicas aritméticas y la consiguiente necesidad de introducir la herramienta algebraica?
>
> ¿Se presenta la proporcionalidad como una relación más, integrada en el ámbito de un conjunto de relaciones funcionales elementales o, por el contrario, aparece aislada?

Las respuestas de los grupos dan lugar a una versión provisional del MER, esto es, del "esqueleto" del REI de los planes de ahorro, que se amplía con la descripción del proceso de estudio en términos de los "gestos de estudio" y de "ayuda al estudio" llevados a cabo efectivamente a lo largo del recorrido, tanto por parte de los estudiantes como por parte de los formadores. Para ello los estudiantes utilizaron entre otros *media*, la documentación relativa a la experimentación llevada a cabo previamente con el REI de los planes de ahorro con alumnos de cuarto curso de ESO (García, 2005).

La cuestión generatriz de esta fase del segundo módulo se formuló en los términos siguientes:

> *Q_{22}*: ¿Cómo se puede describir la actividad didáctica llevada a cabo en el seno del REI vivido? ¿Qué dispositivos didácticos nuevos han aparecido con relación a la organización didáctica escolar y, en particular, cómo se ha modificado la distribución habitual de las responsabilidades didácticas entre los miembros de la comunidad de estudio?

Y para concretar esta cuestión generatriz y guiar el análisis didáctico del REI vivido se plantearon diez cuestiones derivadas referidas tanto al REI vivido en el módulo M_1 por los profesores en formación como al experimentado previamente con alumnos de cuarto curso de ESO. Cada cuestión requiere, por lo tanto, dos respuestas así como la comparación entre ellas.

> ¿Sobre quienes ha recaído, en cada uno de los REI, la responsabilidad de definir y delimitar el sistema de los planes de ahorro?
>
> ¿Quién ha tomado, en cada caso, la responsabilidad de elegir el modelo matemático utilizado para estudiar dicho sistema?
>
> ¿Qué papel ha desempeñado la cuestión generatriz a lo largo del REI? ¿Se ha mantenido "viva"? ¿Se ha "desvanecido"? ¿Ha permanecido invariante a lo largo del proceso o ha evolucionado?
>
> ¿Quiénes se han responsabilizado de plantear las cuestiones y las tareas iniciales? ¿Qué otras tareas podrían haber surgido de dicha cuestión generatriz? ¿Qué otra posible dirección hubiese podido tomar el proceso de estudio?
>
> ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de decidir en cada momento los medios, los instrumentos, las técnicas más adecuados para proseguir el estudio?
>
> ¿Cómo se ha decidido el tipo de problemas a estudiar en cada momento, así como la dirección que debía tomar el proceso de estudio?
>
> ¿Cómo se ha gestionado el tiempo didáctico? Esto es, ¿con base en qué criterios se ha decidido el tiempo que debía dedicarse a cada tipo de problemas?, ¿con base en qué criterios se ha decidido profundizar en un determinado tipo de problemas o, por el contrario, cambiar la actividad para estudiar otro tipo de problemas?
>
> ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de evaluar los resultados parciales y las respuestas provisionales que han surgido a lo largo del proceso?
>
> ¿Cuál ha sido, en definitiva, el grado de autonomía asumido por los estudiantes a lo largo del REI vivido?

> Uno de los prejuicios más extendidos en el ámbito de la proporcionalidad podría enunciarse como sigue (en forma de "teorema en acto"): "Cuando dos magnitudes se comportan de tal manera que siempre aumentan o disminuyen simultáneamente, entonces son magnitudes directamente proporcionales". ¿Cómo explicar este fenómeno matemático-didáctico?

(8) *Construcción de un MER-FP y de la correspondiente praxeología matemática para la enseñanza*

A partir de los datos proporcionados por el análisis del REI vivido, surgen cuestiones que extienden y pueden contener ampliamente las que forman parte del MER-S y cuyas respuestas aparecen como necesarias, o al menos útiles, para: (a) redefinir la actividad matemática escolar en torno a la MFE (y, en particular, en torno al papel que se asigna a la proporcionalidad); (b) explicitar la razón de ser oficial que se asigna en la enseñanza secundaria obligatoria a dicho ámbito de la actividad matemática; y (c) interpretar adecuadamente la razón de ser alternativa que el MER-S le asigna y relacionar la MFE así redefinida con los diferentes bloques o áreas de la matemática por enseñar y otros ámbitos de la vida escolar y social.

Éstas son algunas de las cuestiones que estructuran una ampliación y complementan relativamente el MER-S que denominamos MER-FP y que se plantean en esta última etapa de la estrategia metodológica.

En nuestro caso, (véase figura 3) las cuestiones que estructuran el MER-S se limitan esencialmente a las tocantes al tipo de relación funcional entre la cuota k-ésima, C_k o el ahorro acumulado S_n y el número n de imposiciones.

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} C_k$$

Con el objetivo de precisar el significado de la cuestión Q_{21} se introdujeron algunas cuestiones derivadas para guiar el análisis praxeológico (matemático) del REI vivido.

En el MER-S las cuestiones se restringen esencialmente a los casos en que las cuotas varían formando una sucesión aritmética o geométrica. En particular, cuando las imposiciones son constantes dan lugar al plan de ahorro equitativo en el que aparece la función de proporcionalidad.

Como desarrollo de esta problemática elemental, muy rica para alumnos de la ESO, surge el problema de la relación entre ambos tipos de funciones en situaciones mucho más generales.

Dado que en los casos elementales citados C_k varía según una relación de recurrencia lineal muy elemental (dada mediante una sucesión aritmética o geométrica), en el MER-FP aparecen, en primera instancia, cuestiones relativas a la relación entre la variación de las cuotas y la variación del ahorro acumulado en el caso en que las imposiciones varían según una *ley de recurrencia aditiva*, $C_{n+1} = C_n + f(n)$, o bien una *ley de recurrencia multiplicativa*, $C_{n+1} = f(n)\cdot C_n$ (donde $f(n)$ es, en principio, una función polinómica). A partir de aquí surge la cuestión no trivial de cómo determinar la evolución de las cuotas (que no tiene por qué ser necesariamente mediante una ley de recurrencia) a partir de una función preestablecida que define la variación del ahorro acumulado, como por ejemplo:

$S_n = c_0 \cdot e^{kT}$ o bien $S_n = c_0 + \sqrt{kT}$

Recíprocamente, dada una ley que caracteriza la evolución de las cuotas como, por ejemplo:

$$C_n = C(1+i)T\cdot n$$
$$C_{n+1} = n\cdot \mathrm{k}\cdot C_n$$
$$C_n = C_{n-1} + n^2\cdot d$$

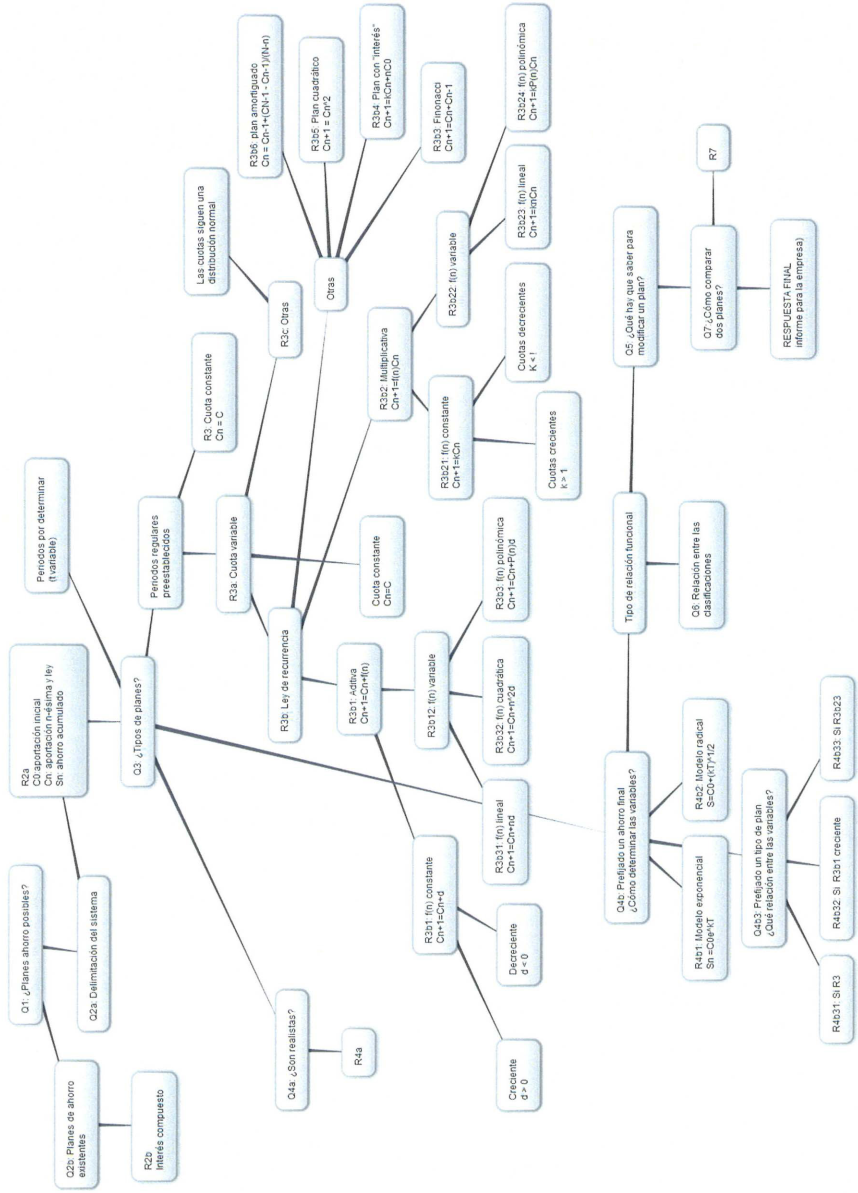
o bien

$$C_{n+2} = C_n + C_{n+1},$$

lo que se propone es determinar la función que describe la evolución del ahorro acumulado.

Esta problemática funcional que estructura el MER-FP y que se materializa en una praxeología matemática para la enseñanza contiene, asimismo, la problemática que hemos denominado del control de los planes de ahorro trabajados o, en el lenguaje de la modelización funcional, la problemática ligada a la construcción de un modelo funcional que cumpla determinadas condiciones (o hipótesis sobre el sistema modelizado) establecidas *a priori*. También forman parte del MER-FP las cuestiones relativas a la comparación de los planes de ahorro o modelos funcionales en cuestión

Figura 3. Mapa desarrollado de los Planes de Ahorro



5. A MODO DE SÍNTESIS: ESTRUCTURA GLOBAL DE UNA ESTRATEGIA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA

Con el objetivo de mostrar que la estrategia descrita hasta aquí constituye únicamente una parte de una estrategia metodológica más amplia, presentamos un esquema de conjunto (ver figura 4) que contiene ampliamente a la que hemos esquematizado en la figura 1.

Este esquema global sigue conteniendo una primera parte de la estrategia que desemboca en el diseño y experimentación de un REI en Secundaria y que comprende las etapas de (1) a (5). Esta subestrategia tiene sentido en sí misma cuando se trata de construir, simplemente, una praxeología matemática por enseñar (por ejemplo, en Secundaria) sin que ésta tenga que utilizarse necesariamente –aunque pueda utilizarse– como una primera etapa de la estrategia encaminada a construir una praxeología matemática para la enseñanza en el ámbito de la formación del profesorado. Se trata precisamente de la estrategia utilizada en García (2005) y que hemos citado ampliamente.

El esquema global amplía al descrito en la figura 1 mediante una estrategia alternativa completa que no requiere pasar necesariamente por el diseño de una praxeología por enseñar en Secundaria, ni por el diseño a priori de un REI y su consiguiente experimentación. En esta estrategia alternativa las etapas (4), (5), (6), (7) y (8) se reemplazan por las etapas (4'), (6'), (7') (8') y (11).

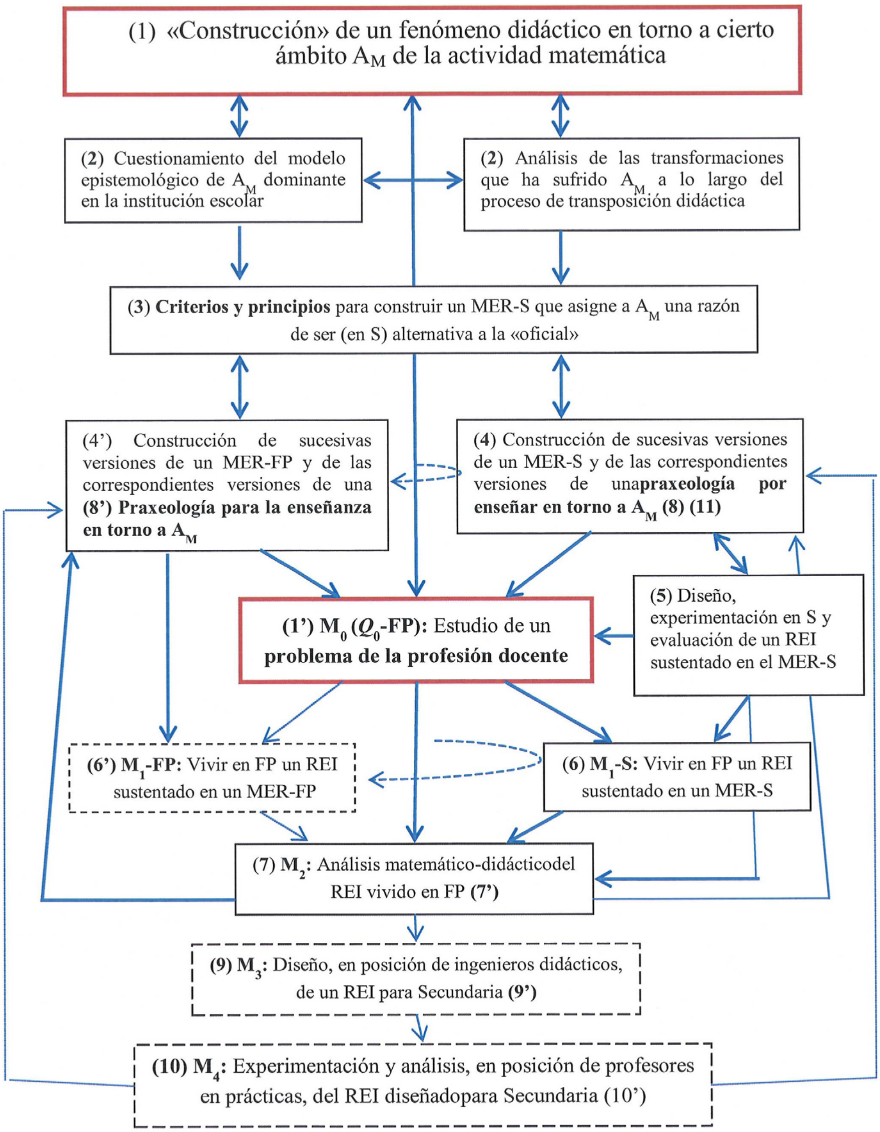
La principal diferencia entre ambas estrategias consiste en que en esta última se construye *directamente* un MER-FP (4') con base en ciertos criterios y principios que sustentarían la construcción de un hipotético MER-S (3), pero sin que este MER se haya construido efectivamente y, por tanto, sin basarse en la experimentación previa de un REI sustentado en él. En base al MER-FP se diseña un REI para ser vivido en la institución de Formación del Profesorado (6') y la correspondiente praxeología para la enseñanza (8').

El primer ejemplo que tenemos de la aplicación completa de esta estrategia alternativa se encuentra en Licera (2017). En este trabajo se diseña y se experimenta un MER-FP y se construye la correspondiente praxeología *para la enseñanza* en torno a los números reales a partir de un esbozo de un MER-S, pero sin basarse en un REI experimentado previamente en Secundaria.

Tenemos, en definitiva, dos estrategias que pueden ser útiles para la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza y que, en cierto sentido, son complementarias. Mientras que la primera descansa en un trabajo previo teórico y experimental en el ámbito de la enseñanza para desembocar en la problemática de la formación del profesorado, la segunda recorre el camino inverso. Pero, en ambos casos, las estrategias pivotan entre la construcción de un fenómeno didáctico en torno a cierto ámbito de la actividad matemática escolar (1) y el estudio de un problema de la profesión docente (1').

Finalmente, pensamos que la construcción de praxeologías para la enseñanza como un esfuerzo cooperativo entre la investigación didáctica y la institución de formación del profesorado, se podrá consolidar en la medida en que su implementación vaya impregnando la formación de los futuros profesores.

Figura 4. Esquema de la metodología para construir praxeologías para la enseñanza



REFERENCIAS

Arzarello, F., Cusi , A., Garuti, R., Malara, N.A., Martignone, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2013). Meta-didactical transposition: a theoretical model for teachers' education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An international Perspective on Technology Focused Professional Development*. (pp. 347-372). Berlin: Springer.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Barquero, B., Bosch, M. & Romo, A. (2015). A Study and Research Path on mathematical modelling for teacher education. En K. Krainer & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 809-815). Prague, Czech Republic.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM*, *50*(1-2), 31-43.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). Enseignement des mathématiques et besoins professionnels. Le cas des élèves-instituteurs. *XVI colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs en mathématiques, Bordeaux*. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2003). Didactique et formation des enseignants. *Journées d'études INRP-GÉDIAPS. Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP* (1983-2003). http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM* (Tesis de doctorado). Université de Provence, Francia.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2016). Lecturer Education: a course design. In 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Jaén. España.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM, 38*(3), 226-246.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 14*(2), 203-231.

Licera, M. (2017) *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formac*ión *del Profesorado*, (Tesis de doctorado no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis de doctorado no publicada). IQS, Universitat Ramon Llull, España.

Alicia Ruiz Olarría

Dirección: Dpto. Didácticas Especíicas
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
28049 Madrid, España

Teléfono: +34 914 974 798

 DOI: 10.24844/EM3102.07

Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales

Development of structure sense in university students through the use of Variation Theory in handling rational algebraic expressions

Rebeca Ascencio Gonzalez[1]
Cristina Eccius-Wellmann[2]

Resumen: Desarrollar un sentido estructural permite al alumno realizar tareas algebraicas de formas más eficientes y menos propensas a errores, por lo que es relevante fortalecerlo. Se presentan en este artículo los resultados de una investigación cuyo objetivo fue desarrollar el sentido estructural en estudiantes universitarios, mediante la elaboración, implementación y prueba de actividades de enseñanza-aprendizaje que, a la par, promuevan el desarrollo de habilidades para simplificar y operar expresiones algebraicas racionales. El diseño de las actividades se basó en la Teoría de la Variación. Se definieron y ponderaron descriptores del sentido estructural, para fines de comparación. Se aplicaron evaluaciones antes y después de la implementación de las actividades, a cuatro grupos experimentales y tres de control. Se observó un incremento del nivel de sentido estructural estadísticamente superior en los grupos experimentales con respecto a los grupos de control. Se comprobó que es posible desarrollar, en mayor medida, el sentido estructural en los alumnos, al incluir, en las actividades que realizan, contrastes y variaciones elegidos con esa intención.

Fechad de recepción: 15 de septiembre de 2018. **Fecha de aceptación**: 24 de abril de 2019.

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México, rebecaascenciog@gmail.com, orcid.org/0000-0002-6082-0284

[2] Universidad Panamericana, Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales, México, ceccius@up.edu.mx, orcid.org/0000-0001-7681-7840

Palabras clave: *Sentido estructural, estructura algebraica, Teoría de la Variación, actividades de enseñanza-aprendizaje, expresiones algebraicas racionales*

Abstract: To develop a structure sense allows a student to perform algebraic tasks in more efficient ways and with fewer errors, so it is relevant to strengthen it. This article presents the results of a study whose objective was to develop the structure sense of university students, through the creation, implementation and testing of teaching-learning activities that, at the same time, achieve the development of skills to simplify and operate rational algebraic expressions. The activities were designed based on Variation Theory. Descriptors of the sense of structure were defined and weighted for comparison purposes. Evaluations were applied before and after the implementation of the activities, to four experimental groups and three control groups. A statistically higher structure sense level was observed in the experimental groups with respect to the control groups. This proved that it is possible to achieve a greater development of the sense of structure in students, through activities that include contrasts and variations chosen intentionally.

Keywords: *Structure sense, algebraic structure, Variation Theory, teaching-learning activities, rational algebraic expressions.*

INTRODUCCIÓN

Al enfrentarse a una tarea algebraica, el alumno puede proceder de distintas formas para realizarla, las cuales han sido estudiadas por diferentes autores. Dichos autores señalan que, de esas formas de proceder, algunas son más eficientes que otras, por implicar un manejo conceptual más profundo y significativo, más reflexivo antes de actuar, procedimientos más cortos y menos propensos al error (Hoch, 2003; Hoch & Dreyfus, 2004; Molina, 2010; Jupri & Sispiyati, 2017). Las formas eficientes requieren de un análisis de la estructura de la expresión, para determinar cuáles serían los procedimientos posibles para trabajar con ella y cuál de ellos sería el mejor. En este sentido, Sfard (2001) considera que, si ser capaz de ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede considerarse la esencia misma del aprendizaje. De entre los distintos nombres que se le han dado a estas formas más eficientes de actuar: sentido de estructura (Linchevski & Livneh, 1999), sentido estructural (Vega-Castro, 2013), razonamiento estructural (Harel, 2013), pensamiento estructural (Mason, Stephens, & Watson, 2009), según el autor que se consulte, para esta investigación se usará el de operar con *sentido estructural*, como lo llama Vega-Castro (2013).

Se pensaría que, al tener identificadas las maneras más eficientes de proceder, y la importancia de que los alumnos las usen, éstas podrían promoverse durante la formación escolar del estudiante y se observarían en sus procesos a su llegada a la universidad. Sin embargo, tanto nuestra experiencia profesional, como diversos artículos consultados, revelan lo contrario. Se han encontrado, por ejemplo, dificultades en el reconocimiento de la estructura de las expresiones algebraicas en alumnos universitarios (Eccius-Wellmann, 2011; Eccius-Wellmann, 2013). A su vez, Chinnappan y Forrester (2014), observaron que los profesores en formación que participaron en su estudio manifestaban un conocimiento más procedimental que conceptual. Godino *et al.* (2015), por su parte, conjeturaron la presencia de carencias formativas en los estudiantes de magisterio, en particular sesgos sobre pensamiento relacional (estructural). Los estudios presentados en este párrafo fueron relevantes para esta investigación por su enfoque en el sentido estructural de alumnos de nuevo ingreso a la universidad. El que algunos hagan referencia a profesores en formación sugiere la conveniencia de realizar investigaciones posteriores, relacionadas con el sentido estructural de profesores en servicio, como la de Jupri y Sispiyati (2017), quienes observaron en siete profesores de matemáticas en servicio una tendencia a operar expresiones algebraicas sin analizar previamente su estructura, aunque, al pedírseles una forma diferente de proceder, mostraron un mayor razonamiento estructural en dicha forma de proceder. El relacionar el sentido estructural de profesores y alumnos queda fuera del alcance de esta investigación.

Sobre el desarrollo del sentido estructural, al observar que los estudiantes con menor habilidad para reconocer las estructuras eran también los de menor desempeño, Lüken (2012) concluye que necesitan diseñarse acciones instruccionales bien fundamentadas para promoverlo en los alumnos, lo cual puede llevar a mejorar sus competencias matemáticas. A este respecto, Vega-Castro, (2010) considera que algunas formas de enseñar promueven más que otras el desarrollo de dicho sentido, aunque no encontró estudios al respecto en su momento. En Vega-Castro, Molina y Castro (2012) las autoras describen el procedimiento que siguieron para evaluar el nivel de sentido estructural en estudiantes de bachillerato, por medio del análisis de los procedimientos seguidos por los participantes. Sugieren considerar como descriptor del sentido estructural, entre otros, el anticipar la utilidad de las transformaciones algebraicas. Consideran que el sentido estructural es un elemento importante para identificar la utilidad de los conocimientos algebraicos básicos (igualdades notables) dentro de otros temas algebraicos (simplificación de fracciones algebraicas).

La identificación de las carencias y necesidades mencionadas y la escasez de propuestas para desarrollar el sentido estructural, motivó la realización de esta investigación, cuyo objetivo fue el desarrollo de dicho sentido en estudiantes universitarios de nuevo ingreso a las carreras administrativas, mediante la elaboración e implementación de actividades de enseñanza-aprendizaje, específicamente en estructuras algebraicas. Para delimitar el estudio, se trabajó con los temas de simplificación y operaciones con expresiones algebraicas racionales y sus prerrequisitos.

Se eligió, como fundamento teórico pedagógico para orientar la construcción de las actividades de enseñanza-aprendizaje, la Teoría de la Variación de Marton (2015). Su enfoque en los contrastes y variaciones se estima adecuado para promover en el alumno el análisis de las estructuras algebraicas antes de trabajar con ellas, como sugieren Banerjee y Subramaniam (2005). Ellos consideran que desarrollar un sentido estructural de las expresiones requiere el uso de procedimientos y reglas en situaciones y contextos variados, que permitan encontrarle el sentido a las relaciones entre los componentes de diversas expresiones que compartan los mismos aspectos estructurales.

En este artículo se da respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo se puede ponderar el nivel de sentido estructural manifestado en los procedimientos algebraicos desarrollados por los alumnos?
- Con base en la ponderación establecida para este estudio, ¿cómo es el promedio del nivel de sentido estructural en los alumnos, al ingresar a la universidad? Por todos los participantes, por grupo y entre grupos.
- Con base en la ponderación establecida para este estudio, ¿cómo es el promedio del incremento del nivel de sentido estructural en los alumnos que trabajaron con las actividades de enseñanza-aprendizaje diseñadas con base en la Teoría de la Variación, en comparación con el incremento del nivel de sentido estructural en los alumnos que trabajaron con actividades que no contemplen dicha teoría pedagógica?

La primera pregunta se responde en el apartado: Metodología / Descriptores del sentido estructural y su ponderación. La segunda y la tercera se responden en el apartado: Resultados / Nivel de sentido estructural manifestado por los alumnos al ingresar y Cambio en el nivel de sentido estructural, respectivamente.

MARCO CONCEPTUAL

Estructural o procedimental

Sobre la forma de operar una expresión algebraica, distintos autores han identificado que está guiada por la forma en que se visualiza la expresión. Los alumnos, al enfrentar una tarea algebraica, pueden centrarse en aspectos de tipo procedimental/operacional/instrumental (ver $a + b$ como una suma que debe realizarse) o estructural/relacional (ver $a + b$ como la expresión de la suma de a más b, o la relación de a y b mediante el operador suma, sin que sea obligatorio realizar dicha suma). La manera de visualizar una expresión algebraica tiene diversas implicaciones.

Por ejemplo, Skemp (1976) señala la importancia de enseñar las matemáticas de forma relacional, en la que el alumno comprenda las relaciones entre los elementos antes de operar. Advierte que es fácil enseñar de forma instrumental (seguir reglas sin razonar), con la que se logran desempeños aceptables rápidamente, aunque no perdurables. Enseñar de forma relacional, por el contrario, tiene las ventajas de permitir adaptar lo aprendido a nuevas tareas y de que el aprendizaje sea más sencillo de recordar. Es conveniente que se logre dejar de ver los operadores como una operación que debiera hacerse (interpretación procedimental) y se le dé a la expresión una interpretación estática (relacional) para que las manipulaciones algebraicas, como las sustituciones de variables, puedan hacerse adecuadamente, como sugiere Freudenthal (1983). Además de los operadores, el signo igual también puede ser visto de forma meramente procedimental, lo cual complica la transición de la aritmética al álgebra. Burgell y Ochoviet (2015) resaltan la importancia de fomentar en los alumnos una visión relacional del signo igual, mediante actividades no estándar.

Se puede tener una concepción operacional de las matemáticas, en la que una entidad es concebida como el producto de un proceso o como el proceso mismo, mientras que en la estructural es concebida como una estructura estática, como un objeto real. La operacional está en las primeras etapas de la formación del concepto y la estructural evoluciona a partir de ella. La operacional es necesaria pero no suficiente para el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras que la estructural facilita todos los procesos cognitivos (Sfard 1991).

Por otro lado, Molina (2010) explica que, si al realizar una operación o resolver una ecuación se emplea un procedimiento estándar aprendido, sin detenerse a analizar las características particulares del ejercicio en cuestión, se trabaja bajo un enfoque procedimental. En cambio, si se realiza un análisis previo de las características particulares de las expresiones (su estructura) y al llevar a cabo la actividad se les toma en cuenta, entonces se trabaja bajo un enfoque estructural. Propone, por tanto, promover el hábito de la observación y el análisis de características particulares de las expresiones antes de iniciar la manipulación, con el fin de fortalecer el enfoque estructural, que permita un trabajo más significativo con expresiones aritméticas y algebraicas y evite algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje y transición entre ambas.

Sentido estructural

Aunque el enfoque procedimental/operacional/instrumental es necesario por sí mismo e indispensable para llegar al enfoque estructural/relacional, los alumnos suelen quedarse en el primero por diversas razones, como las referidas por Skemp (1976) previamente en este texto. Es por ello que las investigaciones más recientes, presentadas a continuación, se han centrado en describir y encontrar formas de promover el enfoque estructural.

El concepto de *sentido de estructura*, introducido por Linchevski y Livneh (1999), abarca las capacidades de reconocer formas equivalentes de una expresión y de identificar las formas apropiadas de realizar una tarea. Posteriormente, Hoch (2003) lo describe como una colección de habilidades, separada de las habilidades manipulativas, que permiten a los estudiantes hacer mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Para ella, las cadenas de símbolos forman estructuras y su interpretación depende del contexto. La conciencia de esas distintas interpretaciones es parte del sentido de estructura. Señala que se denota una falta de dicho sentido al operar sin observar si la estructura permite seguir un proceso más eficiente, como cuando se operan los agrupadores como un primer paso no reflexionado en una transformación algebraica.

La apariencia externa de una expresión revela un orden interno determinado por las relaciones entre las partes que componen su estructura, según Hoch y

Dreyfus (2004), quienes incluyen en la mencionada colección de habilidades: la capacidad de ver una expresión algebraica como una entidad, el reconocer una expresión algebraica como una estructura previamente conocida, sus sub-estructuras, las conexiones mutuas entre estructuras, cuáles manipulaciones son posibles y, finalmente, cuál manipulación es más eficiente.

Más adelante, los mismos autores formularon descriptores para el sentido de estructura, basados en la complejidad de las estructuras algebraicas operadas, desde las más sencillas, con sub-términos simples, las de complejidad intermedia, con sub-términos compuestos por productos, cocientes y potencias y las de mayor complejidad, con sub-términos compuestos, además, por sumas y restas (Hoch & Dreyfus 2006). A esos descriptores Vega-Castro (2013) propone agregar otro que permita distinguir el sentido estructural mostrado cuando las subestructuras pertenecen a una expresión en un solo nivel y cuando pertenecen a expresiones en diferentes niveles, como en numerador y denominador. Ambas propuestas, y las distintas formas de ver el sentido estructural, referidas en este texto, formaron la base para establecer los descriptores usados en este estudio. Para Vega-Castro (2013), por ejemplo, el *sentido estructural* es un conjunto de capacidades necesarias para trabajar flexiblemente con expresiones algebraicas, que implican el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental.

Por su parte, Harel (2013) describe el *razonamiento estructural* como una habilidad combinada de observar estructuras, actuar sobre ellas con un propósito claro y razonar en términos de estructuras generales, no de casos particulares. Harel y Soto (2017) proponen cinco categorías para el razonamiento estructural: generalización de patrones, reducción de una estructura no familiar a una familiar, reconocimiento y operación de acuerdo a la estructura, justificación epistemológica y razonamiento en términos de estructuras generales. Esta categorización presenta algunas similitudes con los descriptores de Hoch y Dreyfus (2006).

Desde su perspectiva, Mason, Stephens y Watson (2009) identifican como *pensamiento estructural* la disposición para explicar, conectar y usar las propiedades de una estructura en el pensamiento matemático. La conciencia de dichas propiedades, que dependen de las relaciones entre sus elementos, es el centro del pensamiento estructural. Al desarrollar la conciencia de la estructura matemática en el alumno, se transforma su pensamiento matemático y su compromiso con la actividad matemática.

Según estos autores, el profesor debe ser capaz de reconocer la estructura matemática para poder lograr que sus estudiantes la disciernan, apoyados en las actividades diseñadas por el docente. Una forma de lograrlo es pedirles a dichos estudiantes que señalen, antes de manipular la expresión matemática, cuáles propiedades de su estructura justifican dicha manipulación. Mencionan que el enfoque procedimental o estructural logrado en los alumnos es una decisión pedagógica, esto es, depende de cómo se lleva a cabo la enseñanza. Consideran que se puede desarrollar el pensamiento estructural al trabajar en tareas que se enfoquen en la naturaleza de la relación en vez del cálculo, para que la atención se oriente hacia los aspectos estructurales como propiedades que aplican en muchas instancias; también al usar ejemplos que bloqueen las rutinas familiares. Algo importante acerca de las relaciones estructurales es no convertirlas en el contenido a ser aprendido, sino tratarlas como conciencia a ser traída a la superficie, preferentemente a través del uso de ejemplos cuidadosamente variados, aunque existen casos en los que es necesario hacer del reconocimiento de las estructuras el centro de la actividad, como en el aprendizaje de los productos notables y la factorización (Hoch & Dreyfus, 2007).

Novotná, Stehlíková y Hoch (2006) concluyen en su estudio con estudiantes universitarios que, si se atribuyen las dificultades de los alumnos a su falta de sentido de estructura, es importante enfocarse en desarrollar dicho sentido en esa etapa educativa. Proponen un modelo para evaluar el sentido de estructura en estudiantes que realizan operaciones binarias de álgebra abstracta, que puede servir de base para atender las carencias mostradas por los alumnos en ese tema. Señalan que los modelos para evaluar el sentido de estructura pueden necesitar adaptarse al tema a trabajar, como fue necesario en esta investigación.

Para realizar este estudio fue preciso determinar una forma de valorar el *nivel de sentido estructural* en los alumnos. Éste se consideró como la suma de las siguientes habilidades: reconocer la estructura algebraica de la expresión que se observa, identificar las manipulaciones que es posible realizar sobre ella, dada su estructura y elegir la más eficiente de todas. Los descriptores establecidos para hacer esa valoración se presentan dentro del marco metodológico.

Teoría de la Variación

La Teoría de la Variación de Marton (2015) está enfocada en las condiciones necesarias para aprender que están relacionadas con el contenido, su elección y secuenciación. Marton y Booth (1997) consideran que adquirir un conocimiento es encontrar nuevas formas de vivir una experiencia relacionada con ese conocimiento. Destacan que una persona ha aprendido un concepto o proceso cuando es capaz de enfocar, de forma simultánea y consciente, aquellos aspectos de ese concepto o proceso que son esenciales a él, dentro de un contexto dado. Mencionan que el aprendizaje es una función del discernimiento, entendido como distinguir, mediante el intelecto, una cosa de otra o varias cosas entre sí, a través de la observación de lo que varía entre ellas.

Los aspectos críticos del objeto de aprendizaje (aquello que se aprenderá) son aquellos que permiten verlo como debe ser visto para ser aprendido de forma adecuada al contexto (Marton, Runesson, & Tsui, 2004). Häggström (2008), menciona que la persona que discierna más aspectos críticos de un objeto y más relaciones entre ellos, podrá hacer uso de ese objeto de mejores formas, comparado con quien haya discernido menos aspectos críticos. Lo (2012) señala que los estudiantes no pueden discernir de forma natural los aspectos críticos, requieren que el profesor les provea las oportunidades de hacerlo, mediante la elección y organización del contenido. Los aspectos críticos toman valores (no necesariamente numéricos) que varían, llamados características críticas. Para un polinomio que se va a factorizar, por ejemplo, el número de términos (dos, tres, cuatro,...) es un aspecto crítico. Aspectos y características críticas son inseparables y, por tanto, se disciernen de forma simultánea.

Según como sea presentado y percibido, un aspecto se puede discernir de formas más o menos precisas, lo cual afectará la forma en que se entiende y se usa. Una forma más precisa se logra mediante patrones de variación e invariación, según propone Marton (2015), quien advierte que, para que un alumno pueda discernir un aspecto crítico de un objeto de aprendizaje, es condición necesaria que lo observe variar. Para el autor, el patrón de variación mínimo, base de los demás, es el contraste, en el que se involucran al menos dos aspectos, uno de los cuales varía y el otro no. El que varía es sobre el que se llama la atención del estudiante, es el que se desea que discierna. Por ejemplo, si se desea enseñar a distinguir un trinomio cuadrado perfecto de uno que no lo es, se pueden mostrar estos trinomios:

$$x^2 - 12x + 36 \qquad\qquad x - 13x + 36.$$

El único aspecto que varía es el coeficiente del segundo término, debido al cual el primer trinomio es cuadrado perfecto (el segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos) y el otro no. Mediante este contraste, el estudiante identifica, específicamente en estos dos ejemplos, cuál sería un segundo término de un trinomio cuadrado perfecto y cuál no.

Los contrastes consecutivos llevan a la separación y a la generalización, considerados también patrones de variación e invariación. Después de observar distintos contrastes similares al anterior, el alumno logra separar aquello que hace que un trinomio cuadrado perfecto lo sea y generalizarlo para identificar trinomios cuadrados perfectos entre diversos trinomios con distintas sub-estructuras. Finalmente, el hacer variar dos o más aspectos a la vez, lleva a un patrón de variación e invariación llamado fusión (Marton, 2015). Por ejemplo, la fusión podría lograrse al distinguir un trinomio cuadrado perfecto de una diferencia de cuadrados. Cambia de trinomio a binomio y de un 36 positivo a negativo:

$$x^2 - 12x + 36 \qquad\qquad x^2 - 36$$

Olteanu y Olteanu (2012), por su parte, sugieren un nuevo patrón de variación e invariación, al que llaman similitud (*similarity*), el cual permite identificar que dos expresiones tienen el mismo significado, es decir, son dos formas, que se ven diferentes, de expresar lo mismo, como en:

$$(a + b)(a - b) \qquad\qquad a^2 - b^2$$

Sumado a la determinación de los aspectos críticos y de los patrones de variación con los que éstos se presentarán a los alumnos, el diseño de una actividad o serie de actividades puede incluir un andamiaje, el cual implica pequeñas variaciones que llevan a pequeños avances en el aprendizaje, graduados por las actividades que dirige el profesor, según señalan Gu, Huang y Marton (2004). Ellos indican que el andamiaje pone énfasis en el proceso y la jerarquía del aprendizaje. Aplicar el andamiaje en el salón, significa que los estudiantes avanzan exitosamente de su nivel actual de conocimiento hacia el siguiente a través de un diseño instruccional efectivo, conocido como *Pudian* en China (Huang & Li, 2017). En la enseñanza con variación en China se hace, además, una distinción entre la variación conceptual y la variación procedimental en el momento de elaborar las actividades. Lai y Murray (2012) observaron cómo las estrategias de variación procedimental apoyaron el aprendizaje significativo en los alumnos, al enfocar intencionadamente, dentro de las actividades que éstos realizan, conexiones sustantivas y no arbitrarias entre conocimientos.

Por su parte, Kullberg, Kempe y Marton (2017), señalan que, mediante el análisis de las actividades de enseñanza-aprendizaje bajo el marco de la Teoría de la Variación se puede identificar lo que será más fácilmente discernible por el alumno, por haber sido adecuadamente enfocado y tematizado, y lo que no. Por lo tanto, este marco permite tanto revisar actividades ya existentes para complementarlas para que incluyan las posibilidades de aprender necesarias, como crear actividades completamente nuevas. En este estudio se dieron ambas situaciones al construir las actividades de enseñanza-aprendizaje con las que trabajaron los grupos experimentales.

El que la Teoría de la Variación esté centrada en el contenido hace que sea adecuada para buscar aprendizajes más ordenados, reflexionados, significativos y con un mayor análisis de las estructuras observadas, que, a la vez, eviten cierto tipo de errores mediante la presentación de contrastes de ejemplos y contraejemplos. En ese sentido, Marton (2015) considera que la gran mayoría de los fallos al entender derivan de que el estudiante no observó las diferencias que era necesario que percibiera. También advierte que, si bien el entendimiento no provoca una acción, una acción expresa el entendimiento. Esto puede interpretarse como que los procedimientos de respuesta de los alumnos a los ejercicios muestran las estructuras que discernieron y los procesos que eligieron debido a dicho discernimiento, es decir, muestran su nivel de sentido estructural.

METODOLOGÍA

Participantes

Para lograr el objetivo de desarrollar el sentido estructural en estudiantes universitarios de nuevo ingreso, mediante la elaboración e implementación de actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de habilidades para simplificar y operar expresiones algebraicas racionales y sus prerrequisitos, se realizó un cuasi-experimento (dado que los participantes no fueron elegidos al azar) con siete grupos de nuevo ingreso a las carreras administrativas de la universidad sede del estudio, que cursaban la materia de Álgebra. Los alumnos de cuatro grupos, 72 en total, trabajaron con las actividades diseñadas para fomentar el sentido estructural con base en la Teoría de la Variación (grupos experimentales). Los de los otros tres grupos, 62 en total, trabajaron de forma habitual, que no contempla actividades basadas en dicha teoría (grupos de control).

Cabe señalar que los alumnos que estudian en la universidad sede de esta investigación provienen, primordialmente, de diferentes bachilleratos de la Zona Metropolitana de Guadalajara, México y de la región noroeste de la República Mexicana. El historial académico de cada estudiante y, por tanto, su nivel de sentido estructural individual al iniciar sus estudios universitarios puede ser muy diverso.

Instrumentos

Los reactivos con los que se valoró el sentido estructural en los estudiantes, los mismos antes y después de realizar las actividades de enseñanza-aprendizaje, incluyeron los temas de productos notables, factorización, simplificación y operaciones con expresiones algebraicas racionales, los cuales forman parte de la currícula previa a la universidad, pero se retoman en la asignatura de álgebra que se cursa en el primer año de universidad para homogeneizar los conocimientos de los alumnos. Sin embargo, las actividades diseñadas incluyeron temas previos (elementos neutros, jerarquía de las operaciones, conformación de los términos en el álgebra, leyes de los exponentes y operaciones con expresiones algebraicas), para promover el desarrollo del sentido estructural a lo largo de más clases y crear un andamiaje en el aprendizaje, en el que los nuevos conocimientos se contrasten con los anteriores gradualmente y en todos ellos se haya fomentado el desarrollo del sentido estructural.

La preparación de las actividades se llevó a cabo durante enero-septiembre 2017 y el trabajo de los alumnos con las mismas se realizó durante agosto-octubre 2017. Se construyeron versiones preliminares, con base en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) y el andamiaje que se promueve en la enseñanza con variación china (Gu *et al.*, 2004). Los contenidos que constituyeron las actividades fueron seleccionados y secuenciados para promover el desarrollo del sentido estructural a la par del aprendizaje del tema, al fomentar el análisis de las estructuras de las expresiones algebraicas antes de trabajar con ellas. Cada actividad se afinó para incluir aquellos aspectos críticos que se manifestaron en la evaluación diagnóstica y que no habían sido previamente considerados.

A continuación se muestran algunos contrastes que se pidió a los alumnos analizar, los cuales apoyan el desarrollo del sentido estructural. En algunos casos sólo se analizan las diferencias entre las estructuras y en otros se analizan las consecuencias que tienen dichas diferencias en la forma de contestar los ejercicios.

Ejemplos de contrastes extraídos de las actividades de enseñanza-aprendizaje

En la tabla 1 se presentan algunos contrastes básicos, que permiten una mejor transición del aritmética al álgebra, al identificar algunas diferencias entre ellas, así como la diferencia entre término y factor y entre reducir y simplificar, con ejemplos y contraejemplos.

Tabla 1. Contrastes básicos

Contraste		El alumno debe contrastar y/o discernir
$3+x$	$3x$	Dos términos *vs* dos factores. No son equivalentes, por lo que $3+x \neq 3x$.
$+3=3$	$3+x \neq 3x$	El $+$, cuando es signo, puede omitirse y, cuando es operador, no.
$a*b=(a)(b)=ab$	$3*5=(3)(5) \neq 35$	El operador multiplicación y los paréntesis en álgebra (al involucrar literales) pueden omitirse, en aritmética no.
$3+8=11$	$3+x=3+x$	En aritmética una suma siempre puede reducirse, en álgebra puede ser necesario dejarla indicada.
$(a+b)(c+d)$	$ab+cd$	Dos factores compuestos por dos términos cada uno *vs* dos términos compuestos por dos factores cada uno.
$\frac{2\cdot3}{2\cdot5}=\frac{3}{5}$	$\frac{2+3}{2+5}=\frac{5}{7}\neq\frac{3}{5}$	Los términos se reducen $2+3=5$ (mismo nivel), los factores se simplifican: $\frac{2}{2}=1$ (distinto nivel).
$\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}$	$\frac{2+x}{2+y}\neq\frac{x}{y}$	Sólo se pueden simplificar factores, no términos.

Fuente: Elaboración propia

En otro tipo de actividad se contrastaron, mediante tablas comparativas que debían completarse, diferentes expresiones con la misma estructura principal.

Se identificaron las subestructuras y se realizaron factorizaciones. La tabla 2 es un ejemplo, con el trinomio cuadrado perfecto como estructura principal. Las variantes de los sub-términos (subestructuras) se basaron en los descriptores de Hoch y Dreyfus (2006).

Tabla 2. Contraste de distintos tipos de subestructuras

$a^2 + 2ab + b^2$	a	b	$(a+b)^2$
$m^6 + 2m^3n^4 + n^8$	m^3	n^4	$(m^3 + n^4)^2$
$\frac{4}{9}x^2 + 2x + \frac{9}{4}$	$a = \frac{2}{3}x$	$b = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)^2$
$(a+b)^2 - 10(a+b) + 25$	$(a+b)$	5	$\left((a+b) - 5\right)^2$
$49w^2 - 14w(xy+z) + (xy+z)^2$	$7w$	$(xy+z)$	$\left(7w - (xy+z)\right)^2$

Fuente: Elaboración propia

Dado que al realizar una simplificación de expresiones algebraicas racionales se presentan diversos procedimientos, tipos de respuestas y posibilidades de error, se realizó una actividad en la que éstos se contrastaron, como se ilustra en la tabla 3.

Tabla 3. Contraste de casos en simplificación de expresiones algebraicas racionales

Caso	El alumno debe contrastar y/o discernir
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 en numerador y denominador.
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)} = x - 1 \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 sólo en numerador (Ojo, el denominador no desaparece ni es igual a 0, es un 1 implícito).
$\frac{(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 sólo en denominador (Ojo: el numerador no desaparece ni es igual a 0, es un 1 que debe escribirse).

$\frac{(x+2)}{(x+2)(x+1)} \neq x+1 \quad para\ x \neq -2$	Contraejemplo del anterior.
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = 1 \quad para\ x \neq -2, x \neq 1$	No quedan factores diferentes de 1. No es igual a 0.
$\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Una vez factorizado queda como el primer caso.
$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \quad para\ x \neq 1$	Evitar cancelar las x como tercer paso.
$\frac{x^2-1}{1-x} = \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \frac{x+1}{-1} = -(x+1) \quad para\ x \neq 1$	Sólo pueden simplificarse factores idénticos.
$\frac{(a+b)x}{a+b} = \frac{(a+b)x}{(a+b)} = x\ \ para\ a \neq -b$ $pero\ \frac{a+bx}{a+b} \neq x$	Identificar correctamente los factores antes de simplificar.
$\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z} = \frac{((x+y)+z)((x+y)-z)}{((x+y)-z)} = x+y+z$	Evitar simplificar erróneamente los términos al cuadrado del numerador con los términos a la primera potencia del denominador. Identificar la diferencia de cuadrados para poder factorizar y, posteriormente, simplificar.

Fuente: Elaboración propia

Realización de la prueba

Para llevar a cabo la prueba de la efectividad de las actividades diseñadas, se comenzó por administrar una evaluación diagnóstica (pre-test), con lápiz y papel, en los siete grupos, el primer día de clases. Posteriormente se trabajó con las actividades en nueve clases no consecutivas, cuando dichas actividades coincidían con el temario general de la materia. Se fomentó el análisis de las estructuras y los procesos algebraicos mediante la observación de las diferencias y similitudes entre, por ejemplo, pares o grupos de expresiones algebraicas y sus correspondientes simplificaciones u operaciones, a través de patrones de variación propuestos con ese fin, como los mostrados en las tablas 1 a 3. Para ello se usó tanto el pizarrón como actividades impresas para contestarse de forma individual o cooperativa, todo supervisado por el docente para que los estudiantes se enfocaran en los aspectos críticos correspondientes. En la clase posterior a la última actividad se aplicó una segunda evaluación (pos-test), idéntica a la diagnóstica. En ambas, cada procedimiento de respuesta de cada alumno fue clasificada según la guía de descriptores diseñada para este estudio, mediante la cual se valuaba el sentido estructural manifestado por la forma particular de proceder, según la ponderación de dichos descriptores, que se muestran en el siguiente apartado, seguidos de la guía de evaluación del reactivo 15, como ejemplo. Los reactivos de la evaluación completa se presentan en el Apéndice.

Descriptores del sentido estructural y su ponderación

Para responder a la primera pregunta de investigación, ¿cómo se puede ponderar el nivel de sentido estructural manifestado en los procedimientos algebraicos desarrollados por los alumnos?, y determinar las características y la ponderación de los descriptores que permitieran evaluar y comparar el sentido estructural manifestado por los alumnos según sus procedimientos de respuesta, se partió de lo propuesto por Hoch y Dreyfus (2006) y Vega-Castro (2013). Se adaptó la forma de interpretar el descriptor sugerido por Vega-Castro (2010) a los reactivos propios de este estudio. Se asignaron valores numéricos que ponderaron el sentido estructural mostrado según la complejidad de las estructuras y subestructuras. Se enlistan y explican a continuación los descriptores, acompañados por la ponderación asignada.

SE1 Reconoce una estructura familiar

SE1 a en su forma más simple (1 punto)

SE2 Trata con un término compuesto (subestructura) como una única entidad y reconoce una estructura familiar en una forma más compleja

SE2 a donde el término compuesto (subestructura) contiene un producto o potencia pero no una suma o resta (2 puntos)

SE2 b donde el término compuesto (subestructura) contiene una suma o resta y posiblemente también un producto o potencia (3 puntos)

SE3 Elige manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura

SE3 a en su forma más simple (4 puntos)

SE3 b donde el término compuesto (subestructura) contiene un producto o potencia pero no una suma o resta (5 puntos)

SE3 c donde el término compuesto (subestructura) contiene una suma o resta y posiblemente también un producto o potencia (6 puntos)

SE4 Distingue subestructuras dentro de una entidad y reconoce relaciones entre ellas (evita errores de interpretación y uso de las relaciones dentro de la estructura)

SE4 a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error pero no contesta la pregunta (7 puntos)

SE4 b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error pero no contesta la pregunta (8 puntos)

SE4 c Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error y contesta la pregunta (9 puntos)

SE4 d Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error y contesta la pregunta (10 puntos)

Cada procedimiento de respuesta fue evaluado según los cuatro descriptores (SE1, SE2, SE3 y SE4), ya sea con la letra (a, b, c, d) correspondiente al descriptor mostrado, con un guion, que significa que no puede manifestarse ese descriptor dado el diseño del ejercicio, o una X, que indica que el procedimiento seguido no muestra ese descriptor, aunque el ejercicio estaba diseñado para que se pudiese mostrar. Para valorarlo numéricamente, tanto el guion como la X contaron como 0 puntos, mientras que las letras contaron los puntos que se señalan en el listado previo, que ponderan el grado de dificultad implicado al mostrar ese descriptor.

Ejemplo de la guía de evaluación

Puede observarse en la tabla 4 un extracto de la guía de evaluación para el reactivo 15 y en los párrafos siguientes la interpretación de la misma.

Se eligió este ejercicio porque incluye subestructuras formadas por sumas y puede ser contestado correctamente de formas distintas, con lo que se revela la estructura observada por el alumno y el uso que le dio. Además, se pueden apreciar algunos prerrequisitos según el procedimiento seguido: factorización de un trinomio cuadrado perfecto, binomio al cuadrado, ley distributiva y reducción de términos semejantes. También permite advertir el error de cancelación de elementos que no son factores. Se muestran en la tabla algunas de las opciones de respuesta para este reactivo, que incluyen los cinco casos para los que se consideró un nivel de sentido estructural mayor o igual a 1, así como los dos casos que contemplan el error de cancelación más común que se puede presentar en un ejercicio con esta estructura.

Tabla 4. Guía de evaluación para el reactivo 15

Planteamiento/ Respuesta		Código	C/S/I	SE1	SE2	SE3	SE4	SE
15) Expresa en la forma factorizada más simple:	$\frac{(x+3)^2-12(x+3)+36}{(x+3)^2}$	A	C	a	b	c/a	d	24
$\frac{\left((x+3)-6\right)^2}{(x+3)^2}$	$\frac{(x-3)^2}{(x+3)^2}$	B	C	a	b	c/a	d	24
$\frac{\left((x+3)-6\right)^2}{(x+3)^2}$	$\frac{(x-3)(x-3)}{(x+3)(x+3)}$	C	C	a	-	X	d	11
$\frac{(x^2+6x+9-12x-36+36)}{(x+3)^2}$	$\frac{x^2-6x+9}{(x+3)^2}=\frac{(x-3)^2}{(x+3)^2}$	D	S	a	-	X	b	9
$\frac{(x+3)^2-12x-36+36}{(x+3)^2}$		E	S	a	-	X	b	9
$\frac{(x^2+6x+9-12x-36+36)}{(x+3)^2}$ $-12(x+3)+36$ $-12(x+3)+36$	$\frac{x^2-6x+9}{x^2+6x+9}$ $-12x$	U	I	X	X	X	X	0
	Otros resultados	UN	I	X	X	X	X	0

Fuente: Elaboración propia

Los procedimientos para llegar a cada respuesta, según su código en la tabla, son:

- A Mejor uso de la estructura al identificar el trinomio cuadrado perfecto como estructura principal. Expresar la respuesta como binomio al cuadrado.
- B Mejor uso de la estructura al identificar el trinomio cuadrado perfecto como estructura principal. Expresar la respuesta como producto de binomios.
- C No elegir el mejor uso de la estructura. Identificar y realizar el binomio al cuadrado, y, posteriormente, reducir y factorizar.
- D Sólo realizar la ley distributiva y no continuar.
- E No expresar en la forma factorizada más simple.
- U Error por cancelar los paréntesis al cuadrado y reducir el resto de la expresión.
- UN Error por cancelar los paréntesis al cuadrado más error de signos o de cálculo al reducir el resto de la expresión.

En el segundo renglón de la tabla se presenta el reactivo. En la primera y segunda columnas se observan los procedimientos considerados, en la tercera su código, en la cuarta, identificada como C/S/I, si dichos procedimientos fueron considerados como respuestas correctas / semi-correctas (avance sin error pero sin terminar) / incorrectas (error inicial/avance inicial correcto con error posterior).

En la última columna se presenta el valor que se le da al sentido estructural reflejado por ese procedimiento, con base en las anteriores cuatro columnas, que corresponden a los cuatro descriptores. Como se señaló en el apartado anterior, un guion (–) implica que con esa respuesta no se esperaba que se mostrara ese descriptor y una X implica que sí se esperaba, pero no se observó el descriptor. Cuando el procedimiento lo permite, puede mostrarse un descriptor más de una vez, por lo que hay columnas que muestran más de una letra.

Por ejemplo, la respuesta A implica que primero se vio el numerador de la expresión como un trinomio cuadrado perfecto en el que uno de los términos es un binomio, lo cual muestra un *SE2 b*. Posterior a la factorización, se redujo la expresión que quedó en el numerador, lo cual muestra un *SE1 a*. El elegir manipulaciones apropiadas para las estructuras percibidas en ambos casos manifiesta un *SE3 c* y *a* respectivamente. Como se contesta correctamente un ejercicio con expresiones en dos niveles, se observa un *SE4 d*. La suma de los valores correspondientes a los descriptores manifestados indica un nivel de sentido estructural de 24 puntos.

Nivel de sentido estructural por reactivo

Se puede observar en la tabla 4 que, al procedimiento de respuesta del reactivo 15 que manifiesta mayor nivel de sentido estructural, le corresponden 24 puntos. Se muestra a continuación, en la tabla 5, el máximo de puntos que pueden manifestarse en cada uno de los quince reactivos que, en total, suman 371 puntos.

Tabla 5. Nivel de sentido estructural máximo que fue posible mostrar en cada reactivo

Reactivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total
SE	23	23	16	22	21	29	13	35	24	24	33	25	30	29	24	371

Fuente: Elaboración propia

Análisis estadístico

Para contestar la segunda pregunta de investigación, se calificó el sentido estructural manifestado por cada alumno en cada reactivo en el pre-test, según la ponderación de los descriptores establecidos, y se obtuvo el promedio por grupo. Con esta información, se realizó una prueba Levene para comprobar la homocedasticidad y una ANOVA para probar la hipótesis de igualdad estadística de las medias de todos los grupos:

$$H_0: \overline{SE}_1 = \overline{SE}_2 = \overline{SE}_3 = \overline{SE}_4 = \overline{SE}_5 = \overline{SE}_6 = \overline{SE}_7$$
$$H_1: \overline{SE}_i \neq \overline{SE}_j, \text{ para algún } i \neq j$$

$\overline{SE}_i$: Media del nivel de sentido estructural en los alumnos del grupo i, para $i = 1,2,3,4,5,6,7$
$\overline{SE}_j$: Media del nivel de sentido estructural en los alumnos del grupo j, para $j = 1,2,3,4,5,6,7$

Posteriormente se calcularon los incrementos de nivel de sentido estructural manifestados por cada alumno en cada grupo (valor en el pos-test menos valor en el pre-test), se promediaron, por grupos experimentales y de control, respectivamente y se realizó una prueba t-student de comparación de medias de muestras independientes para probar la hipótesis correspondiente a la tercera pregunta de investigación:

$$H_0\text{: } \overline{\Delta SE}_E = \overline{\Delta SE}_C$$
$$H_1\text{: } \overline{\Delta SE}_E \neq \overline{\Delta SE}_C$$

$\overline{\Delta SE}_E$: Media del cambio en el nivel de sentido estructural en los alumnos de todos los grupos experimentales.
$\overline{\Delta SE}_C$: Media del cambio en el nivel de sentido estructural en los alumnos de todos los grupos de control.

En caso de rechazo de la hipótesis nula anterior, sería interesante complementar el análisis estadístico mediante una prueba ANOVA de igualdad estadística del promedio del cambio en el nivel de sentido estructural en los grupos, con la hipótesis que se presenta a continuación. Se realizaría una prueba de Levene previa para comprobar la homocedasticidad.

$$H_0\text{: } \overline{\Delta SE}_1 = \overline{\Delta SE}_2 = \overline{\Delta SE}_3 = \overline{\Delta SE}_4 = \overline{\Delta SE}_5 = \overline{\Delta SE}_6 = \overline{\Delta SE}_7$$
$$H_1\text{: } \overline{\Delta SE}_i = \overline{\Delta SE}_j\text{, para algún } i \neq j$$

$\overline{\Delta SE}_i$: Media del cambio del nivel de sentido estructural en los alumnos del grupo i, para $i = 1,2,3,4,5,6,7$
$\overline{\Delta SE}_j$: Media del cambio del nivel de sentido estructural en los alumnos del grupo j, para $j = 1,2,3,4,5,6,7$

Si se diera el rechazo de la hipótesis nula anterior, se realizaría una prueba Duncan, con la que se compararía el promedio del cambio de los siete grupos, para identificar los subconjuntos homogéneos.

En todas las pruebas se usó un nivel de significancia de 5%. Los resultados obtenidos se presentan y discuten a continuación.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Antes de contestar las preguntas de investigación dos y tres se presentan, como ilustración de las problemáticas que se buscaban resolver y del cambio que se buscaba lograr, ejemplos de las producciones de los estudiantes.

Errores observados, relacionados con un sentido estructural poco desarrollado

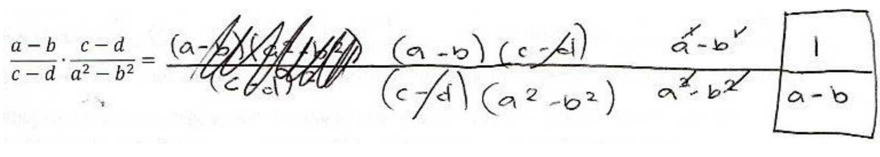
Entre los errores que puede cometer un alumno al contestar un ejercicio, hay algunos que tienen una relación más evidente con un sentido estructural poco desarrollado, es decir, que no distinga las estructuras que observa y/o no sepa cuáles son las manipulaciones válidas según dicha estructura, ni cuál de ellas es la más eficiente. Las actividades diseñadas incluyeron un énfasis en contrastes y variaciones que facilitaran a los alumnos discernir las diferencias estructurales y procedimentales que les permitieran evitar dichos errores.

Un ejemplo es el reacomodo y operación o concatenación errónea de elementos en numerador y denominador. Puede verse un caso específico en la figura 1. En problemáticas similares, en los grupos experimentales se vio una disminución de 58% mientras que en los de control sólo de 20%.

Figura 1. Ejercicio en el que se observa un reacomodo y concatenación erróneos de los elementos

Otro ejemplo son los esquemas de tachado no válidos, en este caso de exponentes. Puede verse una muestra en la figura 2. En los grupos experimentales se vio una disminución de errores de ese tipo de 27%, mientras que en los de control sólo de 5%.

Figura 2. Ejercicio en el que se observa, después de probar con un algoritmo erróneo y reiniciar el procedimiento, una correcta simplificación de factores (c-d), un posterior esquema de tachado erróneo de exponentes, en el que se restan los del denominador menos los del numerador y otro error subsecuente de escribir un único 1 como numerador (además de que se omite el signo igual entre las expresiones)



Un tercer ejemplo son los esquemas de tachado no válidos de términos, los cuales se cancelan. Puede verse un caso en la figura 3. En los grupos experimentales se vio una disminución de 49% mientras que en los de control la disminución fue sólo de 5%. Estos fueron los tres casos en los que fue más notoria la diferencia en la disminución de errores entre ambos grupos.

Figura 3. Ejercicio en el que se observa una cancelación de términos, omitiendo los operadores en numerador y denominador

$$\frac{\cancel{t^2} + 5t - 24}{\cancel{t^2} - 8t + 15} = \frac{5t - 24}{8t + 15}$$

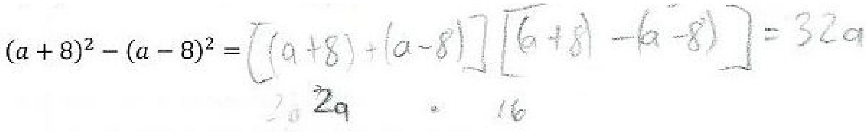
Cambio en el procedimiento seguido

Como ejemplo ilustrativo del cambio observado en la manera de proceder, en la figura 4 se puede observar el reactivo 4 contestado por un alumno que, en el pre-test, muestra poco nivel de sentido estructural (14 puntos, según la guía de evaluación de ese reactivo), ya que comenzó por realizar una acción que le permitiera quitar los signos de agrupación, esto es, expandir los binomios al cuadrado, sin darse cuenta de la estructura externa de diferencia de cuadrados existente. Quitar signos de agrupación como primer paso no reflexionado es común cuando el sentido estructural no está suficientemente desarrollado. En la figura 5 se presenta el mismo ejercicio, contestado por el mismo alumno en el pos-test, en el que manifiesta más uso de sentido estructural (22 puntos), al percibir y aprovechar la estructura de la diferencia de cuadrados.

Figura 4. Ejercicio contestado en el que se manifiesta un menor nivel de sentido estructural

$$(a+8)^2 - (a-8)^2 =$$
$$a^2 + 16a \cancel{+64} \cancel{-a^2} + 16a \cancel{-64} = 32a$$

Figura 5. Ejercicio contestado en el que se manifiesta un mayor nivel de sentido estructural



Aunque el resultado es correcto en ambos casos, se considera que el segundo procedimiento, implica un manejo conceptual más profundo y significativo, más reflexivo antes de actuar y, por tanto, menos propenso al error que el primero (Hoch, 2003; Hoch & Dreyfus, 2004; Molina, 2010; Jupri & Sispiyati, 2017). Esto es, en las figuras 4 y 5 se observa que el trabajo con las actividades propuestas tuvo un efecto positivo en la forma de proceder de este alumno al contestar este ejercicio, lo cual es una muestra del impacto en el cambio en la forma de operar que se logró en los participantes del estudio, según los análisis estadísticos presentados, que se esperaría que afectara en su desempeño en álgebra más allá de este tema.

Nivel de sentido estructural manifestado por los alumnos al ingresar

La segunda pregunta de esta investigación fue: con base en la ponderación establecida para este estudio, ¿cómo es el promedio del nivel de sentido estructural en los alumnos, al ingresar a la universidad? Por todos los participantes, por grupo y entre grupos. A esta pregunta se da respuesta a continuación.

El promedio del nivel de sentido estructural (SE) inicial manifestado por los alumnos de cada uno de los siete grupos en el pre-test, medido según los descriptores adaptados para ese fin dentro de este estudio, se presenta en la tabla 6. Fue importante acreditar que ningún par de grupos tuvieran promedios estadísticamente diferentes en un inicio, por lo que se realizó una prueba ANOVA (tabla 7) que lo comprobó (significancia 0.428). Previamente se probó, mediante una prueba Levene, que se podían asumir varianzas iguales (significancia 0.159).

Tabla 6. Promedio del nivel de sentido estructural inicial

Tipo	Grupo	Cantidad de Alumnos	SE (máximo 371)
Experimentales	1	20	44.35
	2	19	48.79
	3	15	44.67
	4	18	83.39
Control	5	27	39.22
	6	17	45.06
	7	18	37.61

Fuente: Elaboración propia

Dado que el valor máximo que se puede obtener en el test es 371 puntos, los promedios manifiestan un nivel de sentido estructural pobre con el que llegaron estos estudiantes a la universidad. El promedio obtenido por los 134 participantes fue 48.4 puntos, esto es, 13% del máximo posible. Con esta información se evalúa el sentido estructural manifestado por los alumnos al ingresar a la universidad y se responde a la segunda pregunta de investigación.

Tabla 7. Prueba ANOVA sobre la igualdad de medias del nivel de sentido estructural inicial

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	27135.221	6	4522.537	1.000	0.428
Dentro de grupos	574171.205	127	4521.033		
Total	601306.425	133			

Fuente: Elaboración propia en SPSS versión 23

Cambio en el nivel de sentido estructural

La tercera pregunta de esta investigación fue: con base en la ponderación establecida para este estudio, ¿cómo es el promedio del incremento del nivel de sentido estructural en los alumnos que trabajaron con las actividades de enseñanza-aprendizaje diseñadas con base en la Teoría de la Variación, en comparación con el incremento del nivel de sentido estructural en los alumnos que trabajaron con actividades que no contemplen dicha teoría pedagógica? Para contestarla, se calculó el cambio del nivel de sentido estructural manifestado por alumno, mediante la resta de resultados de ambos test. Se presentan los promedios por grupo en la tabla 8. Puede notarse, en la última columna, que todos los grupos incrementaron su promedio.

Tabla 8. Cambio en el nivel de sentido estructural

Tipo	Grupo	SE inicial	SE final	Cambio en SE
Experimentales	1	44.35	167.65	123.30
	2	48.79	211.26	162.47
	3	44.67	179.47	134.80
	4	83.39	258.22	174.83
Control	5	39.22	104.00	64.78
	6	45.06	122.35	77.29
	7	37.61	119.00	81.39

Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se agruparon los datos de todos los alumnos en sólo dos grupos: experimental y control. Se observó que los participantes de los grupos experimentales tuvieron un promedio de incremento superior a los de los grupos de control (tabla 9). La prueba t-student de comparación de medias de muestras independientes mostró que la diferencia de los promedios de incremento en el nivel de sentido estructural es estadísticamente significativa (tabla 10, significancia 0.000). Por la prueba de Levene previa se mantiene el supuesto de varianzas iguales (significancia 0.096).

Tabla 9. Estadísticas de los grupos experimentales y de control en conjunto

	EXCO	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Cambio SE	Experimental	72	148.92	78.812	9.288
	Control	62	73.03	65.063	8.263

Fuente: Elaboración propia en SPSS versión 23

Con la información de las tablas 9 y 10 se contesta a la tercera pregunta de investigación y se rechaza la hipótesis de que los alumnos que usaron las actividades de enseñanza-aprendizaje basadas en la Teoría de la Variación no tuvieron un incremento en su nivel de sentido estructural significativamente diferente que el que tuvieron los participantes que usaron actividades sin esa base.

Tabla 10. Prueba t-student de comparación de medias de muestras independientes

		Prueba de Levene		prueba t para la igualdad de medias			
		F.	Sig	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias
Cambio SE	Se asumen varianzas iguales	2.811	0.096	6.018	132	0.000	75.884

Fuente: Elaboración propia en SPSS versión 23

Para profundizar el análisis estadístico, se llevó a cabo una prueba ANOVA con los promedios de los siete grupos, con la que se confirmó que había al menos un par de ellos cuyas medias no eran estadísticamente iguales (tabla 11, significancia 0.000). Previamente se probó la homocedasticidad, mediante una prueba Levene (significancia 0.119).

Tabla 11. Prueba ANOVA para comparar las medias de los incrementos en el nivel de sentido estructural

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	226934.645	6	37822.441	7.233	0.000
Dentro de grupos	664124.311	127	5229.325		
Total	891058.955	133			

Fuente: Elaboración propia en SPSS versión 23

Mediante una prueba Duncan de subconjuntos homogéneos, se determinó qué grupos formaban subconjuntos entre sí (tabla 12). Se recordará que los grupos 1 al 4 son los experimentales y los grupos 5 al 7 son los de control. Puede observarse que se forman cuatro subconjuntos. En el primer subconjunto están solamente los tres grupos de control. El segundo subconjunto es el único que incluye grupos mezclados de experimentales y de control, pues reúne al grupo 1, cuyos resultados fueron los menores entre los grupos experimentales, con los grupos 6 y 7, cuyos resultados fueron los mayores entre los grupos de control. Los últimos dos subconjuntos están formados sólo por grupos experimentales.

Tabla 12. Prueba Duncan de subconjuntos homogéneos para las medias de los incrementos en el nivel de sentido estructural

			Subconjunto para alfa = 0.05			
	GPO	N	1	2	3	4
Duncan[a,b]	5	27	64.78			
	6	17	77.29	77.29		
	7	18	81.39	81.39		
	1	20		123.30	123.30	
	3	15			134.80	134.80
	2	19			162.47	162.47
	4	18				174.83
	Sig.		0.514	0.068	0.121	0.113

Se visualizan las medias para los grupos en los subconjuntos homogéneos.

a. Utiliza el tamaño de la muestra de la media armónica = 18.604.

b. Los tamaños de grupo no son iguales. Se utiliza la media armónica de los tamaños de grupo. Los niveles de error de tipo I no están garantizados.

Fuente: Elaboración propia en SPSS versión 23

CONCLUSIONES

Vega-Castro, Molina y Castro (2012) se apoyaron en los descriptores del sentido estructural de Hoch y Dreyfus (2006), los complementaron y adaptaron para evaluar el sentido estructural en estudiantes de bachillerato en simplificación de fracciones algebraicas que involucraban igualdades notables. Observaron cómo el nivel de sentido estructural mostrado, que fue alto en 40% de los casos y bajo en 36% de los casos, se veía afectado por el tipo de estructura algebraica usada. En la investigación aquí reportada se partió también de la determinación de las características y la ponderación de descriptores que se usaron para evaluar el nivel de sentido estructural de los alumnos. La aportación de este estudio es la propuesta y puesta a prueba de actividades de enseñanza-aprendizaje, con base en la Teoría de la Variación (Marton, 2015), que fomentaran el desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios, las cuales tuvieron un efecto positivo, como se presentó en el apartado de resultados y se comenta en esta sección.

Los resultados obtenidos en el examen diagnóstico permiten concluir que los alumnos llegan a la universidad con un sentido estructural poco desarrollado, ya que el promedio de su nivel fue 48.4, de 371 puntos posibles (13%). De los 134 alumnos, 112 mostraron menos de 100 puntos al inicio de la investigación (57 de los grupos experimentales y 55 de los grupos de control). Esto es congruente con las investigaciones mencionadas al principio de este texto, en las que los participantes mostraban un proceder más operacional que estructural, probablemente debido a las decisiones pedagógicas de sus profesores anteriores (Hoch 2003, Mason *et al.*, 2009 y Skemp 1976). No se encontró ningún grupo cuyo promedio inicial de nivel de sentido estructural fuera significativamente diferente a algún otro.

Este estudio contribuye, por tanto, a la línea de investigación sobre el sentido estructural al identificar que, aunque se ha escrito en publicaciones anteriores sobre la necesidad de desarrollar el sentido estructural en los alumnos a lo largo de todas sus etapas académicas, la problemática persiste, por lo que los esfuerzos para probar estrategias para resolver dicha problemática, como los realizados en esta investigación, deben continuar.

Al analizar los incrementos en el nivel de sentido estructural manifestados por los participantes, con promedios grupales de 148.92 puntos para los experimentales y 73.03 puntos para los de control, se observa que las clases en general promueven el desarrollo de dicho sentido, sin embargo, en las clases con actividades basadas en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) se pudo lograr un avance significativamente mayor. Incluso en los cuatro subconjuntos homogéneos formados según el promedio de avance mostrado, sólo en el segundo se incluyen grupos combinados: los dos de control con mayor avance con el experimental con menor avance. Los resultados obtenidos después de la intervención son congruentes con lo que se ha reportado sobre lo complejo y tardado que resulta desarrollar el sentido estructural, ya que requiere abstraer las relaciones dentro de una expresión y entre varias expresiones, como concluyeron Banerjee y Subramaniam (2005). Kieran (2018) coincide en que desarrollar la capacidad de ver la estructura es un proceso largo que necesita reinventarse con cada nuevo objeto matemático que se observa.

Cabe agregar que, de los 20 alumnos que obtuvieron más de 300 puntos en el pos-test, 18 fueron de los grupos experimentales. Por otro lado, de los 48 estudiantes que obtuvieron menos de 100 puntos en el pos-test, sólo 17 fueron de los grupos experimentales.

Las actividades usadas en la intervención con los grupos experimentales, basadas en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) y el andamiaje que se promueve en la enseñanza con variación china (Gu *et al.*, 2004), que incluyeron contrastes, variaciones y andamiajes cuidadosamente planeados, mostraron ser significativamente más útiles para integrar intencionadamente el desarrollo del sentido estructural dentro del aprendizaje de diversos temas algebraicos, en comparación con actividades que no tuvieron ese diseño. Aunque los resultados fueron obtenidos al trabajar con expresiones algebraicas racionales y sus prerrequisitos, se considera que pueden conseguirse resultados similares al elaborarse y probarse actividades con diseños semejantes a los usadas en esta investigación, para diversos temas algebraicos, por lo que el aporte a la matemática educativa abarcaría el álgebra en general, no sólo las expresiones mencionadas.

Esta investigación corrobora la presencia de un sentido estructural poco desarrollado en los alumnos de nuevo ingreso a la universidad, lo que sugiere la necesidad de que el desarrollo del mismo sea promovido desde las primeras etapas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con actividades que tengan un diseño con una base similar a la presentada en este estudio, en la que se tomen en cuenta los errores comunes que cometen los alumnos y las características propias de los temas algebraicos para la determinación de los aspectos críticos, los contrastes y los patrones de variación e invariación necesarios para tematizarlos, como propone la Teoría de la Variación (Marton, 2015). Dicha promoción debe continuar durante toda la formación académica de los alumnos, para que éstos aprovechen las ventajas que ofrece el tener un sentido estructural más desarrollado a lo largo de ella y lleguen mejor preparados a la universidad.

La propuesta de intervención a nivel universitario presentada probó ser útil y se considera conveniente continuar esta investigación mediante la elaboración de actividades de enseñanza-aprendizaje para el resto de los temas del curso, con el fin de lograr un desarrollo del sentido estructural aún mayor, en beneficio de los alumnos.

REFERENCIAS

Banerjee, R., & Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121–128). Melbourne: PME.

Burgell, F., & Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 77. doi:10.5565/rev/ensciencias.1561.

Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 871–896. doi:10.1007/s13394-014-0131-x

Eccius-Wellmann, C. C. C. (2011). Implications of a lack in structure sense for business school students. En *Proceedings of the 6th Annual Meeting of the Academy of Business Education*. Orlando, USA.

Eccius-Wellmann, C. C. C. (2013). The role of structure sense in recognizing term structure. En C. O. Trejo-Pech, R. Manley, & A. Jaiswal-Dale (Eds.), *Proceedings of the XII International Business and Economy Conference* (Vol. 12, pp. 114–125). Caen, France.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Godino, J. D., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernandez, T., Neto, T., … Lasa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *33*(1), 127–150.

Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A chinese way of promoting effective mathematics learning. En L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (Vol. 1, pp. 309–347). Singapore: World Scientific.

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* (Doctoral thesis). University of Gothenburg, Göteborg, Sweden. Recuperado de https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/17286

Harel, G. (2013). Dnr-based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, *3*(2), 2–61. doi:10.5642/jhummath.201302.03.

Harel, G., & Soto, O. (2017). Structural reasoning. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 225–242. doi:10.1007/s40753-016-0041-2

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1–3). Bellaria, Italia.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). Bergen, Norway.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305–312). Prague, Czech Republic.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta, P. Philipou, & G. Philipou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 436–445). Larnaca, Cyprus.

Huang, R., & Li, Y. (Eds.). (2017). *Teaching and learning mathematics through variation: Confucian heritage meets western theories*. Rotterdam: Sense Publishers.

Jupri, A., & Sispiyati, R. (2017). Expert strategies in solving algebraic structure sense problems: The case of quadratic equations. *Journal of Physics: Conference Series*, *812*, 012093. doi:10.1088/1742-6596/812/1/012093

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: a fundamental path to developing early algebraic thinking. En *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 79–105). Springer, Cham.

Kullberg, A., Kempe, U. R., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM*, *49*(4), 559–569. doi:10.1007/s11858-017-0858-4

Lai, M. Y., & Murray, S. (2012). Teaching with Procedural Variation: A Chinese Way of Promoting Deep Understanding of Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–25.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173–196.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA*, *7*(1), 41–50.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. New York: Routledge.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. En F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–24). New York: Routledge.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10–32.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Revista Suma*, *65*, 7–15.

Novotná, Jarmila, Stehlíková, N., & Hoch, M. (2006). Structure sense for university algebra. En Jarmila Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 249–256). Prague, Czech Republic.

Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Equations, functions, critical aspects and mathematical communication. *International Education Studies*, *5*(5), 69–78. doi:10.5539/ies.v5n5p69

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: Los estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA*, *6*(2), 95–140.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–16.

Vega-Castro, D. C. (2010). *Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/23888

Vega-Castro, D. C. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/31311

Vega-Castro, D., Molina, M., & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233–258.

Cristina Eccius-Wellmann

Domicilio: Universidad Panamericana
Álvaro del Portillo # 49
45010, Zapopan, Jalisco, México.

Teléfono: (33) 13 68 22 00 Ext. 4923

APÉNDICE

Reactivos usados en las evaluaciones anterior y posterior a la intervención

1) Expresa en la forma factorizada más simple:
$(x+3)^2 - 12(x+3) + 36 =$

2) Factoriza completamente la expresión:
$81x^4y^2 - 36x^4z^6 =$

3) Expande la expresión y exprésala como el polinomio más reducido:
$(m^2n^3 - 6p^4)^2 =$

4) Expresa en su forma más simple:
$(a+8)^2 - (a-8)^2 =$

5) Expresa en su forma más simple:
$\frac{7e+7f}{4e+4f} =$

6) Expresa en su forma más simple:
$\frac{xy^2-9x}{(y-3)^2} =$

7) Expresa en su forma más simple:
$\frac{x+y\cdot z}{x+y} =$

8) Expresa en su forma más simple:
$\frac{t^2+5t-24}{t^2-8t+15} =$

9) Expresa en su forma más simple:
$\frac{m-n}{n-m} =$

10) Expresa en su forma más simple:
$\frac{a-5}{a^2-25} =$

11) Realiza la operación y expresa la respuesta en su forma más simple:
$\frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{c-d}{a^2-b^2} =$

12) Realiza la operación y expresa la respuesta en su forma más simple:
$\frac{(t+1)^2}{t-1} \div \frac{t+1}{(t-1)^2} =$

13) Realiza la operación y expresa la respuesta en su forma más simple:
$\frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} =$

14) Realiza la operación y expresa la respuesta en su forma más simple:
$\frac{w-3}{w^2-9} - \frac{1}{w+3} =$

15) Expresa en la forma factorizada más simple:
$\frac{(x+3)^2-12(x+3)+36}{(x+3)^2} =$

 DOI: 10.24844/EM3102.08

Las tecnologías en el aula para la enseñanza del contraste de hipótesis

The technologies in the classroom for the teaching of the contrast of hypothesis

Gustavo Cañadas[1]
Elena Molina-Portillo[2]
José Miguel Contreras[3]
y Rocío Álvarez-Arroyo[4]

Resumen. Las tecnologías han influido de forma significativa en todos los campos, y en mayor medida en los temas relacionados con la estadística (Galmacci, 2001). La mayoría de las investigaciones sobre contraste de hipótesis describen errores en la interpretación del nivel de significación y el p-valor (ej., Vallecillos, 1994), existiendo poca presencia de investigaciones de errores sobre el contraste de hipótesis mediante el uso de tecnologías. Esto incentiva la realización de investigaciones con recursos informáticos que están apareciendo cada vez más en el aula, produciéndose una demanda de investigación en este terreno. El presente artículo muestra los resultados de un análisis comparativo en el que se examina la utilización de software SPSS frente al uso de software libre (R) en la enseñanza de estadística a nivel universitario, donde se utilizan

Fecha de recepción: 20 de febrero de 2018. **Fecha de aceptación:** 18 de enero de 2019.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática de la Univerisdad de Granada, grcanadas@ugr.es, orcid.org/0000-0002-1897-2540

[2] Departamento de Didáctica de la Matemática de la Univerisdad de Granada, elemo@ugr.es orcid.org/0000-0002-9955-3080

[3] Departamento de Didáctica de la Matemática de la Univerisdad de Granada, jmcontreras@ugr.es orcid.org/0000-0001-6821-0563

[4] Departamento de Didáctica de la Matemática de la Univerisdad de Granada, rocioaarroyo@ugr.es orcid.org/0000-0002-3201-8542

ambos software. Se analizan los conflictos que aparecen en los estudiantes al utilizar ambos paquetes estadísticos en base al proceso de enseñanza, y se estudian aspectos cognitivos importantes en el aula mediante la aplicación de test validados anteriormente en otras investigaciones.

Palabras clave: *Estadística, tecnologías, Universidad, contraste de hipótesis y conflicto semiótico.*

Abstract. Technologies have influenced significantly in all fields, and to a greater extent in subjects related to statistics (Galmacci, 2001). Most of the hypothesis testing investigations describe errors in the interpretation of the level of significance and p-value (eg, Vallecillos, 1994), and there is little presence of error investigations on the hypothesis contrast through the use of technologies. This encourages the carrying out of investigations with computer resources that are appearing more and more in the classroom, producing a demand for research in this field. This article presents the results of a comparative analysis that examines the use of SPSS software versus the use of free software (R) in the teaching of statistics at the University level, where both software are used. The conflicts that appear in students will be analyzed when using both statistical packages based on the teaching process, and important cognitive aspects will be studied in the classroom through the application of previously validated tests in other investigations.

Keywords: *Statistics, technologies, University, contrast of hypothesis and semiotic conflict.*

INTRODUCCIÓN

Desde la década de los 80 a la actualidad el uso de software específico para análisis estadístico se ha ido generalizando en la enseñanza universitaria. Los motivos de esta generalización han sido diversos. Por el lado de los estudiantes, distintos estudios han generado una línea que lleva desde la satisfacción y preferencias de los estudiantes por el uso de software estadístico (SE), pasando por la mejora de actitudes hacia la estadística, la reducción de la denominada "ansiedad estadística", el desarrollo de habilidades prácticas, y culmina en una mejora en el rendimiento académico de los estudiantes que utilizan este tipo de software (Estrada, 2002; Batanero, 2002). Además, la satisfacción de los estudiantes en relación a su interacción con el SE parece básica a la hora de intentar cimentar un cambio de actitudes hacia el aprendizaje de la estadística. Pero no sólo los estudiantes han obtenido ventajas al aplicar SE en su aprendizaje. También los profesores han logrado liberar un espacio temporal dedicado a complejas explicaciones que ahora pueden utilizar en demostraciones más productivas.

La investigación sobre el estudio de estos software es amplia, pero el estudio de su relación utilizando nociones didácticas y psicológicas pueden presentar resultados interesantes para ver relaciones entre dimensiones de ambos campos. El objetivo de esta investigación es analizar la usabilidad y la ansiedad producidos en el proceso de enseñanza del contraste de hipótesis mediante dos softwares habituales en el aula de la Universidad.

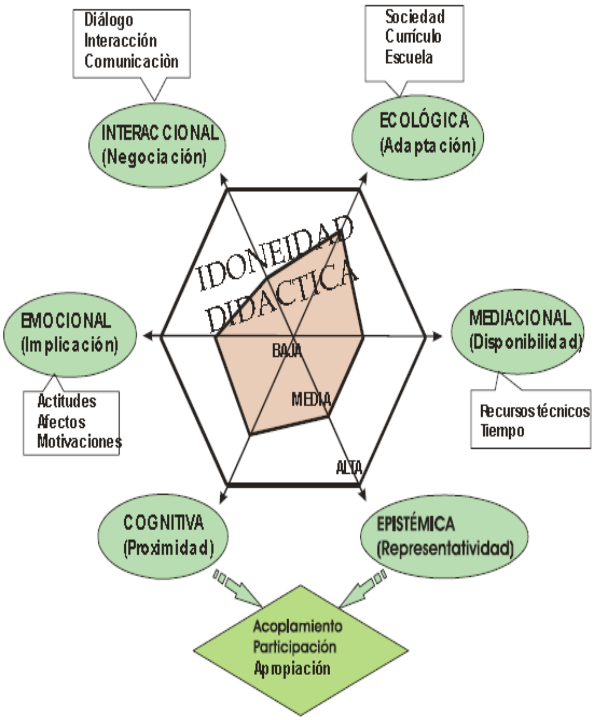
MARCO TEÓRICO

En este trabajo se analizarán recursos didácticos tecnológicos que se manejan en niveles universitarios que incluyen el estudio de contrastes de hipótesis. Para ello se utilizan nociones teóricas relacionadas con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado por Godino y su equipo de colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007 y otras publicaciones). Más concretamente, el trabajo se centra en las prácticas matemáticas involucradas en el contraste de hipótesis y softwares usuales R y SPSS.

También utilizamos la idea de conflicto semiótico de este marco teórico como complemento del análisis de la enseñanza. En las prácticas matemáticas se requiere un uso continuo del lenguaje matemático, pues los objetos matemáticos son inmateriales; por ello a cada expresión matemática (objeto inicial, o signo) le corresponde un contenido (objeto final, esto es, lo representado; generalmente mediante un criterio o regla de correspondencia). El carácter relacional de la actividad matemática puede explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) denominan conflicto semiótico a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las que el profesor trata de transmitir. Dichos conflictos semióticos producen equivocaciones en los estudiantes que no son debidos a falta de conocimiento, sino a una interpretación incorrecta de expresiones matemáticas.

Entre los elementos elaborados en este marco teórico, utilizaremos también la noción de idoneidad didáctica, la cual está dividida en 6 componentes (Figura 1). Esta idea será utilizada en el apartado de discusión, para analizar la enseñanza realizada y los resultados de la evaluación de la misma.

Figura 1. Idoneidad didáctica



Fuente: Godino (2009), p. 29.

INVESTIGACIONES PREVIAS

Schenker (2007) demostró que los estudiantes se muestran más satisfechos y prefieren las clases que incorporan tecnología en la instrucción. En la misma línea Johnson y Dasgupta (2005) refieren que los estudiantes de estadística prefieren las clases que siguen una metodología de enseñanza no tradicional a las clases tradicionales. Mitra y Steffensmeier (2000) profundizan un poco más en este tipo de análisis, y no sólo afirman que los estudiantes se sienten más cómodos con los ordenadores, sino que además indican que sufren menos aprensión a la hora de enfrentarse a la materia y piensan que los ordenadores les hacen el proceso de aprendizaje más sencillo. Esta tendencia a preferir aprender estadística mediante la asistencia de un ordenador parece acentuarse especialmente entre los estudiantes más jóvenes (Malby, 2001).

Kulik y Kulik (1987) realizaron un meta-análisis en el que encontraron que la instrucción matemática basada en el uso del ordenador tenía un tamaño del efecto de 0.28 para la actitud hacia la instrucción y de 0.33 para la actitud hacia los ordenadores cuando era comparada con la instrucción tradicional. Sin embargo, la importancia de valorar el efecto de factores no cognitivos en el aprendizaje de la estadística no toma fuerza hasta la década de los 90 (Gal y Ginsburg, 1994). Ma y Kishor (1997) mostraron en un meta-análisis que existía una relación entre la actitud hacia las matemáticas y el rendimiento en matemáticas. Posteriormente, Potthast (1999) afirma que existe una relación similar en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística. Incluso más recientemente se han encontrado correlaciones positivas entre la actitud hacia la estadística y la absorción cognitiva que produce en el estudiante la interacción con el SE (Jardina, 2011).

Quizá el fenómeno más difícil de tratar de cara a mejorar las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la estadística sea la denominada "ansiedad estadística". Forte (1995) sugiere que el temor a los cursos de estadística puede ser mitigado incorporando aproximaciones aplicadas o experimentales y el uso de la tecnología en la instrucción de estadística puede ayudar a reducir la ansiedad en los estudiantes.

Por otra parte, desde una perspectiva aplicada, el SE también parece mejorar el desarrollo de habilidades. Incorporar al aula proyectos estadísticos aplicados puede incrementar la apreciación del estudiante del valor de las habilidades desarrolladas en los cursos de estadística (Wells, 2006). Pero la mejora de habilidades en estadística no sólo se queda en la apreciación subjetiva por parte del estudiante. Ben-Zvi (2000) sugiere que la instrucción en estadística utilizando herramientas tecnológicas puede ayudar a los estudiantes a realizar las tareas a tiempo, hacerlo rápidamente, con mayor exactitud y con menos errores.

Lesser (1998) presentó que los estudiantes instruidos en estadística en un entorno tecnológico respondían mejor a preguntas que implicaban razonamiento crítico. Asimismo, los estudiantes instruidos en clases multimedia obtienen mejores notas en los exámenes finales de estadística que los instruidos en clases tradicionales (Erwin y Rieppi, 1999). De hecho, Christmann y Badgett (1999) encontraron, respecto al rendimiento académico, un tamaño del efecto de 0.256 a favor de varios paquetes de SE frente a la instrucción tradicional.

Pero además aparecen repercusiones para los profesores. Según Moore (1997), al utilizar SE en la enseñanza de la estadística, los profesores pueden dedicar menos tiempo a tópicos que podrían automatizarse (como cálculos), y más tiempo a la interpretación de gráficos, estrategias efectivas de exploración de datos, y manejo conceptual de términos estadísticos. Por otra parte, un paquete estadístico también ofrece a los profesores la oportunidad de proveer de ejemplos adicionales pudiendo confeccionar cursos para audiencias específicas, introduciendo datos procedentes de las distintas disciplinas de los estudiantes (Velleman y Moore, 1996). En todo caso, y con la finalidad de optimizar los resultados, para evitar una sobrecarga mental debida al aprendizaje conjunto de la utilización del SE y de los conceptos estadísticos, autores como Clarke, Ayres y Sweller (2005) recomiendan una secuenciación del aprendizaje, comenzando por el software para, una vez asentadas las habilidades con el mismo, introducir los conocimientos estadísticos.

En este apartado hemos revisado artículos que exponen cómo el uso del SE en la enseñanza de la estadística aumenta las posibilidades didácticas de los docentes y mejora la competencia estadística de los estudiantes en actitudes, habilidades y conocimientos. A principios de los 90 una revisión llevada a cabo por Khamis (1991) indicaba que el 70% de los cursos introductorios de estadística usaban software informático. Hoy día se ha extendido el uso de SE a la mayoría de los cursos de estadística y la cuestión que queda por resolver es qué software específico debe ser integrado en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Fernandez y Liu, 1999).

EXPERIMENTACIÓN DEL MATERIAL

La experiencia de enseñanza se llevó a cabo en las asignaturas de "Técnicas de Análisis en la Investigación Psicológica" y "Fundamentos de Metodología en Logopedia". Ambas asignaturas se imparten en el segundo cuatrimestre del primer curso, la primera en el Grado de Psicología, y la segunda en el Grado de Logopedia. Estas asignaturas son de carácter obligatorio, con una carga docente de 6 créditos ECTS cada una. Los resultados fueron homogéneos en ambas asignaturas, por lo que en adelante se realiza el estudio sin distinción de los mismos.

El tiempo dedicado a la enseñanza fue de 7 sesiones de 1 hora de duración. Todas ellas se llevaron a cabo en el laboratorio de informática en grupos medianos (unos 25 estudiantes por grupo). En cada sesión se presentaba primero la temática a tratar con ayuda de las diapositivas de PowerPoint preparadas al efecto. Los estudiantes disponían previamente del material en una versión extendida a través de la plataforma Moodle. A continuación, los estudiantes trabajaban independientemente con el ordenador, realizando los ejercicios propuestos. Para la resolución de dichos ejercicios requerían utilizar los programas estadísticos R o SPSS. Las clases de los grupos que trabajaban con estos programas fueron impartidas por el profesor responsable de la asignatura.

La validez de la recogida de datos se garantizó mediante la observación de las sesiones por miembros del equipo de investigación y otros profesores que impartían también la asignatura en otros grupos. Estos observadores anotaban las principales incidencias y dudas planteadas por los estudiantes.

MÉTODO

La muestra estuvo formada por 168 estudiantes de primer año de la Universidad de Granada, que cursaban una asignatura de formación estadística. Los datos se tomaron después del estudio formal de un tema específico de los contrastes de hipótesis, con el fin de detectar posibles dificultades y concepciones incorrectas, fruto del diseño de la enseñanza con los paquetes de ordenador ya mencionados.

El cuestionario de evaluación que se usó estuvo formado por 6 ítems de tres alternativas, con una única respuesta correcta. Se utilizó un contexto relacionado con el campo de los estudiantes como incentivo de la resolución del cuestionario. El contenido estadístico se planteó con 4 ítems correspondientes a la realización de ANOVA, 3 ítems de un contraste de muestras independientes, y 3 ítems de un contraste de muestras relacionadas.

Los cuestionarios utilizados como complemento evaluaban la ansiedad y el de uso de programa, los cuales se utilizaron en otras investigaciones mencionadas en los antecedentes. El primer test está constituido por un total de 24 ítems, en el cual se miden 3 dimensiones: ansiedad ante los exámenes, ansiedad al solicitar ayuda y ansiedad al interpretar. El segundo test lo forman un total de 30 ítems, en donde aparecen la dimensión de utilidad del programa, facilidad de uso, facilidad de aprendizaje y satisfacción.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez recogidos los cuestionarios, se realizó un análisis comparativo entre los dos programas utilizados en clase (R y SPSS) y en la evaluación. Se clasificaron los análisis en dos bloques, cada uno correspondiente a uno de los test.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS

En este trabajo utilizamos el método de análisis semiótico propuesto en nuestro marco teórico para analizar las respuestas de los estudiantes en la solución de los problemas planteados. Este análisis consiste en la identificación de las prácticas matemáticas al tratar de resolver el problema y de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identifican algunos conflictos semióticos que explican los errores de los estudiantes.

Al analizar las posibles dificultades de los estudiantes en el uso de estos recursos, observamos que una posible complejidad radica en la falta de claridad del programa R, ya que este programa exige el uso de nociones de programación que los estudiantes no tienen que saber. Ello puede inducir una serie de errores en los estudiantes a la hora de utilizar el programa, pero las programaciones fueron entregadas para solventar esta dificultad y obtener la solución que se quiere interpretar. Por otro lado, el SPSS no requiere de programación, pero la realización de un análisis puede dar más variedad de respuestas donde hay que ir seleccionando las necesarias para nuestro problema. Por ejemplo, en la respuesta de la realización de un contraste inicialmente se observa la significación de la comparación de varianzas y, según como sean, se estudian las medias de una forma u otra. En nuestro estudio aparecen los siguientes conflictos:

Conflictos semióticos relacionados con los conceptos

- Los estudiantes pueden confundir el estadístico y el parámetro, error descrito, entre otros, por Schuyten (1991). Mientras que la distribución de probabilidad de una variable depende de algunos parámetros (normalmente desconocidos y constantes), los estadísticos se calculan a partir de los datos de la muestra y son variables aleatorias, aunque el valor para la muestra particular es fijo y conocido (Batanero, 2000). Por ello no tiene mucho sentido establecer las hipótesis en términos de los estadísticos (ya que su valor es conocido en la muestra particular). Además, en esta respuesta los estudiantes no recuerdan que el valor p es una probabilidad y por lo tanto su valor no puede ser superior a 1.

- Se puede encontrar una cierta confusión entre el p-valor y el nivel de significación, dos conceptos que de acuerdo con Morrison y Henkel (1970), Menon (1993), Vallecillos (1994) y Williams (1997) son particularmente mal entendidos. El nivel de significación se define como la probabilidad de falso rechazo de una hipótesis nula y es un valor constante que se establece a priori (antes de recopilar los datos) por el investigador. El valor p se define como la probabilidad de observar el valor empírico del estadístico o un valor más extremo, dado que la hipótesis nula es verdadera y varía de una muestra a otra.
- Otro posible conflicto que aparece es confundir muestras independientes y relacionadas. El estudiante no extrapola los datos de forma correcta a su contexto para decidir el tipo de muestras que maneja. En la investigación de Cañadas *et al.* (2012) se comenta cómo los estudiantes no realizan las interpretaciones en el contexto del problema.

Conflictos semióticos relacionados con procedimientos de cálculo

- Aparece un conflicto cuando los estudiantes toman una decisión incorrecta, rechazando la hipótesis nula y causando el error tipo I, existiendo una confusión en los criterios de aceptación y rechazo, error también señalado en otras investigaciones (Vallecillos, 1994 y Haller y Kraus, 2002).
- Por otro lado, los estudiantes pueden tomar una decisión incorrecta, aceptando la hipótesis nula, existiendo una confusión en los criterios de aceptación y rechazo, error también señalado en otras investigaciones (Vallecillos, 1994 y Haller y Kraus, 2002).
- Otros conflictos aparecen en el procedimiento de los programas, como sería no cambiar el valor de alfa, causando esto que el programa siempre considere el que tiene inicialmente.

Conflictos semióticos relacionados con procedimientos interpretativos de los resultados del programa

- Confundir la significación de la diferencia de medias con la significación obtenida de la prueba de Brown-Forsythe (BF).
- Confundir la significación de la diferencia de medias con la significación obtenida de la prueba de homogeneidad.
- Confundir la significación de la diferencia de medias con la significación obtenida de la prueba de Levene.

COMPARACIÓN DE LA USABILIDAD DEL PROGRAMA

Este test, está compuesto por cuatro dimensiones: "utilidad del programa", "facilidad de uso", "facilidad de aprendizaje" y "satisfacción". Estas dimensiones confeccionan una forma efectiva de valorar estos programas en lo que se refiere a su uso práctico. Al comparar los valores medios teóricos y reales (Tabla 1), observamos como los valores medios reales para ambos programas están por encima de la media teórica, lo que implica que ambos programas son válidos para su uso en clase. Por otro lado, al comparar los valores de las medias de ambos programas, nos damos cuenta que las medias del SPSS están siempre por encima de las medias del programa R.

Tabla 1. Descriptivos de las dimensiones para los programas R y SPSS

	Software usado	Media Teórica	Media	Desviación típ.
Utilidad	R	20	32,88	9,443
	SPSS	20	35,17	7,739
Facilidad Uso	R	27,5	46,44	11,835
	SPSS	27,5	49,57	9,905
Facilidad Aprendizaje	R	10	15,44	5,459
	SPSS	10	16,84	3,957
Satisfacción	R	17,5	25,45	8,231
	SPSS	17,5	31,95	7,257

Hemos realizado contrastes de comparación de medias para detectar qué medias son estadísticamente significativas mediante la prueba T de muestras independientes (Tabla 2). En la dimensión de "Satisfacción" es donde existen diferencias, siendo mayor para los estudiantes que utilizan el programa SPSS.

Tabla 2. Prueba T para la igualdad de medias entre los estudiantes que utilizaron R y SPSS

	T	Sig.	95% I.C. para la diferencia	
			Inferior	Superior
Utilidad	-1,329	0,186	-5,7	1,122
Facilidad Uso	-1,485	0,14	-7,292	1,041
Facilidad Aprendizaje	-1,862	0,065	-2,881	-0,086
Satisfacción	-4,365	0,000	-9,451	-3,553

ESTUDIO DE LAS COMPONENTES PSICOLÓGICAS CONSIDERADAS

Este test está compuesto por cuatro dimensiones: "utilidad del programa", "facilidad de uso", "facilidad de aprendizaje" y "satisfacción". Al comparar los valores medios teóricos y reales (Tabla 3), observamos como los valores medios reales para ambos programas están por debajo de la media teórica en dos de las dimensiones (ansiedad para pedir ayuda y ansiedad para interpretar), lo que implica que en el proceso de hacer el examen con ambos programas se detecta un alto grado de ansiedad. Por otro lado, al comparar los valores de las medias de ambos programas, nos damos cuenta que las medias del SPSS están por debajo de las medias del programa R en dos de las dimensiones (ansiedad durante el examen y ansiedad para pedir ayuda), únicamente se encuentra más ansiedad en el programa SPSS para interpretar los resultados de los problemas del contraste de hipótesis.

Tabla 3. Descriptivos de las dimensiones para los programas R y SPSS

	Software usado	Media Teórica	Media	Desviación típ.
Ansiedad examen	R	28	33,06	4,868
	SPSS	28	31,27	5,964
Ansiedad ayuda	R	28	19,4	7,525
	SPSS	28	16,4	7,388
Ansiedad interpretar	R	28	18,69	5,625
	SPSS	28	20,64	5,826

A continuación, realizamos contrastes de comparación de medias para detectar qué medias son estadísticamente significativas mediante la prueba T de muestras independientes (Tabla 4). Se han encontrado diferencias entre los dos programas para dos dimensiones: "ansiedad para pedir ayuda" y "ansiedad para interpretar". Para el primer caso existe mayor valor para el programa R, en cambio, para el segundo hay mayor ansiedad en el uso del SPSS.

Tabla 4. Prueba T para la igualdad de medias entre los estudiantes que utilizaron R y SPSS

	T	Sig.	95% I.C. para la diferencia	
			Inferior	Superior
Ansiedad examen	1,929	0,057	-0,054	3,635
Ansiedad ayuda	2,428	0,016	0,561	5,447
Ansiedad interpretar	-2,069	0,04	-3,808	-0,089

DISCUSIÓN

La formación estadística es un pilar importante en la formación. Ridgway, Nicholson y McCusker (2008) analizan la importancia de la cultura estadística debida, entre otros hechos, al esfuerzo de instituciones como la Unión Europea o la Organización de Naciones Unidas de hacer accesible a los ciudadanos sus estadísticas. Estas estadísticas que quieren acercar a los ciudadanos, con frecuencia manejan representaciones gráficas o datos complejos que se ponen a disposición del público en Internet. Consecuentemente, el interés de que los ciudadanos adquieran un conocimiento estadístico básico es una necesidad prioritaria (Carrión y Espinel, 2006). A raíz de esta necesidad, la enseñanza de la estadística se ha incorporado de forma generalizada, desde hace unas décadas, en todos los niveles educativos. Ello es debido al carácter instrumental de la estadística y el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en la sociedad de la información (Batanero, 2002). Además, la Estadística está presente en el currículo de multitud de carreras universitarias, ya que se aplica a muchos campos de conocimiento, siendo uno de ellos el de la Psicología.

Las investigaciones didácticas sobre el contraste de hipótesis plantean una amplia gama de dificultades, las cuales nos obliga a su incorporación al estudio de las tecnologías del tema. Por ejemplo, en Cañadas *et al.* (2012), en su estudio sobre los pasos que realizan los estudiantes para solucionar un problema planteado de contraste de hipótesis, obtiene que el 79,3% planteaban hipótesis correctas o parcialmente correctas, 64,1% determinaban correctamente el estadístico y valor p (único punto facilitado por el software "Excel"), 51,9% tomaban la decisión correcta y 43,5% interpretaban correctamente los resultados en contexto, recorriendo así todos los pasos del proceso de modelización (Henry, 1997): planteamiento de hipótesis, definición y trabajo con un modelo matemático, e interpretación de resultados.

En Vera, Díaz y Batanero (2011) no se ha presentado la confusión entre hipótesis nula y alternativa que Vallecillos (1994) sí encontró en un 13% aproximadamente. Sin embargo, sí encontraron estudiantes que plantean hipótesis alternativas puntuales o hipótesis que en su conjunto no cubren el espacio paramétrico, de modo que existe coincidencia con Vallecillos (1994) en que los estudiantes confunden algunas propiedades de las hipótesis nula y alternativa.

En este trabajo hemos analizado dos recursos que pueden ayudar a entender los contrastes de hipótesis, presentando un breve resumen de los materiales y resultados. Para finalizar analizamos el proceso de enseñanza mediante las condiciones de idoneidad didáctica, definida por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) como la articulación de las seis componentes:

- *Idoneidad epistémica*: definido como la representatividad de los significados institucionales implementados (o intención) respecto al significado de referencia previamente definido. El material descrito anteriormente puede ser adecuado para estudiar los contrastes de hipótesis, sus propiedades, conceptos asociados, así como dificultades mostradas en otras investigaciones didácticas (Vallecillos y Batanero, 1997; Vera, Díaz y Batanero, 2011; Cañadas, Batanero, Díaz y Roa, 2012).
- *Idoneidad cognitiva*: que expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y su proximidad con el significado personal logrado. Los recursos analizados son adecuados para la formación de estudiantes de ciencias sociales, puesto de manifiesto por el alto porcentaje de estudiantes con calificaciones altas (aproximadamente el 70% obtuvieron una calificación de sobresaliente).
- *Idoneidad interaccional*: medida en que las configuraciones didácticas y las trayectorias permiten identificar y resolver los conflictos semióticos que podrían ocurrir durante el proceso de instrucción. Dicha adecuación depende de cómo el profesor organiza su trabajo en el aula. Los estudiantes deberán trabajar en grupos con el fin de fomentar el conflicto y verbalizarlo.

Esto también requiere la organización de una discusión conjunta de soluciones en un intento por lograr que los estudiantes ayuden a sus colegas a detectar problemas.

- *Idoneidad mediacional*: marcado por la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. No se necesitan muchos recursos, ya que en la actualidad, cualquier universidad dispone de aulas con ordenadores para todos los estudiantes.
- *Idoneidad emocional*: que atañe a la participación de los estudiantes (intereses, motivación...) en el proceso de estudio. Creemos que los recursos informáticos son interesantes para los estudiantes. Además, se ha aumentado este interés al contextualizar los ejemplos en áreas próximas al interés del estudiante.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso que se estudia se ajusta al entorno. En este sentido, los cuestionarios empleados no contravinieron ningún aspecto contemplado en el proyecto del centro ni del contexto social del alumnado.

CONCLUSIONES

Las tecnologías en el aula plantean gran variedad de recursos ricos que requieren estudio y reflexión antes de su utilización. Los softwares planteados en esta investigación han resultado eficaces y con buenos resultados en los test utilizados para su evaluación, al realizar las comparaciones oportunas con las medias teóricas. El programa R, por su fácil acceso al ser un software libre, está cogiendo peso en los últimos años, aunque sigue siendo el SPSS el que nos ha mostrado mejores actitudes en todos los campos salvo uno.

Aunque los materiales se han relevado de interés al usarlos con estudiantes universitarios, un recurso didáctico por sí sólo no resuelve todos los problemas. Se plantea así el reto de continuar este trabajo con nuevas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las tecnologías en las aulas.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Controversias around the role of statistical test in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia en las *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires. Confederación Latino-americana de Sociedades de Estadística.

Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning, 2*, 127-155.

Cañadas, C., Batanero, C., Díaz, C. & Roa, R. (2012). Psychology students' understanding of the chi-squared test. *Statistique et Enseignement, 3*(1), 3-18. Societé Française de Statistique. http://www.statistique-et-enseignement.fr/ojs/.

Carrión, J. C., & Espinel, M. C. (2006). An investigation about translation and interpretation of statistical graphs and tables by students of primary education. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Christmann, E., & Badgett, J. (1999). The comparative effectiveness of various microcomputer-based software packages on statistical achievement. *Computers in Schools, 16*(1), 209-220.

Clarke, T., Ayres, P., & Sweller, J. (2005). The impact of sequencing and prior knowledge on learning mathematics through spreadsheets applications. *Educational Technology, research and development, 3,* 15-24.

Erwin, T. D., & Rieppi, R. (1999). Comparing multimedia and traditional approaches in undergraduate psychology classes. *Teaching of Psychology, 26*, 58-61.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona.

Fernandez, G. C. J., & Liu, L. (1999). A technology-based teaching model that stimulates statistics learning. *Computers in the Schools, 16*, 173-191.

Forte, J.A. (1995). Teaching statistics without statistics. *Journal of Social Work Education, 31,* 204-218.

Gal, I., & L. Ginsburg. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Towards an assessment framework. *Journal of Statistical Education, 2.*

Galmacci, G. (2001). The impact of Internet on the researchers´ training. En C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 159-169). Granada: International Statistical Institute.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. & Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2), 1-26.

Haller, H. & Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research, 7*(1), 1–20.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.

Jardina, J.R. (2011). The use of technology in statistics education: investigation of the relations between attitudes, technology acceptance and statistical literacy. (Tesis de doctorado no publicada). University of Houston Clear-Lake, US.

Johnson, H. D., & Dasgupta, N. (2005). Traditional versus non-traditional teaching: Perspectives of students in introductory statistics classes. *Journal of Statistics Education, 13*(2).

Khamis, H. J. (1991). Manual computations: A tool for reinforcing concepts and techniques. *The American Statistician, 45*(4), 294-299.

Kulik, J. A., & Kulik, C. C. (1987). Review of recent research literature on computerbased instruction. *Contemporary Educational Psychology, 12*, 222-230.

Lesser, L. M. (1998). Technology-rich standards-based statistics: Improving introductory statistics at the college level. *Technological Horizons in Education Journal, 25*(7), 54-57.

Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 26-47.

Maltby, J. (2001). Learning statistics by computer software is cheating. *Journal of Computer Assisted Learning, 17,* 329-330.

Menon, R. (1993). Statistical significance testing should be discontinued in mathematics education research. *Mathematics Education Research Journal, 5*(1), 4-18.

Mitra, A., & Steffensmeier, T. (2000). Changes in student attitudes and student computer use in a computer-enriched environment. *Journal of Research on Computing in Education, 32*, 417-433.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65*, 123-165.
Morrison, D. E. & Henkel, R. E. (Eds.). (1970). *The significance test controversy. A reader.* Chicago: Aldine.
Potthast, M. J. (1999). Outcomes of using small-group cooperative learning experiences in introductory statistics courses. *College Student Journal, 33,* 34–42.
Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical literacies and iliteracies. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education,* Monterrey, México.
Schenker, J. (2007). The effectiveness of technology use in statistics instruction in higher education: a meta-analysis using hierarchical linear modeling. (Tesis de doctorado no publicada). Kent State University College and Graduate School of Education, Health, and Human Service, US.
Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.). *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.
Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 17,* 29-48.
Velleman, P.F., & Moore, D.S. (1996). Multimedia for teaching statistics: promises and pitfalls. *The American Statistician, 3,* 217-225.
Vera, O. D., Díaz, C. & Batanero, C. (2011). Dificultades en la formación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNIÓN*, *27*, 41-61.
Wells, M. (2006). Making statistics "real" for social work students. *Journal of Social Work Education, 2,* 397-404.
Williams, A. M. (1997). Students' understanding of hypothesis testing: the case of the significance concepts En: F. Biddulph y K. Karr (Eds.), *People in Mathematics Education, Proceedings of the 20th Conference of the Mathematics Education Research Group in Australasia,* (pp. 585-591). Aotearoa Australia: MERGA.

Rocío Álvarez-Arroyo

Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Universitario Cartuja, s/n, 18071, Granada (España).

Teléfono: 958249624

 DOI: 10.24844/EM3102.09

¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas

What can we learn from our students? Reflections about the use of graphs

José David Zaldívar Rojas[1]
Eduardo Carlos Briceño Solis[2]

Resumen: En el presente artículo se discute un análisis de los *usos de las gráficas* que surgen a partir de una experiencia con estudiantes mexicanos de bachillerato (15-17 años) cuando se enfrentan a una situación de modelación del movimiento con apoyo de tecnología. Se evidencia cómo el uso de la gráfica atraviesa durante la puesta en escena por resignificaciones progresivas que dentro del discurso matemático escolar podrían considerarse como *errores conceptuales* pero que, desde nuestro posicionamiento teórico, son más bien *formas culturales de saberes* que se encuentran en la base de justificaciones funcionales. De esta manera se conforma un marco de usos de las gráficas donde la variación y el comportamiento con tendencia se convierten en esenciales en el proceso de resignificación.

Palabras clave: *Usos de las gráficas, Modelación, Teoría Socioepistemológica, Resignificación.*

Fecha de recepción: 8 de agosto de 2017. **Fecha de aceptación:** 10 de abril de 2019.

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, david.zaldivar@uadec.edu.mx, orcid.org/0000-0002-4274-0336
[2] Universidad Autónoma de Zacatecas, ecbs74@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2009-3879

Abstract: In this article, we present an analysis of the *uses of graphs* arising in an experience with Mexican high school students when they are faced to a modeling situation supported with technology. We provide accounts about both progressive and alternative redefinitions in the use of graphs during the experience, which school mathematics judge as *misconceptions* or conceptual mistakes. Nevertheless, under our theoretical standpoint, those uses of graphs respond to *cultural forms of mathematical knowledge* which are embedded in organic arguments. In that manner, we define a use of graphs' framework where the variation, tendency and asymptotic behavior are in the core of the process of redefinition.

Keywords: *use of graphs, Modelling, Socioepistemology Theory, Redefinition.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo se perfila, principalmente, como un planteamiento en favor de un diálogo entre la realidad de los estudiantes y el conocimiento que actualmente se brinda en la escuela. Interesa entonces, evidenciar una posible ruta para investigar *formas de saberes culturales* que poseen los estudiantes de manera que se delimiten marcos de referencia alternativos que pudieran integrar un rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) (Soto & Cantoral, 2014).

Como resultado de dicho posicionamiento, no se reduce el problema del desarrollo del pensamiento matemático a la transferencia de conocimientos de lo que se "aprende" en la escuela, sin tomar en consideración las condiciones sociales de su producción o las *razones de ser* de dichos conocimientos (Chevallard, 2013). Por ejemplo, en la escuela se enseña una manera de multiplicar y de restar; en síntesis, de hacer operaciones de manera "formal" y en gran medida, generalizable. En la escuela suele esperarse que todo aquello que se enseñe a los estudiantes, pueda ser transferido a otras situaciones. Sin embargo, la investigación ha mostrado que esta transferencia se da sólo cuando las situaciones son similares a aquellas que fueron aprendidas; lo cual, en muy raras ocasiones ocurre (Cantoral, 2013).

Ahora bien, algunas investigaciones manifiestan una clara separación entre la escuela y su entorno (Carraher, Carraher, Schliemann, 1991; Arrieta & Díaz, 2015). Dicha separación, también permite cuestionar sobre aquellos "otros" aspectos del conocimiento matemático que, aunque plausibles, no son aprovechados por la escuela (Carraher, *et al.*, 1991), sino que se soslayan por la supremacía de otras argumentaciones que el dME establece de antemano (Soto & Cantoral, 2014).

Ante este panorama, la investigación en ME puso especial atención en las últimas décadas, a tópicos relativos a la *Modelación Matemática y las Aplicaciones* con el objetivo de extender las relaciones entre la "realidad" y la "matemática escolar". Lo anterior con el fin de integrar contextos extra-matemáticos que permitan la creación de acercamientos didácticos innovadores y plausibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y con ello, despertar el interés de los alumnos hacia el estudio de las matemáticas. Esto se comprueba, por ejemplo, en el lugar que le brindan a la modelación eventos internacionales de investigación o la amplia literatura especializada que se encuentra disponible (García, Gascón, Ruiz y Bosch, 2006; Niss, Blum y Galbraith, 2007; Almeida, 2018; Trigueros, 2009).

De hecho, en diversos currículos de diferentes niveles y países se aprecia una tendencia a integrar mundos extra-matemáticos para enriquecer las actividades y los libros de texto con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles "fuera" del ámbito escolar. Incluso se proponen acercamientos donde se integra una componente tecnológica informática a través de ambientes experimentales lo cual implica innovadoras estrategias didácticas (ver por ejemplo: Trigueros, 2014; Rodríguez y Quiroz, 2016). Sin embargo, se reconoce que aunque la modelación matemática podría jugar un rol importante en las aulas de clases de muchos países y dentro de los planes curriculares, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar actividades de modelación genuinas dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, *et al.*, 2007).

Dentro de las principales posturas de investigación en modelación matemática es clara la búsqueda de un diálogo o "puente" entre las prácticas matemáticas y la realidad. Lo anterior trae consigo también singularidades epistemológicas y cognitivas en las cuales se caracteriza a la modelación y sus funciones durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Kaiser y Sriraman, 2006). En la tradición clásica, el proceso de modelación matemática se explica generalmente a través de *ciclos*. Dichos ciclos, inician con proponer sistemas apropiados a ser modelados o de "atractivas" aplicaciones a *modelizar* con el fin de involucrar e interesar a los estudiantes en dicho proceso (ver Blum y

Borromeo, 2009). Sin embargo, bajo esta postura se atiende solamente una orientación "didáctica" del proceso de modelación: una mirada centrada en lo representacional y en la especificidad, con su consecuente enriquecimiento, de las etapas que conforman los ciclos (Bosh, *et al.*, 2006).

De manera que centrar a la modelación como una aplicación de la matemática donde se conjugan una red de conceptos y representaciones de los mismos que dan lugar a modelos, o como una matematización de situaciones extra-matemáticas, no permite reconocer la naturaleza y la transversalidad del conocimiento matemático en diferentes dominios, es decir, *los usos del conocimiento matemático bajo situaciones específicas*. Lo anterior significa una problematización del proceso de modelación desde un punto de vista de *construcción social*, donde el eje de análisis considera una organización basada en prácticas que los individuos utilizan para hallar explicaciones y conformar argumentaciones para explicar fenómenos y tomar decisiones (Cantoral, Moreno-Durazo, Caballero-Pérez, 2018). Este posicionamiento lleva a considerar a la Modelación como una *práctica que trasciende y transforma al objeto matemático en cuestión;* lo cual significa que la modelación es en sí misma *una construcción de conocimiento matemático* (Cordero, 2006).

Se asume entonces como problemática de investigación, la manera en la cual se conforma el dME y poca vinculación con la realidad de los estudiantes. Se considera así, que no sólo se trata de proponer aplicaciones de los conceptos matemáticos o de "matematizar" situaciones extra-matemáticas, sino en desarrollar *usos del conocimiento matemático* que emergen ante el enfrentamiento de situaciones. De manera que se propone a la modelización como la práctica que articularía un diálogo entre el conocimiento matemático y diferentes escenarios donde la matemática sea funcional. Pero para ello, se reformula a la modelación como una *construcción en sí misma*, esto es, como un proceso de resignificación y de articulación de usos del conocimiento matemático, en tanto funcionamientos y formas asociadas a situaciones específicas.

Con base en los posicionamiento anteriores, en la presente investigación se conforma evidencia empírica sobre usos del conocimiento matemático asociados a las gráficas de las funciones en una situación de movimiento con estudiantes de bachillerato. En el siguiente apartado se describe el instrumento experimental y los elementos teóricos para su diseño y, posteriormente, los resultados de la puesta en escena. Las producciones de los participantes de esta experiencia conforman los datos que se analizan bajo el constructo teórico del "uso de la gráfica" en tanto los *funcionamientos* (Fu) y *formas* (Fo) de la gráfica que se involucran en la situación y en la generación de argumentaciones (Cordero, Cen y Suárez, 2010). De esta manera se *problematiza* a la gráfica y se evidencia una resignificación de la misma en una situación específica (Cordero, 2008).

2. ELEMENTOS TEÓRICOS: LA EPISTEMOLOGÍA DE MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

La Matemática Educativa (ME) como disciplina científica, no se remite únicamente a la mejora de los procesos de enseñanza de las matemáticas en ámbitos escolares; sino que también asume como objeto de estudio la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto conocimiento matemático. Su interés es afectar benéficamente al sistema educativo, al pretender que los estudiantes sean capaces de construir un saber vivo que evolucione y principalmente que sea funcional, permitiendo al estudiante resolver sus preguntas (Cantoral, 2013; Cordero, 2008).

El enfoque asumido en el presente artículo hacia el mencionado objetivo, se basa en un punto de vista sociocultural sobre la naturaleza del pensamiento matemático. Como tal, se asume que dicho pensamiento está íntimamente relacionado con *prácticas sociales* (PS) desde las cuales se origina. Este supuesto epistemológico desde lo social, pretende construir y modelar explicaciones sistémicas de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas y se ha denominado Teoría Socioepistemológica (TS). La TS no se centra únicamente en el papel de la semiosis o de las construcciones mentales de estudiantes de una manera aislada, sino que trata con fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva sistémica y múltiple. En síntesis, la TS se ocupa del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y para ello reconoce la incorporación a la investigación de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral, 2013).

La TS reconoce los efectos alienantes de la instrucción escolar basadas en el dME, a partir de modelar las dinámicas del saber o conocimiento puesto en *uso* (Cordero, 2008; Zaldívar, Cen, Méndez, Briceño, Cordero, 2014). Así, la TS asume como problemática la falta de marcos de referencia en el dME que resignifiquen el conocimiento matemático en situación escolar. Para ello propone investigaciones donde es pertinente explorar la naturaleza del uso del conocimiento matemático que se involucra en una situación específica.

La TS ofrece entonces un rediseño del dME a través de epistemologías (Argumentaciones) modelizadas por las prácticas sociales. Por lo que el aporte se encuentra en una base de resignificados para la matemática escolar. El posicionamiento de la TS consiste en asumir que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas, compartidas y normativas, pero además pretende el estatus institucional de los saberes matemáticos. Se asume en la investigación "lo institucional" como aquello referido al sistema didáctico, a las prácticas de enseñanza instituidas (la acción didáctica en: aula, familia, comunidad, escuela o vida cotidiana) y a la interacción entre sus componentes: profesor, saber, estudiante; situado en un escenario sociocultural (Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini, 2015).

Así, la TS propone habilitar las PS en el sistema didáctico, con la intención de proporcionar un *valor de uso* al conocimiento matemático. Para ello, se asume que las PS no se "transfieren" directamente al sistema didáctico, sino que se requiere de una estructura teórica que permita tal cometido. Los trabajos de investigación han propuesto una estructura basada en habilitar *Categorías del Conocimiento Matemático*, las cuales están equipadas de intencionalidad para su reproducción en el sistema didáctico según las condiciones de este último (ver por ejemplo: Suárez, 2014; Buendía y Cordero, 2005). Para ello, el modelo de la TS asume que la PS, propia del grupo humano, se transforma, a través de la intencionalidad didáctica, en una Categoría que se pone de manifiesto en la argumentación dentro de una *Situación Específica*. Esta última es un escenario didáctico, es decir, vive en lo didáctico, y se referirá al diseño de tareas didácticas (Cordero, 2008; Zaldívar, *et al.*, 2014).

Un ejemplo de dichas categorías, es la Modelación-Graficación. Esta categoría se propone en los trabajos de Suárez (2014) y surge a partir del análisis del *Tratado de Oresme*. Este último representa un parteaguas sobre la comprensión de fenómenos que se estudian a través de las cualidades de figuras geométricas y de las proporciones matemáticas (Suárez y Cordero, 2010). Del estudio de dicho tratado fue posible establecer evidencia que sustenta la conveniencia de desarrollar la modelación de situaciones de cambio a través del uso de las gráficas en situación escolar. Dicha evidencia se traduce en tres datos epistemológicos obtenidos del análisis de la obra de Oresme:

- *La gráfica antecede a la función.* La obra de Oresme podría considerarse como una de las etapas iniciales donde surge la *geometría de las relaciones funcionales,* lo cual implica que la noción de función, aunque no definida explícitamente, era usada *de facto* por medio de representaciones geométricas.
- *La gráfica es argumentativa.* La forma de las configuraciones geométricas usadas permitió establecer un nuevo funcionamiento de las mismas para explicar la variación en fenómenos de cambio. El grafismo empleado permitía "demostrar" relaciones que en la época eran consideradas como problemas complejos, como la Regla de Merton. Dicho problema involucra el cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme.
- *El uso de las gráficas tiene un desarrollo.* Dadas las situaciones de variación que se atienden en el Tratado, se observa cómo el uso de las gráficas evoluciona en tanto su uso ante diferentes problemas, por ejemplo, para decidir si ciertas figuras geométricas podrían o no representar situaciones de cambio.

En síntesis, el trabajo de Oresme permitió, en su época, resignificar las figuras geométricas (rectángulos, cuadrados y triángulos) como instrumentos para establecer diferentes tipos de variación (uniforme, deforme, etc.). El estudio de Suárez (2014) por su parte permitió establecer cómo en el Tratado de Oresme aparecía el uso de las gráficas y reconoce dos elementos indisociables: i) las razones o circunstancias que hicieron posible modelar fenómenos de variación, y ii) la configuración o estructura bajo la cual aparecían. Dichos elementos, definen el binomio *Funcionamiento* y *Forma* (Fu-Fo), respectivamente, y se refieren a elementos de construcción que permiten la resignificación del uso de las gráficas en situaciones de variación. Más aún, el trabajo de Suárez y su propuesta centrada en los elementos de funcionamiento-forma para estudiar el desarrollo de usos de las gráficas, permitió establecer que este desarrollo en la obra de Oresme se presentaba en tres momentos. Es decir, en tres conjuntos de tareas que determinan actividades y acciones, así como alternancia de dominios, pero que además definen funcionamientos y formas posibles (Suárez y Cordero, 2010).

A continuación, se describen brevemente cada uno de los momentos de desarrollo del uso de la gráfica en el Tratado de Oresme. Se acompaña cada momento con la descripción de los funcionamientos y formas (Fu-Fo):

Momento I. *Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento del uso de las gráficas*

El primer uso de la gráfica en el Tratado se refiere a *comprender fenómenos de variación a través de figuras* (Uso-1). Este uso, determinaba un cambio de paradigma a las formas iniciales (Fo-1) de los conocimientos que en la época se usaban para la teoría del movimiento, donde la geometría y las proporciones estaban como cuerpos de conocimiento ajenos a dicha teoría. De manera que en el Tratado se establece un funcionamiento alternativo para *comprender fenómenos* (Fu-1), y para ello se establece una nueva forma que consistía en *asignar medidas a las variables físicas por medio de segmentos* (Fo-2), lo cual constituyó una resignificación de un viejo paradigma.

A su vez, esta segunda forma permitió la emergencia de un nuevo funcionamiento una vez establecida la nueva manera de comprender los fenómenos a través de figuras geométricas. Lo anterior generó el desarrollo a un posterior momento dentro del Tratado.

Momento II. *Construcción de argumentos en el uso de las gráficas*

La nueva manera de comprender el movimiento a través de formas geométricas y las proporciones, permitió que el funcionamiento de la gráfica (Fu-1) evolucionara hacia *establecer relaciones entre las figuras geométricas y las situaciones de variación* (Fu-2), pero ello precisa *discriminar figuras que representan situaciones de movimiento de las que no lo representan* (Fo-2). Se aprecia entonces, en este momento, un cambio hacia un uso de la gráfica más centrado en la *construcción de argumentos* (Uso-2).

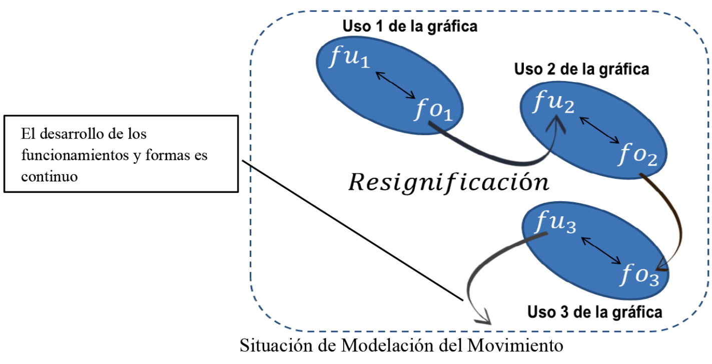
Momento III. *Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación.*

Una vez que el nuevo uso de las gráficas se resignifica en el Tratado de Oresme, las construcciones realizadas permiten *generalizaciones* (Uso-3), como por ejemplo, i) distinguir entre cantidad y cualidad del movimiento, ii) caracterizar puntos extremos de una cantidad que varía y iii) calcular áreas para cuantificar el movimiento a partir de la figura de velocidad (Fu-3, Fu-4 y Fu-5, respectivamente).

En síntesis, en el análisis del Tratado de Oresme se elucida una resignificación de las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación, lo cual en la época significó un importante avance para entender los fenómenos de movimiento y con ello se estableció un uso de las gráficas alternativo en la época. El análisis del uso de la gráfica en la obra de Oresme estableció las bases para la emergencia de una línea de investigación en la que se discute el estatus epistemológico de las gráficas en la construcción de conocimiento matemático dentro del dME (Buendía, 2011). Así, la Categoría M-G compone una epistemología para el Cálculo escolar y se reconoce su inserción al sistema didáctico a través de una situación específica adaptada a las condiciones escolares-institucionales del ambiente donde profesor y estudiantes interactúen (Montiel & Buendía, 2015). De manera que la *quid de la cuestión* se halla en el diseño de la situación, es decir, en provocar un escenario propicio para la aparición de la argumentación que responda a la situación.

El diseño de la Situación concreta los momentos caracterizados en el trabajo de Oresme, en términos de tareas, acciones y alternancia de dominios; es el producto material dentro del escenario escolar cuya base son los supuestos epistemológicos de la Categoría M-G. A este tipo de situaciones se le convino llamar Situaciones de Modelación del Movimiento (SMM), y su argumento central es la variación de fenómenos de cambio. En la SMM el uso de la gráfica evoluciona en tanto el debate entre los funcionamientos y formas de las gráficas que se desarrollan en los momentos de la situación. A dicha evolución se ha denominado dentro de la TS como una resignificación del uso de la gráfica. La figura 1 ejemplifica a la resignificación de los usos de las gráficas en una SMM, resaltando que dicho proceso no se considera estático, puesto que a través de las tareas que generan diversos funcionamientos y formas a lo largo de los momentos que componen a la SMM, se generan otros usos de las gráficas. De hecho, este modelo teórico considera un desarrollo tal como en la obra de Oresme se puede apreciar.

Figura 1. Modelo de Resignificación en la SMM



En la siguiente sección se discuten los aspectos metodológicos de la investigación y se resalta el diseño de la SMM que se elaboró con la intención de analizar los usos de las gráficas, que surgen en la modelación de una situación sobre el movimiento de una pesa unida a un resorte. El análisis se realiza con base en los elementos del modelo de resignificación del uso de la gráfica a partir de la delimitación de los funcionamientos y formas de la gráfica.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS: EL DISEÑO DE LA SMM Y LA POBLACIÓN DE ESTUDIO

La SMM se organiza en *momentos didácticos*, que harán referencia a los momentos referidos por Suárez y Cordero (2010) anteriormente mencionados. Los momentos no hacen referencia a una estructura temporal del estudio, sino más bien, y en consonancia a Chevallard (1999), *son en primer lugar, una realidad funcional del estudio, antes de ser una realidad cronológica* (p. 22). Así, un momento didáctico se entiende como el *tipo de tareas* y formas que se integrarán en el escenario escolar de la clase en términos de cómo se gestiona la situación de aprendizaje en tanto el desarrollo de funcionamientos y formas.

La SMM se organiza en tres momentos, donde se articula el argumento de la situación, a saber, el uso de la gráfica en la variación. Dicha situación problematiza, a través de las gráficas, el comportamiento asintótico y tendencial de un sistema Masa-Resorte. Para ello, se emplean sensores de movimiento y un artefacto físico que representa la situación experimentalmente (figuras 2). De esta forma, la situación provee un marco de referencia donde se resignifica la variación como un comportamiento asintótico y tendencial a partir de los usos de las gráficas pero desde lo que los estudiantes construyen y argumentan.

Figura 2. Instrumentos experimentales: resorte, pesa, calculadora gráfica y sensor de movimiento

A continuación, se presentan los momentos en los que se gestiona la SMM en el escenario didáctico:

Momento I. Establecimiento de una forma en el funcionamiento de las gráficas

En este momento se espera que los estudiantes construyan argumentaciones desde sus experiencias, con su propio lenguaje y vivencias, de aspectos que tienen que ver con el fenómeno de variación presentado: el movimiento de un resorte cuando se le pone una pesa. La tarea que se les solicita a los estudiantes en este momento es: *T1. Dibujar el movimiento del resorte cuando se le pone una pesa en uno de sus extremos, sin realizar el experimento vivencialmente.*

Como se puede apreciar, no hay ninguna condición para dibujar el movimiento, incluso no hay una "forma institucional"[3] específica bajo la cual se someta a los estudiantes, de manera que estos realicen sus producciones desde sus propias formas culturales que consideren adecuadas. Además, se espera que los estudiantes en este primer momento establezcan argumentos funcionales que permitan modelar el comportamiento del sistema como representaciones pictográficas alusivas al resorte, así como elementos gesticulativos que expliquen el comportamiento.

Momento II. Problematización de las formas de las gráficas a través de la variación

En este momento se cuestionan los modelos que los estudiantes generan en el momento anterior a través de discutir elementos como la anticipación, el comportamiento asintótico y los comportamientos globales-locales del sistema.

Para ello, se ponen en discusión las siguientes tareas:

T2. Explicar si el resorte se detiene y dónde se aprecia en el dibujo del movimiento que se realizó.

T3. Explicar en dónde el resorte se mueve más rápido y dónde más lento en las producciones realizadas.

---

[3] Con *forma institucional* se hace referencia a la visión donde se incluye la formalidad que demanda la matemática escolar sobre los conceptos matemáticos junto con sus representaciones canónicas y propiedades formales (Montiel & Buendía, 2015).

En este momento de la situación se propone a los estudiantes un "nuevo" grafismo con la intención de establecer una resignificación de las formas iniciales de las gráficas del primer momento. Para ello, se propone el uso de un sensor de movimiento y software, que permite múltiples realizaciones en la modelación y una estructura para producir patrones deseables a través de gráficas cartesianas.

Momento III. Construcción de argumentos en el uso de las gráficas en la modelación

Una vez establecido el nuevo grafismo con base en los elementos tecnológicos y donde la gráfica cartesiana permite hacer referencia a la variación del sistema, a su tendencia y al reconocimiento de puntos de referencia (como el origen), en este momento se espera mantener una estructura más compleja de las argumentaciones sobre la propiedad *asintótica* del sistema, es decir, la forma en la cual se expresa que el resorte se detiene. El uso de las gráficas entonces en este momento se resignifica como un modelo explicativo, manipulable y predecible de acuerdo a la tarea que se presenta en este momento:

> T4. *Anticipar cómo es la gráfica del movimiento del resorte posterior a un tiempo determinado*

El análisis que se realiza de los *Fu* y *Fo* en el uso de las gráficas entre los estudiantes y al dejarles proponer sus formas iniciales, establece una nueva línea de investigación donde es importante reconocer *formas culturales de saberes* que aparecen en sistemas de usos y que sería posible resignificar por medio de argumentos situacionales. A diferencia del trabajo de Suárez donde se les presentaba de inicio el uso de las gráficas con apoyo de dispositivos tecnológicos (calculadoras y sensores de movimiento) y de ahí se trabajan con las gráficas cartesianas para referirse a ciertos aspectos del Cálculo, la presente propuesta expone que antes de hablar de la gráfica cartesiana es importante reconocer aquello que permite la emergencia de *lo cartesiano*. Así, el objetivo del análisis de las producciones de los participantes durante la implementación de la situación es identificar la aparición de formas culturales del conocimiento que los participantes pongan en juego al enfrentarse a situaciones donde se problematice la variación, el cambio y los comportamientos con tendencia a través de un uso de las gráficas que se obtienen de modelar una situación de movimiento.

3.1. La población de estudio

Se decidió llevar a cabo una implementación de la SMM con un grupo de 30 estudiantes de bachillerato de la Ciudad de México, México, dentro de las instalaciones del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, CeCyT 11 "Wilfrido Massieu". El grupo estaba conformado por mujeres y hombres de 4º semestre, 23 varones y 7 mujeres, con una edad promedio de dieciséis años. Dado que la SMM fue una actividad extracurricular, se decidió realizarla con los estudiantes en una sesión siguiendo una organización tipo taller. Los estudiantes trabajaron en equipos de tres y debían responder los cuestionamientos propuestos en hojas de trabajo. El tiempo aproximado de la sesión del taller fue de alrededor de una hora y media y fue realizado durante un horario escolar.

La sesión se video grabó, se realizaron bitácoras de observación, y se recopilaron las producciones realizadas por los estudiantes. Posteriormente, se realizó la transcripción de la videograbación. El análisis se realizó considerando los tres momentos en los cuales se organizó la SMM y el tipo de producciones realizadas por los estudiantes, con la intención de que los argumentos generados –recuperados a partir del video- pudieran acompañarse de la producción escrita y gestual de los estudiantes.

4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La intención de este apartado es mostrar evidencia de ciertos saberes sobre las gráficas y sus usos, considerados opacados por el dME. Estos saberes conformarán la evidencia de esas formas culturales de saberes que constituyen *lo cotidiano* para los estudiantes participantes y aunque se trate de un "estudio de casos", es posible proponer un marco de referencia de los usos de las gráficas para resignificar el comportamiento asintótico en el rediseño del dME.

El análisis es de tipo cualitativo e interpretativo, el énfasis está puesto en las producciones que elaboraron los estudiantes durante la implementación y en la suma de ejemplos, con la finalidad de establecer clases o categorías. Estos elementos son los que permiten la construcción de la evidencia empírica a partir de un estudio de casos, que consiste en caracterizar la aparición, interpretación, descripción, y la lectura que los participantes hacen con las gráficas. El análisis se centra, debido a los datos obtenidos y analizados, en los dos primeros momentos planteados en el apartado 3.

4.1. La aparición de la trayectoria

La primera tarea de la situación del resorte consistió en solicitarles a los estudiantes que dibujaran el movimiento de un resorte cuando se le ponía una pesa, sin que se realizara el experimento con el resorte. Esta actividad inicial dio lugar a que los estudiantes formularan respuestas asociadas a dibujos icónicos y en algunas ocasiones dibujos que indicaran una secuencia temporal del comportamiento de la situación.

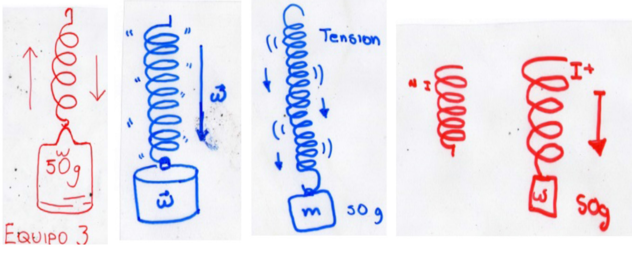
La manera en la cual se realiza el cuestionamiento a los estudiantes se puede apreciar en el extracto 1. Para efectos del análisis y la presentación de los resultados se utiliza la letra T para hacer referencia al "tallerista" o responsable de la implementación y E1, E2, etc. corresponde a diferentes estudiantes participantes de la actividad. Se indican además las líneas de diálogo para cada intervención de los participantes y tallerista.

> [1] T: ¿cómo sería el dibujo del movimiento de una pesa cuando se coloca en un resorte?
>
> [...]
>
> [2] T: *aquí tengo la pesa, es una pesa de 50 gramos, puedes tocarla para que veas que no hay truco... es una pesa normal y vamos a colocarla en el resorte... ¿ok?, ¿qué creen que pase?...*

Extracto 1. Instrucciones iniciales realizadas por T.

Algunas de las producciones de los estudiantes con base en el cuestionamiento planteado por T se presentan a continuación:

Figura 3(a), 3(b), 3(c), 3(d). El dibujo del *movimiento del resorte*



Con base en las producciones realizadas, T solicita a los equipos de trabajo que se conformaron en el grupo, que realicen explicaciones de sus propuestas. En los extractos 2 y 3, se aprecian dos ejemplos de respuestas de los estudiantes.

[1] E1: *dibujamos el resorte, que está un poco estirado porque tiene un peso de 50 gramos, hasta abajo. Pero no solo baja, sino que también se puede digamos que mover de un lado al otro* <hace referencia la figura 3(c) y señala los paréntesis de los lados> *así que si es pesado no solamente para abajo... el resorte, al punto de estirarse también puede* <mueve la mano a los lados, de izquierda a derecha no solo de abajo para arriba, para ejemplificar que el movimiento del resorte también podría presentar esa característica>... *una vibración...*

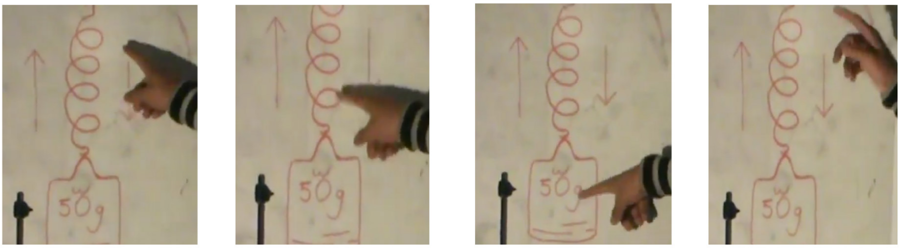
Extracto 2. Respuesta de un miembro del equipo que realizó el dibujo 3(c)

[1] E2: *como su peso es de 50 gramos... y al poner el peso baja y sube* <cuando dice esto señala las flechas que aparecen en el dibujo y mueve la mano de "arriba hacia abajo">
[2] E3: *rebota...*
[3] E1: *rebota como pelota...* <realiza un gesto de arriba hacia abajo>... *y no está estable...*
[4] T: ¿qué significa que no está estable?
[5] E1: *pues que no se queda quieto...*

Extracto 3. Respuesta de un miembro del equipo que realizó el dibujo 3(a)

Un elemento a resaltar es que la aparición de estos dibujos icónicos y el discurso de los participantes iba acompañado de gesticulaciones, es decir, de gestos que ocurren en asociación con el discurso (Kendon, 1987 citado por Vergel, 2015) como por ejemplo uno que hemos denominado la "mano vertical" (extracto 2); gesticulación que aparece en conjunción con el comportamiento y con frases como "sube y baja", "de arriba hacia abajo", etc. En la siguiente secuencia de imágenes de la figura 4 que a continuación presentamos, se brinda evidencia de la gesticulación de la mano vertical:

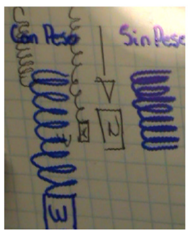
Figura 4. Secuencia de la “mano vertical” para explicar el movimiento del resorte



Como se puede observar en la secuencia de imágenes de la figura 4, el interés del estudiante es explicarle a T que el movimiento del resorte será “subir y bajar”. Este gesto acompañado del extracto 3, conforman una unidad funcional que permite explicar el comportamiento del movimiento del resorte según la situación planteada a los estudiantes.

Otro ejemplo de producciones de los participantes incluía una secuencia temporal de lo que observaban, tal y como se puede apreciar en la figura 3(d). Además, este dibujo era acompañado de comentarios como *“dibújale antes y después...”*, expresado por los estudiantes para referirse a instantes del fenómeno: cuando no tiene peso y después de colocar la pesa (ver figura 5).

Figura 5. Secuencias Temporales: resorte “con peso” y resorte “sin peso”



A partir de estas *clases de ejemplos* en este momento de la situación, notamos cómo las producciones de los estudiantes poseen convenciones sociales y culturales asociadas. Este tipo de convenciones y el tipo de respuestas basados en dibujos icónicos y en elementos del discurso, ya se reportaron en otras investigaciones (ver por ejemplo Sherin, 2000, DiSessa, Hammer & Sherin, 1991). Por ejemplo, una convención que los estudiantes utilizan es que ellos crean un dibujo para recrear una historia que están intentando contar (figura 3), pero además se apegan lo más posible a ella, sin tomar en consideración e incluir aspectos que "no ocurren o nunca ocurrieron" (Nemirovsky, Tierney & Tracy, 1998). Aunado a todo lo anterior, también se encuentra la relación entre gesto-discurso-dibujo (figura 4) para indicar con todo el cuerpo algo relativo a la dirección del movimiento, de manera que se conforma una unidad funcional que da cuenta del fenómeno.

Ahora bien y de acuerdo a el modelo de resignificación del uso de la gráfica hay que tomar una posición importante. El hecho de que no "apareciera" una gráfica cartesiana como configuración para referirse al movimiento, no significa que no hayan *usos* de la gráfica, puesto que se presentan *formas culturales de saberes conformados histórica, cultural y socialmente en esferas de la actividad humana*. Las producciones de los estudiantes contienen una carga cultural y social asociada a convenciones para referirse al movimiento, donde la gráfica cartesiana, que es una manera más para referirse a dicho movimiento, pero no la única, de lo cual resultan otros patrones de ajuste válidos y funcionales para los estudiantes, además de que son suficientes para realizar la tarea a la que se enfrentan. De manera que el funcionamiento (Fu-1) de las gráficas en este momento de la situación era para *indicar dirección y sentido del movimiento repetitivo*, pero a través de formular un patrón de ajuste de tipo icónico, gestual o verbal (Fo-1), por ejemplo mover la mano de "arriba hacia abajo" o utilizar flechas que indicaban si el resorte sube o baja. La argumentación que los estudiantes elaboran de la gráfica la basan en una herramienta que se ha denominado *Trayectoria*, la cual se define como un patrón de ajuste que hace referencia a aquello que se mueve indicando la dirección del movimiento por medio del lenguaje verbal, icónico o gestual. El uso de la trayectoria es una unidad funcional cuya lectura, interpretación y construcción que los estudiantes utilizan es para referirse a lo observable, en sí es un uso de la gráfica, y resignifica el espacio y el tiempo en un patrón de ajuste donde el *tiempo* se incrusta en la *distancia*; por lo que no indica explícitamente variaciones ni tendencias en el comportamiento. Es importante resaltar la postura de que la *trayectoria* es un uso de la gráfica y no una concepción errónea de la última, dada la postura socioepistemológica, donde se reconoce la validez de todo tipo de saberes ya sean técnicos, cotidianos o cultos.

Ahora bien, a partir de este análisis del uso de la gráfica en esta primera tarea es que emerge una manera de entender la comportamientos asintóticos o con tendencia del sistema en términos de cómo se usa la gráfica, es decir, la trayectoria permite una configuración de algo que *permanece sin cambios*, debido al tipo de patrones de ajuste que elaboran. Es por ello, que este primer uso de la gráfica detectado se le denomina: *orientación del movimiento* (Uso-1).

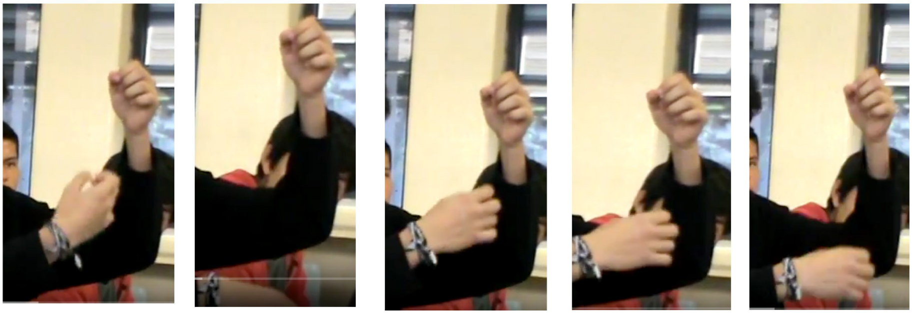
4.2. El abandono de la trayectoria y la aparición de la curva

Posteriormente a la tarea inicial, T cuestiona a los estudiantes sobre si el resorte se detiene o no durante su movimiento, con la intención de movilizar las producciones y los argumentos de los estudiantes hacia funcionamientos y formas que hagan emerger explícitamente el comportamiento particular del sistema. En síntesis, consideramos que argumentos como tendencia y variación permiten resignificar a la orientación del movimiento hacia otras formas y funcionamientos de las gráficas. De esta manera se problematizan los patrones de ajuste anteriormente propuestos por los estudiantes. Algunas respuestas de los estudiantes ante la Tarea 2 y la Tarea 3 de la SMM se encuentran en el siguiente extracto:

> [1] T: *E1, tu dijiste que sí se detiene* <refiriéndose al resorte con la pesa>... *¿por qué piensas que se detiene?*
> [2] E1: *porque sí se detiene, porque llega a un cierto tiempo en que...*
> [3] E2: *pierde fuerza...*
> [4] E1: *ajá... la fuerza se empieza a hacer más pequeña, más pequeña, más pequeña, más pequeña, hasta que ya...* <Mientras E1 explica, realiza un movimiento vertical con la mano pero reduciéndolo cada vez más mientras realiza su explicación, como haciendo que el tiempo "avance">. (Ver secuencia de imágenes en figura 6).
> [5] T: *a ver... E3 dice que no se detiene* <refiriéndose al resorte con la pesa>, *¿por qué no se detiene?*
> [6] E3: *porque tiene mucho peso, no se va a detener... va a seguir...* <se hace referencia a la fuerza de gravedad que siempre jala para abajo>

Extracto 4. ¿El resorte se detiene?

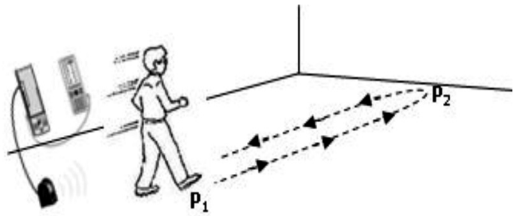
Figura 6. El resorte se detiene: la "mano vertical" se modifica



Como podemos observar, la problematización de los patrones de ajuste consistía en poner en discusión las argumentaciones iniciales. Específicamente al hacer referencia a la tendencia, a la variación y a aspectos globales del comportamiento, o sobre cómo será el dibujo del movimiento del resorte después de pasados ciertos minutos; o cuando se les solicitaba que reflexionaran sobre cuándo el resorte iba rápido o lento de acuerdo a la propuesta de dibujo que realizaron. Las respuestas de los participantes se inclinan más hacia la necesidad de completar con información escrita y anotaciones en sus producciones; como incluir a un lado del dibujo la frase "muy rápido", o la palabra "lento", etc. Esta propuesta también aparece en otras experiencias con otros estudiantes donde muchos dibujos eran complementados con información necesaria para aclarar lo que sucedía (ver por ejemplo: Zaldívar, 2015; Zaldívar y Cordero, 2012; Briceño y Cordero, 2012).

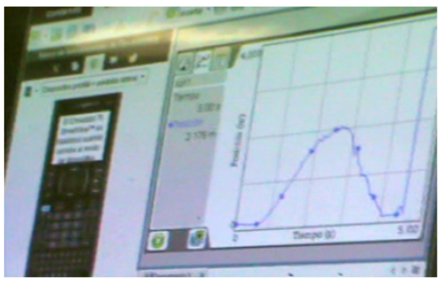
Posterior a estos cuestionamientos y con la intención de una búsqueda de consensos con los estudiantes, se decide emplear un sensor de movimiento y el emulador de la calculadora graficadora *TI-Nspire CX* como un medio que permite la aparición de un patrón de ajuste distinto al que los participantes emplearon inicialmente. Durante la implementación de la situación, se decide introducir la tecnología a partir de un ejemplo distinto al planteado inicialmente. Para ello se usa un caso presentado en Briceño y Cordero (2012) de una persona que camina frente al sensor de movimiento en línea recta y se aleja y regresa al punto de partida (figura 7).

Figura 7. Situación de movimiento propuesta



Se permite que los estudiantes realicen algunos movimientos frente al sensor con la intención de que se familiaricen con el ambiente tecnológico y con el funcionamiento del sensor. Los estudiantes además eligen la manera en la cual se mueven frente al sensor: rápido, lento, etc. Al realizar esta experiencia, los estudiantes visualizan gráficas como la siguiente (figura 8):

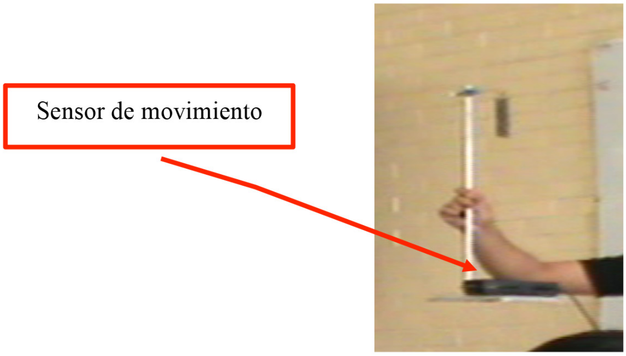
Figura 8. La gráfica con el sensor de movimiento



Las preguntas de T durante este momento de la implementación tienen que ver con dónde estaba ubicado físicamente el participante en puntos específicos de la gráfica: en el inicio, en el valor máximo y en qué momento regresó. La intención de este momento es empezar a reflexionar sobre un *punto de referencia.*

Durante el caso de la implementación que presentamos en el presente artículo, T no realiza la simulación con el resorte, sino que les solicita a los estudiantes que con base en el funcionamiento del sensor que acaban de experimentar, propusieran *cómo sería la gráfica del movimiento* del resorte si se usara el sensor (Tarea 4). En este momento, con ayuda de los casos anteriores sobre el movimiento de una persona se esperaba que los estudiantes con ayuda de la tecnología identificaran un punto de referencia menos artificial anclado al origen fenomenológico de la situación de modelación. Para ello, T aclara la manera en la cual ubicará el sensor de movimiento en el sistema físico del resorte (ver figura 9).

Figura 9. Ubicación del punto de referencia del sensor en el sistema físico del resorte

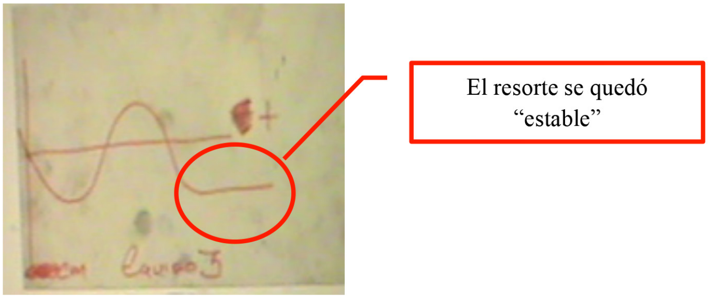


Desde este análisis de los usos de las gráficas el "abandono" de la trayectoria como patrón de ajuste surge entonces cuando la situación exige un análisis de la estructura interna del sistema a modelar, pero en términos de problematizar explícitamente lo variacional y la tendencia del comportamiento del sistema. Esto implica complejizar el patrón de ajuste basado en trayectorias con apoyo de la tecnología.

Consideramos que los argumentos de variación, tendencia y la ubicación de un punto de referencia provocan, de manera sistémica, una resignificación del uso de la gráfica a partir del momento 1. Así mismo, el ingreso de la tecnología permitió discutir sobre el origen fenomenológico y el cartesiano y sus relaciones, como puntos de referencia necesarios. De esta manera indicar dirección y sentido parece ser insuficiente pero también necesario para explicitar elementos variacionales y tendenciales; puesto que se encuentran en la base de las justificaciones funcionales.

Entre las propuestas que los estudiantes elaboran con respecto a la gráfica del movimiento del resorte, se observan los siguientes ejemplos (figura 10):

Figura 10. Producción del equipo 3



La explicación que realiza un miembro del equipo sobre la gráfica anterior (figura 10) es la siguiente:

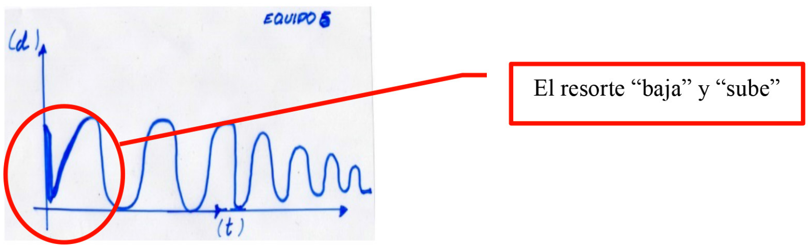
> [1] E1: *es una gráfica como tipo de ondas senoidal* (sic)... *pero aquí es el punto donde el resorte está quieto y se le aplica lo que es una fuerza de 50 gramos y aquí desciende... aquí sube y aquí se queda quieto* <muestra el corte con el eje de las X>... *no... 'pera... Aquí baja, sube, se queda quieto, sube... vuelve a bajar... y así hasta que queda estable...*
> [2] *T: y esa recta significa qué...* <se refiere a la última parte de la gráfica>
> [3] E1: *que se quedó estable...* <realiza un gesto con la mano de forma horizontal (ver elemento encerrado en la figura 10)>

Extracto 5. Explicación de la gráfica del equipo 3

Como podemos apreciar en el extracto anterior, aun cuando el funcionamiento del sensor de movimiento ya se discutió, el punto de referencia establecido como el origen cartesiano no tiene un significado claro, es decir, no se lee como tal, puesto que la curva “corta” al eje horizontal y no se ubica únicamente en el primer cuadrante. De manera que dibujar ejes a manera de representar ejes cartesianos, no implica una lectura funcional entre las variables de correspondencia entre las mismas.

Otro ejemplo es realizado por el equipo 5:

Figura 11. Producción del equipo 5



Explicación de la producción del equipo 5 con base en la figura 8:

> [1] E4: *bueno aquí estamos en nuestra gráfica considerando distancia sobre el tiempo* <se refiere a los ejes>... *entonces, lo que hace aquí es... no consideramos números negativos ni el cuarto cuadrante... Lo que empieza a hacer el resorte al insertar la pesa es... luego luego al instante deja caer la fuerza... y aquí al caer la fuerza va a volver a subir* <zona señalada en la figura 11>... *va a tener un regreso, así conforme va pasando el tiempo va haciendo la misma... el mismo recorrido y la misma onda, pero mientras más tiempo pasa esta onda va disminuyendo ya que hay un momento en el que va a llegar* <con la mano recorre la gráfica sobre ella y con un dedo> *a ser estática.*

Extracto 6. Explicación de la gráfica del equipo 5

A la luz de nuestro análisis, las producciones de los estudiantes tienen más referencias a un comportamiento asintótico de manera más explícita. Consideramos que este comportamiento se reconoce asociado a la tendencia que presenta el fenómeno, que se expresa en las "curvas" suaves y en las partes de la "curva". Este significado surge cuando la gráfica se usa para *analizar la estructura interna del sistema* (Fu-2) y expresar globalidad, variación y en ocasiones tendencia a través de un nuevo patrón de ajuste que denominamos *Curva* (Fo-2), que es un patrón de ajuste que se lee globalmente e integra elementos tendenciales, más complejos que los que la trayectoria permite analizar. En sínstesis, la curva se convierte en la nueva unidad funcional que expresan los estudiantes. Es importante notar que las referencias al discurso inicial de los estudiantes cuando mencionaban que el resorte "sube-baja", "rebota", etc., en este nuevo uso de la gráfica, aparecen más incrustadas en justificaciones con respecto al sistema y su comportamiento. Sin embargo, la lectura, interpretación y construcción que hacen de la gráfica no parece aún contar con las convenciones sociales propias de las gráficas cartesianas, que incluye elementos como escalas, unidades de las variables, ubicación de puntos ordenados (x,y) de coordenadas, y un análisis local de éstos.

Consideramos con base en el análisis de estos casos que las trayectorias como patrón de ajuste no se eliminan del "todo" del uso de la gráfica; la resignificación es progresiva y se está ante elementos que permiten la emergencia del sistema cartesiano, lo cual se logra con la integración de la variación y la tendencia al uso de la gráfica. Sin embargo, los estudiantes no lo logran por completo, ya que existen errores como la ubicación del origen y el uso del espacio de los cuadrantes y los signos que pueden tomar las variables.

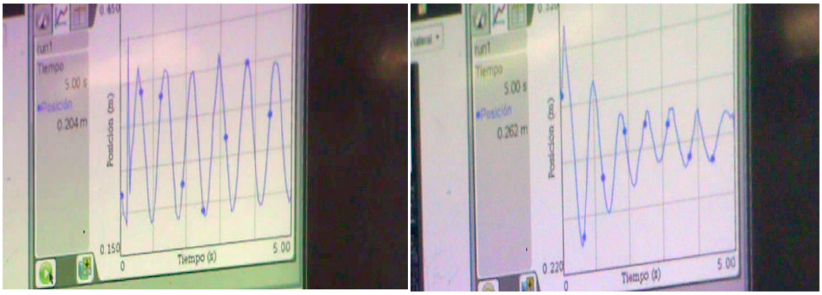
En este uso de la gráfica, el análisis de la estructura del sistema (Uso-2) que se discutió anteriormente, se aprecia una necesidad por parte de los estudiantes de "dividir" a sus producciones: "cuando se mueve", "cuando empieza a detenerse", "cuando se detiene". Pero más aún, no existe una necesidad de expresar todo el recorrido, sino su intención es sólo dar una idea general del comportamiento de manera global y anticipar cómo será la forma de la gráfica, que era expresado a través de una *línea recta* al final de las curvas (ver extracto 7). Tampoco existe un señalamiento claro al punto de referencia, sino indicios. Este uso de la gráfica, sin embargo, ya integra elementos de variación y tendencia.

> [1] T: *¿qué pasaría en tu gráfica si yo dejara el sensor durante 10 minutos?* <se refiere a la posibilidad de estar tomando datos del resorte durante ese tiempo>
> [2] E1: *mmm, pues en algún punto se tendría que detener...*
> [3] T: *¿cómo va a ser la gráfica?*
> [4] E1: *pues como esta... va a ser una línea recta* <con la mano dibuja una recta horizontal>

Extracto 7. La línea recta como patrón de ajuste para indicar el comportamiento asintótico del sistema

Posterior a la discusión de las propuestas de todos los equipos, T propone el uso de la tecnología para comprobar las hipótesis de los equipos y confrontar algunas de las producciones. Algunas de las gráficas cartesianas que obtiene con ayuda del sensor se encuentran en la figura 12:

Figura 12. Ejemplos de gráficas obtenidas con el sensor y la calculadora del movimiento del resorte



Por último y para continuar con la reflexión del comportamiento asintótico del sistema, T propone una gráfica y cuestiona a los estudiantes sobre si esa gráfica podría representar el movimiento de un resorte y bajo qué condiciones. En este momento de la situación se pretende que los estudiantes reflexionen sobre diferentes tipos de amortiguamiento del sistema masa-resorte: amortiguado, sub-amortiguado, críticamente amortiguado (Zill, 1997).

5. COMENTARIOS FINALES

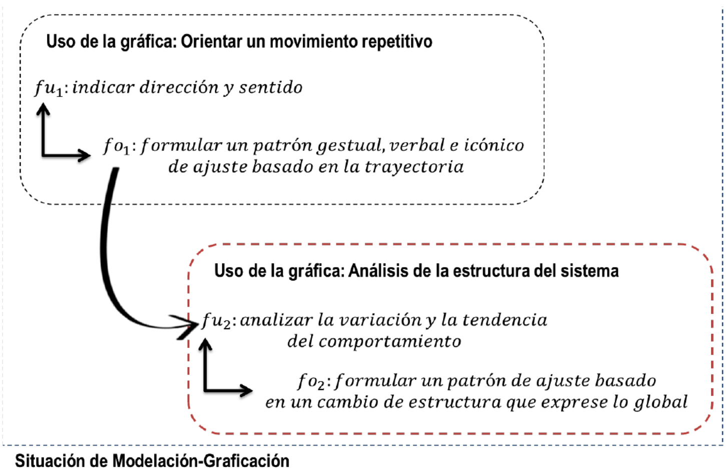
La pregunta que le da nombre al presente artículo implica un reto en la investigación en Matemática Educativa. Implica por un lado, considerar a los estudiantes ya no como sujetos únicamente cognoscentes, sino como individuos con sentimientos, ideas, y partícipes de su propio proceso de aprendizaje de las matemáticas. Pero por otro lado, la pregunta implica reflexionar sobre la noción de aula y encontrar, con base en la investigación, otros marcos de referencia donde el conocimiento matemático se resignifica y adquiere significación en el uso intencional de herramientas matemáticas. Más aún, esos otros marcos de referencia, deben ser tales que permitan un rediseño del dME *desde* el análisis de los conocimientos de los estudiantes en términos y de su aporte.

El considerar el uso de la gráfica permitió no acentuar la reflexión únicamente en el concepto de función, sino ampliar esa visión e inclusive prescindir, gracias a la modelación-graficación, de referencias a ecuaciones. Pero además, el análisis deja ver que la gráfica cartesiana también subordina en el dME otras resignificaciones y unidades funcionales de la gráfica, como son las trayectorias y las curvas de comportamiento, que compondrían formas culturales de saberes a las que también los estudiantes hacen referencias al enfrentarse a situaciones de movimiento relativo.

En síntesis, el análisis permite ver que la *búsqueda de la permanencia* (búsqueda de invariantes) *en las cosas que varían* es parte de la actividad humana relativa a una significación del movimiento relativo, dada la situación específica (Zaldívar, 2014). Sin embargo, esta función podría considerarse opaca en el dME. De manera que las argumentaciones iniciales del comportamiento con tendencia basada en trayectorias, aparecían porque existía, a través de la tarea, una necesidad intencional de buscar la permanencia en el cambio, y un patrón de ajuste lo encuentra en las trayectorias (figura 13).

Al acentuar el análisis en los funcionamientos y formas del uso de las gráficas se deja evidencia de aquello que subyace en la lectura e interpretación de las gráficas, y el porqué los participantes producían el tipo de respuestas, pero también cómo es posible producir resignificaciones progresivas hacia integrar más elementos y complejizar patrones de ajuste iniciales (ver figura 13). Tal función la tuvieron los argumentos variacionales y tendenciales que la situación provocaba.

Figura 13. Marco de Referencia de los usos de las gráficas en la SMM



Se considera que el comportamiento asintótico deviene entonces de la resignificación del comportamiento tendencial visto como permanencia y constituye un elemento de funcionalidad que se derivó de la orientación y del cambio de estructuras y patrones, por medio de la variación y el reconocimiento de un punto de referencia.

Por último, se requiere el desarrollo de más investigaciones que permitan dejar ver otros marcos de referencia donde el conocimiento matemático se resignifique y que permitan la aparición y habilitación de una matemática funcional en el sistema didáctico. Sin embargo, también esto último precisa de escenarios escolares *ad hoc* a los avances actuales y que se tensen elementos como los que esta investigación problematizó: el uso del conocimiento matemático por sobre lo utilitario de la matemática escolar.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, L.M.W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM, 50*(1-2), 19-30.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), p. 19-48.

Blum W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Brenner, M. & Moschkovich, J. (Eds.) (2002). *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Briceño E. y Cordero F. (2012). Un estudio del uso de la tecnología escolar en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, pp. 229-245.

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: una mirada desde la Socioepistemología. *Premisa*, *48*, 42-50.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 299-333.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa, S.A.

Cantoral, R.; Montiel, G. & Reyes-Gasperini, D. (2015). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 5-17.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM, 50*(1-2), 77-89.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo Veintiuno editores.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad del mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. Doi:10.4471/redimat.2013.26.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Invetigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, F.; Gómez, K.; Silva, H. & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Gedisa.

DiSessa, A.; Hammer, D.; Sherin, B. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. *Journal of mathematical behavior, 10*, 117-160.

García, F. Gascón, J., Ruiz, L., Bosch, M. (2006). Mathematical Modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, *38*(3), 226, 246.

Kaiser, G. Y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302-310.

Montiel, G. & Buendía, G. (2015). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez, (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de Matemáticas,* pp. 169-219. México: Díaz de Santos.

Nemirovsky, R. Tierney, C. & Tracy, W. (1998). Body and graphing. *Cognition and Instruction*, *16*(2), 119-172.

Rodríguez, R. & Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, *28*(3), 91-110.

Sherin, B. (2000). How students invent representations of motion. A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior, 19*, 399-441.

Soto, D. & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Suárez, L. (2014). Modelación-graficación para la matemática escolar. Díaz de Santos: México.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática, 25 años*, 207-226.

Vergel, R. (2015). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 68*, 9-17.

Zaldívar, J. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar.* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Zaldívar, J. (2015). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde una visión de construcción social. *Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-CIAEM 2015*. Recuperado el día 20 de abril de 2015 de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/952/393

Zaldívar, J.; Cen, C.; Briceño, E.; Méndez, M.; Cordero, F. (2014). El Espacio de Trabajo Matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-II), 417-436.

José David Zaldívar Rojas

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matematicas,
calle David Berlanga, Unidad Camporredondo, edificio A,
CP. 25000, Saltillo, Coahuila.

Teléfono: 844-3501246

 DOI: 10.24844/EM3102.10

Cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas: el caso de Frida

Change of attitude toward mathematics learning: The case of Frida

Alejandro Coca Santillana[1]
Isaias Miranda[2]

Resumen: El objetivo de esta investigación es analizar el cambio de actitud (de negativa a positiva) hacia el aprendizaje de las matemáticas experimentado por Frida, una estudiante de bachillerato. El análisis se hizo con el marco teórico de la estructura cognitiva de las emociones. Éste establece que las emociones son causadas por la interpretación que la persona realiza sobre las consecuencias que, para sus metas, normas y actitudes, representan los acontecimientos, la actuación de otras personas y su relación con las cosas, respectivamente. El cambio de actitud se analizó por medio del reporte de las experiencias emocionales que Frida experimentó a través de un año escolar, en el que ella asistió a dos cursos de matemáticas y a clases de asesorías personalizadas. Los resultados indican que el cambio de actitud se inició cuando sus reacciones no fueron en el sentido sugerido por la teoría para emociones de la misma valencia (con base en metas, en normas y en actitudes), sino en sentido opuesto; es decir, Frida, durante los cursos de asesoría, comenzó a desestructurar una actitud negativa hacia las matemáticas, debido a nuevas evaluaciones sobre

Fecha de recepción: 28 de noviembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 26 de noviembre de 2018.
[1] Instituto Politécnico Nacional, CECyT 14, acoca@ipn.mx, orcid.org/0000-0002-9434-6576
[2] Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria, imirandav @ipn.mx,, orcid.org/0000-0003-2076-7383

agentes y eventos basadas en sus normas y metas personales. Al final del artículo, se hacen algunas recomendaciones para la enseñanza.

Palabras clave: *experiencias emocionales, cambio de actitud, estudio de caso, estructura cognitiva de las emociones*

Abstract: The aim of this research is to analyze the change in attitude (from negative to positive) to the learning of mathematics experienced by Frida, a high school student. The analysis was based on the theoretical framework of the cognitive structure of emotions. It states that emotions are caused by the person's interpretation of the consequences for their goals, norms and attitudes of events, other people's actions and their relationship to objects, respectively. The change in attitude was analyzed by means of the report of Frida's emotional experiences throughout a school year, in which she attended two math courses and one-on-one counseling classes. The results indicate that the change in attitude began when her reactions were not in the sense suggested by the theory for emotions of the same valence (based on goals, norms and attitudes), but in the opposite sense. That is, Frida, during the counseling courses, began to de-structure a negative attitude toward learning mathematics due to new evaluations of agents and events based on her personal norms and goals. The paper ends with some recommendations for teaching.

Keywords: *emotional experiences, attitude change, case study, cognitive structure of emotions*

INTRODUCCIÓN

En su revisión del estado del arte del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, McLeod (1992) clasificó, en tres conceptos, los estudios correspondientes al ámbito afectivo: creencias, actitudes y emociones. La diferencia entre estos conceptos radica en los grados de estabilidad e intensidad con los que se presentan en los individuos; siendo las creencias las más estables y menos intensas y, por el contrario, las emociones, las más intensas y menos estables. Entre las creencias y las emociones se encuentran las actitudes. Revisiones posteriores a las de McLeod sobre el campo afectivo agregaron un cuarto concepto: los valores (De Bellis & Goldin, 2006). Aun cuando las investigaciones en educación matemática han centrado su atención en estudiar las creencias y las actitudes de los estudiantes sobre, respectivamente, la forma de concebir las matemáticas y sus disposiciones ante la clase de matemáticas (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006), los reportes sobre el proceso emocional de los estudiantes en el momento de resolver problemas de matemáticas no rutinarios han aportado interesantes resultados (Mandler, 1989a, 1989b; McLeod, 1989). Por ejemplo, en su estudio, Op 'T Eynde, De Corte y Verschaffel (2006) encuentran que los estudiantes experimentan molestia, frustración, enfado, ansiedad, alivio y felicidad en diferentes etapas de la resolución de problemas. En el proceso de solucionar un problema, los estudiantes también experimentan estrés y frustración, sobre todo cuando sus intentos de solución se agotan; pero, una vez superado este bloqueo, los estudiantes experimentan emociones positivas como alegría o satisfacción (Goldin, 2000). En cuanto a las actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas, se han realizado estudios sobre aspectos de género (Fennema, 1979), relaciones entre actitud y rendimiento (Gómez-Chacón, 2009) y estudios sobre la actitud hacia las matemáticas como predictor del comportamiento (Leder y Forgasz, 1997). Un campo interesante y fértil de investigación lo representa la relación entre dos tipos de constructos afectivos como las actitudes y las emociones, ligados por la tesis de que la repetición de emociones puede ser la base para fijar las actitudes (McLeod, 1992; Hannula, 2012), lo cual convierte a las emociones en un concepto fundamental para el estudio de la interacción del aspecto afectivo y los procesos cognitivos (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006). Entre los estudios que abordan el cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas y las emociones destaca el modelo tridimensional propuesto por Di Martino y Zan (2010, 2014). En él, los alumnos describen, por medio de narraciones, su relación con las matemáticas en su trayectoria escolar. Estos investigadores destacan que algunos factores importantes para generar en el estudiante un perfil de actitud hacia las matemáticas son: su disposición emocional, su visión de las matemáticas y qué tan competentes los estudiantes se perciben a sí mismos para el aprendizaje. Aunque en este modelo y otros semejantes (Op 'T Eynde & Hannula, 2006; Zan & Di Martino, 2007; Hannula, 2003) se aborda el aspecto emocional, no son las emociones el centro de la explicación para entender el cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas, sino un conjunto formado por emociones, expectativas hacia el aprendizaje de las matemáticas y valores (Hannula, 2002).

Di Martino y Zan (2011) sugieren que la Estructura Cognitiva de las Emociones (OCC) (Ortony, Clore & Collins, 1988) es una teoría adecuada para el estudio de las emociones que experimentan los estudiantes en actividades matemáticas rutinarias. Un ejemplo del uso de esta teoría se encuentra en la investigación de Martínez-Sierra y García-González (2014), quienes realizaron un estudio sobre experiencias emocionales narradas por estudiantes de bachillerato. Otros autores, aunque no han visto concretada, de forma amplia, la teoría OCC en el ámbito de las matemáticas, piensan que sus aportaciones podrían "ser de gran ayuda, particularmente en la determinación de cómo las respuestas emocionales más tempranas pueden ser posteriormente fuente de actitudes hacia las matemáticas..." (Gómez-Chacón, 2000; 37). Con base en la teoría OCC y, tomando en cuenta el estudio de Martínez-Sierra y García-González (2014), en la presente investigación se estudia un cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas mediante el estudio de las emociones de una estudiante de bachillerato, Frida (pseudónimo), experimentadas en dos situaciones contrastantes para ella: antes y después de haber aprobado dos cursos de matemáticas.

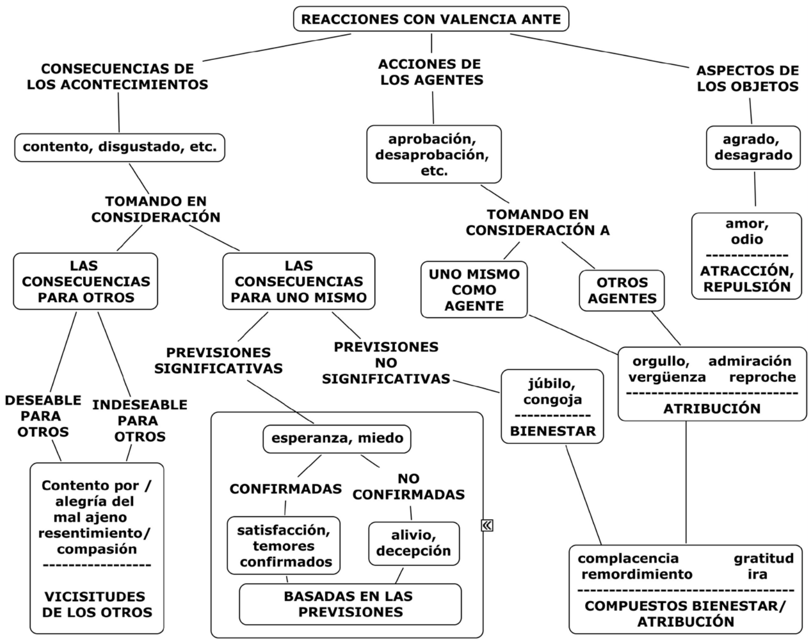
La pregunta de investigación que guio este estudio fue: ¿cómo, a partir de sus expresiones emocionales, Frida generó un cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas? En la siguiente sección se detallan los principales conceptos de la teoría OCC, utilizados para responder esta pregunta.

MARCO TEÓRICO

La teoría OCC (Ortony *et al.*, 1988) argumenta que la causa de las emociones radica en la evaluación que hace la persona de las repercusiones que sobre sus metas, normas o actitudes tienen los acontecimientos, la actuación de otras personas o las cosas mismas. Esta teoría no centra su atención en definir con precisión las palabras que denotan las emociones, sino en caracterizar las diferencias entre los distintos tipos de emociones. Según Ortony *et al.*, (1988), "el análisis de las emociones no debe considerarse una teoría acerca de las palabras que se refieren a emociones" (p. 18). Con la teoría OCC se pretende caracterizar las diferencias entre los distintos tipos de emociones, según las diferentes clases de cogniciones que las generan.

En la teoría OCC, las emociones son reacciones con valencia ante tres aspectos básicos: acontecimientos, agentes y objetos. A partir de estos tres grupos se establece la estructura general, compuesta por 22 emociones generadas por sus respectivas evaluaciones (Figura 1).

Figura 1. Estructura global de los tipos de emoción



Fuente: Ortony *et al.* (1988)

Las reacciones con valencia ante acontecimientos se dividen en dos tipos, dependiendo de si la persona que experimenta la emoción está reaccionando ante las consecuencias de acontecimientos que le afectan a ella (consecuencias para uno mismo) o bien que afectan a otras personas (consecuencias para otros). La rama de consecuencias para uno mismo se divide en previsiones significativas sobre lo que se espera de un evento (esperanza ante lo que se espera de un evento deseable, o miedo ante lo que se espera de un evento indeseable) y previsiones no significativas que generan las emociones de bienestar (júbilo y congoja). A su vez, las previsiones significativas, al confirmar o no lo que se esperaba, generan emociones como alivio (agrado ante la no confirmación de un evento que se esperaba desagradable), decepción (desagrado ante la no confirmación de un evento que se esperaba agradable), satisfacción (agrado ante la confirmación de que ha sucedido un evento agradable) o temores confirmados (desagrado ante la confirmación de que ha sucedido un evento desagradable). Con respecto a la rama de consecuencias para otros, si son deseables, se puede estar contento por ello (agrado ante un evento agradable para otros) o resentido (desagrado ante un evento agradable para otros) y si son indeseables se puede estar alegre del mal ajeno (agrado ante un evento desagradable para otros) o sentir compasión (desagrado ante un evento desagradable para otros). El segundo conjunto principal de emociones corresponde a reacciones con valencia ante agentes. Pero debe resaltarse que el concepto de agente no se limita a seres vivos, sino a aquello que la persona percibe como causante de algo que le afecta, sea una persona, una institución o una cosa. Este conjunto de emociones se divide en dos ramas, dependiendo de si uno mismo se percibe como el causante del evento (uno mismo como agente) o bien otras personas. Si es uno mismo el agente, las emociones que pueden surgir son orgullo (aprobación de una acción plausible de uno mismo) o vergüenza (desaprobación de una acción censurable de uno mismo); y si los agentes son otros, pueden generar emociones como la admiración (aprobación de una acción plausible de otro) o el reproche (desaprobación de una acción censurable de otro). Existe también una rama generada por la ocurrencia simultánea de consecuencias de acontecimientos asignados fuertemente a un agente (compuestos bienestar-atribución) que pueden generar emociones como complacencia (aprobación de una acción plausible de uno mismo + contento por un acontecimiento deseable), remordimiento (desaprobación de una acción censurable de uno mismo + disgusto por un acontecimiento indeseable), ira (desaprobación de una acción censurable de otro + disgusto por un acontecimiento indeseable) o gratitud (aprobación de una acción plausible de otro + contento por un acontecimiento deseable). El tercer conjunto principal de emociones corresponde a la atracción o repulsión que nos generan agrado o desagrado ante los objetos o sus propiedades, sin embargo, debe apuntarse que las reacciones ante objetos no necesariamente deben limitarse a los objetos como tales sino también a personas, instituciones o conceptos tratados como tales.

Es importante resaltar que en la teoría OCC la evaluación de los *acontecimientos* que generan la emoción se realiza a partir de las *metas* a las que una persona aspira. Asimismo, la evaluación de las acciones de los *agentes* se realiza de acuerdo con las *normas* consideradas válidas por la persona que aprueba o desaprueba lo que alguien ha hecho; finalmente, las emociones de atracción o repulsión respecto a los objetos (o aspectos de ellos) están sustentadas en evaluaciones que la persona realiza basada en sus *actitudes*. Así, las *metas, normas y actitudes* conforman el perfil básico sobre el cual cada persona realiza su estructura de valoración y determinan la intensidad de las emociones; es decir, la reacción ante un acontecimiento depende de qué tan *deseable* es la consecución de una *meta* obstruida o facilitada por dicho acontecimiento; de forma semejante, la *plausibilidad* o no de la actuación de una persona se rige por las *normas* que la persona acepta como válidas, y asimismo, la *capacidad de atraer* de un "objeto" se genera con base en las *actitudes*. Para evitar confusiones con las diferentes definiciones que existen sobre *metas, normas y actitudes*, en la Tabla 1 se presenta la explicación de la teoría OCC sobre cada uno de estos tres conceptos.

Tabla 1. Estructura de valoración de las emociones

Emociones basadas en	Variable central	Valoración basada en Metas, Normas y/o Actitudes
Acontecimientos	Deseabilidad	Metas: "Resultado de procesos deductivos basados en aspiraciones abstractas de alto nivel y en consideraciones locales relativamente específicas" (Ortony *et al.*, 1988, p. 43).
Agentes	Plausibilidad	Normas: "Tipo de pautas a las que apelan las personas ordinariamente cuando explican por qué aprueban o desaprueban lo que alguien está haciendo o ha hecho" (Ortony *et al.*, 1988, p. 55).
Objetos	Capacidad de atraer	Actitudes: "Agrado o desagrado *disposicional* que uno tiene hacia ciertos objetos, o atributos de objetos, sin referencia a normas o metas" (Ortony *et al.*, 1988, p. 57).

Fuente: Elaboración propia, basada en Ortony *et al.* (1988).

Vale destacar que, si bien la evaluación ante objetos o las propiedades de éstos no hace referencia a normas o metas sino a actitudes, estas últimas se generaron, al menos en parte, como resultado de la acumulación, a través del tiempo, de experiencias emocionales de la misma valencia ante acontecimientos y agentes. Según Ortony *et al.* (1988), puede presentarse una dirección en la cual se justifican de manera lógica las experiencias emocionales: primero se evalúa la afectación a las metas de la persona; después se evalúa la actuación de los agentes según las normas de la persona y, finalmente, se generan emociones de atracción o rechazo, basadas en *actitudes* que sobre los "objetos" (o sus propiedades) la persona directa (experiencia adquirida) o indirectamente (influencias innatas y culturales) se ha formado. Así, para explicar el inicio de un cambio de actitud en la persona, se propone recorrer esta dirección (metas-normas-actitudes) en sentido contrario (actitudes-normas-metas). Es el análisis de esta última dirección la que se reporta en este estudio.

METODOLOGÍA

En esta sección se presenta el contexto en el cual se realizó la investigación, seguido de una descripción de la estudiante Frida (15 años) y, finalmente, los métodos cualitativos usados en la recolección de los datos.

Contexto de la investigación

La metodología de esta investigación fue cualitativa, en su modalidad de estudio de caso. Una de las ventajas que ofrecen los estudios de caso es la de proporcionar "un ejemplo único de personas reales en situaciones reales, permitiendo a los lectores comprender ideas más claramente que simplemente representarlas con teorías y principios abstractos" (Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 253). De los cinco métodos cualitativos de estudio de caso (observación, entrevista, trabajo etnográfico, análisis del discurso y análisis del texto), identificados por Travers (2001), consideramos que la entrevista y el análisis del discurso proporcionarían la información útil para estudiar el cambio de actitud de Frida hacia el aprendizaje. El motivo principal de elegir la entrevista se debió a que con ella podíamos conocer las emociones diarias de Frida, quien asistía, dentro de su plantel escolar, regularmente a asesorías de matemáticas (ver la sección "Frida: la participante de este estudio"). De esta forma, las respuestas obtenidas de las entrevistas fueron grabadas y, una vez transcritas, analizadas con base en los principios de la teoría OCC.

Antes de describir la situación escolar de Frida en el momento de la toma de datos, explicamos las diferentes opciones que ofrece el reglamento de su escuela para que ella (y cualquier estudiante) aprueben los cursos de sus planes de estudio.

En la escuela de Frida la calificación mínima aprobatoria de cada curso es 6 (en una escala de 0 a 10). La primera opción de aprobación corresponde al periodo de seis meses que dura el curso (*curso ordinario*). La calificación final se obtiene del promedio de tres calificaciones parciales. Si la estudiante no aprueba el curso en esta opción, debe presentar, al final de ese semestre, un *examen extraordinario* (EO). Si la estudiante no aprueba el EO, puede presentar *Exámenes a Título de Suficiencia* (ETS), los cuales se ofertan en cuatro periodos, repartidos durante un año. Si la estudiante, o bien no aprueba uno o dos de esos ETS, o bien decide no presentarlos, puede aprobar el curso por medio de una opción más, sujeta a disposiciones administrativas (como la disponibilidad de espacios y docentes). Esta cuarta opción consiste en *cursar nuevamente* el curso a contraturno. Sin embargo, esta opción no impide que la estudiante pueda presentar los ETS ofertados durante el semestre en que cursa nuevamente el curso reprobado. Si la estudiante no aprueba el curso por segunda ocasión, ya no podrá inscribirse al semestre siguiente y debe solicitar un permiso escolar para seguir presentando ETS. Con este permiso, la estudiante no está autorizada a asistir a curso alguno. Si no logra obtener una calificación aprobatoria en los ETS autorizados por el permiso escolar, la estudiante debe dejar la escuela.

Frida: la participante de este estudio

Describamos ahora el caso de Frida. En agosto de 2013, Frida se inscribe al primer semestre. El único curso de matemáticas que debe tomar es el de Álgebra (Curso A). En diciembre de 2013 finalizó ese semestre y Frida reprobó el curso. Presenta, sin éxito, un ETS. Decide entonces cursar nuevamente el Curso A. Lo debe hacer en el turno vespertino (ella estaba inscrita en el turno matutino), durante el periodo enero-junio de 2014. Simultáneamente, Frida cursa las materias del segundo semestre de su plan de estudios. Entre ellas, está Geometría y Trigonometría (Curso GT). Al final de este segundo semestre, Frida no aprueba ni el Curso A ni el Curso GT (de hecho, son los únicos, de todos los que ha cursado, que no logró aprobar). Decide presentar, nuevamente sin éxito, los ETS de estos cursos. De esta forma, a principios de 2015, Frida quedó fuera de reglamento y solicitó el permiso escolar para poder presentar los ETS de los cursos A y GT. Con la intención de prepararse para los ETS, Frida decidió pedir asesoría a dos profesoras de la academia de matemáticas del cuerpo académico al que pertenece el primero de los autores de este artículo. Es en este período de asesorías en el que Frida aceptó participar en este estudio longitudinal.

Recolección de datos

Los datos fueron recopilados por el primero de los autores de este artículo. Él propuso estudiar las emociones de Frida mientras ella asistía a las asesorías. Aunque en un principio no sabíamos si Frida iba a asistir a las asesorías de manera regular, estuvimos de acuerdo en tomar datos durante el tiempo que éstas duraran. La forma de elaborar las entrevistas fue la siguiente: seis estructuradas (numeradas del 1 al 6), elaboradas en papel; una semiestructurada (entrevista 7), elaborada en papel; dos estructuradas, elaboradas por mensajes enviados a Frida por la aplicación de celular Whatsapp (entrevistas 8 y 9). El periodo de entrevistas fue de un año y ocho meses (febrero 2015-octubre de 2016). Todas las respuestas de Frida fueron transcritas. En el análisis, las palabras que expresaban emociones fueron escritas en cursivas.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis se divide en dos secciones. La primera se llama "Reacciones y emociones de Frida antes de aprobar los cursos A y GT"; la segunda, "Cambio de actitud de Frida hacia el aprendizaje de las matemáticas". La organización del análisis tiene la intención de mostrar cómo Frida experimentó un cambio de actitud en relación con su manera de aprender matemáticas, antes y después de las asesorías.

Reacciones y emociones de Frida antes de aprobar los cursos A y GT

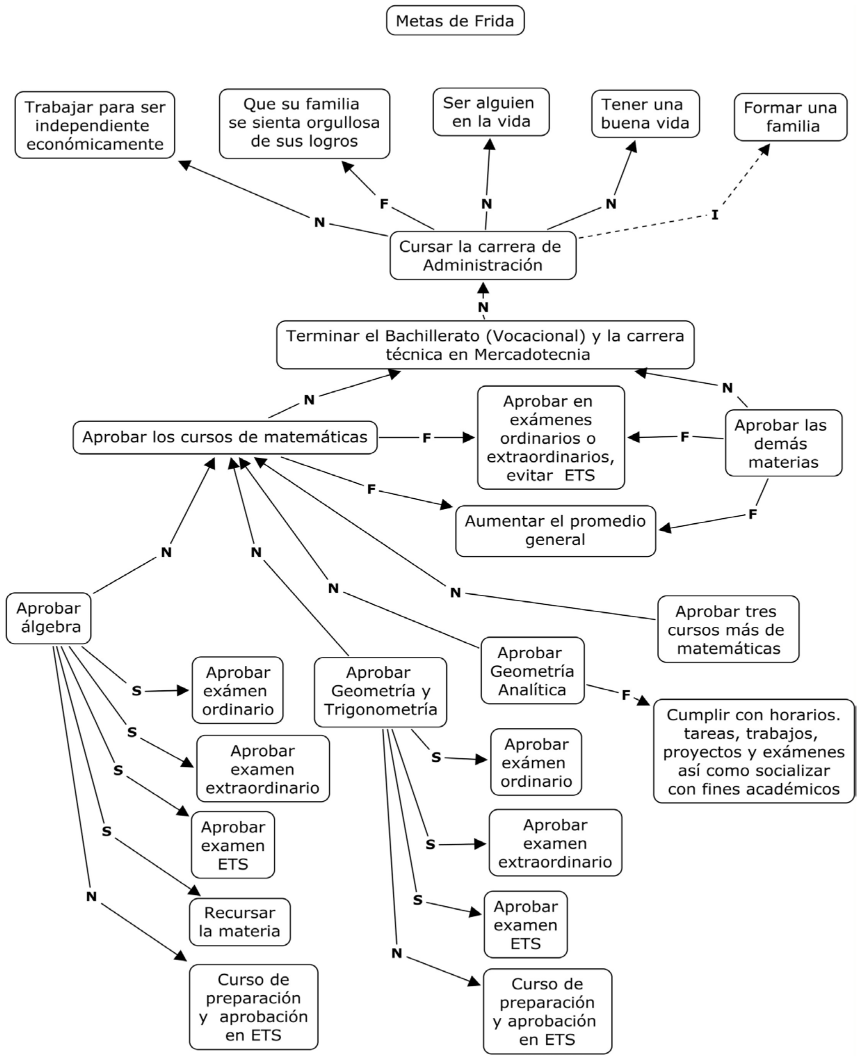
Hemos dividido esta sección en tres subsecciones: reacciones ante eventos con emociones basadas en previsiones y de bienestar; reacciones ante los agentes y emociones ante aspectos de los objetos.

Reacciones ante eventos con emociones basadas en previsiones y de bienestar

Para interpretar cómo Frida establece consciente o inconscientemente los criterios para evaluar los acontecimientos, fue necesario establecer, con base en las entrevistas, su estructura de metas. Según la teoría OCC, estas metas son el punto de partida para elaborar una interpretación de los acontecimientos. En la Figura 2 se muestran las metas de Frida. Los nodos de la parte superior representan metas abstractas; es decir, intereses o aspiraciones generales de Frida. Conforme se desciende en las metas, éstas son más concretas o inmediatas. La dirección de las flechas indica que la meta superior es afectada de alguna forma por la meta de orden inferior. Por ejemplo, la consecución de la meta "Terminar el Bachillerato (Vocacional) y la carrera técnica en Mercadotecnia" permite abrir paso a la meta "Cursar la carrera de Administración". Existen varios tipos de enlace entre las metas, un enlace N significa que la meta inferior es necesaria para poder acceder a la meta de orden superior; un enlace S significa que sólo una de las opciones es necesaria para cumplir la meta. Por ejemplo, para aprobar el curso A, es suficiente que Frida lo apruebe ya sea en examen ordinario, en examen extraordinario, en uno de los ETS o en "Recursar la materia" (ver la sección Contexto de la investigación). Pero si en ninguna de estas opciones aprueba, su última opción (Curso de preparación y aprobación en ETS) no es suficiente, sino necesaria para lograr la meta "Terminar el Bachillerato (Vocacional) y la carrera técnica en Mercadotecnia". Hay otro tipo de enlaces que facilitan la consecución de una meta, pero no la garantizan. Estos son los enlaces F que, en el caso de Frida, se traducen en un cambio de estrategia para afrontar sus cursos de matemáticas (por ejemplo: cumplir con horarios de clase, con la entrega de tareas y trabajos, etc.). Finalmente, están los enlaces I que pueden inhibir la consecución de una meta. En el caso de Frida, la meta "Formar una familia a corto plazo" es inhibida por su desarrollo profesional.

Es importante resaltar que la estructura de metas es dinámica, pues cambia según el camino recorrido por Frida para acreditar sus cursos de matemáticas y las estrategias que surgieron como consecuencia de los obstáculos encontrados. Según la teoría OCC, no todos los nodos son siempre explícitos. En el caso de Frida, el nodo más importante en sus respuestas fue la meta "Terminar el Bachillerato (Vocacional) y la carrera técnica en Mercadotecnia". Es decir, el acontecimiento de no aprobar sus cursos lo veía como una amenaza directa a esta meta y no lo hacía explícito a otras de más alto nivel.

Figura 2. Metas de Frida



Fuente: Elaboración propia basada en datos

Describamos ahora las emociones de esperanza (anticipación, esperar, expectación, etc.) y miedo (amedrentado, ansiedad, aprensión, aterrorizado, nervioso, preocupado, etc.) de Frida antes de aprobar los cursos A y GT. Al preguntarle qué sentía en el momento de presentar un examen de cualquiera de estos cursos, Frida respondió:

> Siento mucho *miedo* de que a pesar de tanto revisarlo no haya visto el error. *Al dudar me siento mal* porque siento como si simplemente no supiera hacerlo, aunque antes estuviera segura de que sí. Siento mucha *impaciencia* por saber el resultado y durante todo el tiempo en que estoy esperando ese resultado, pienso en absolutamente todo en lo que me pude equivocar, pienso que tal vez se me pasó resolver algo, o siento que, aunque estuve segura al [momento de] resolverlo, estaré mal en muchas cosas. (Entrevista 8, p. 2)

En ocasiones, Frida sentía que fracasaba al no poder terminar los ejercicios:

> Cuando no puedo resolver un problema me siento *frustrada* y no quiero continuar. Siento que, aunque ya lo haya estudiado, no es suficiente y me doy por vencida muy rápido. (Entrevista 1, p. 1)

Es innegable la relación de las emociones de Frida con su inseguridad y con su propia manera de interpretar la solución de un problema: ésta debe ser correcta y no debe tener errores.

Debido a la repetición de eventos desfavorables que Frida había experimentado durante la presentación de varios exámenes, ella recurre a una estrategia que combina la persistencia con cierta negación de su realidad ante lo que ella sabía que iba a ocurrir. Esta estrategia se devela en la siguiente respuesta:

> Siempre *me sentía triste* porque yo sabía que no había contestado lo suficiente para pasarlo [el examen]. Pero quién sabe por qué esperaba *ansiosa* la calificación. No sé por qué, pero siempre traté como de pensar que a lo mejor lo pasaba y yo sabiendo que no había contestado lo suficiente. (Entrevista 7, p. 12).

La respuesta anterior revela la creación de una protección que le permitía a Frida seguir presentando exámenes aun cuando su preparación previa había sido deficiente. Puede observarse que Frida mostró emociones negativas debido a la inseguridad ante la futura confrontación de sus resultados. Todo lo redujo a un resultado futuro correcto o incorrecto. En estas respuestas puede encontrarse su propia concepción de que el procedimiento de las matemáticas debe ser rígido e, incluso, de que las matemáticas son un conjunto de conocimientos y procedimientos estandarizados y completos.

En cuanto a las emociones de satisfacción (complacencia, cumplimiento de las esperanzas, etc.), temores confirmados (suceder lo que se temía), alivio (sentirse aliviado, tranquilidad, etc.) y decepción (desesperanza, frustración, etc.), Frida, al recordar sobre el resultado de un examen, aseguró: "...sentía *mucho coraje*... porque traté de esforzarme lo más que pude y al ver mis resultados *me desanimé* mucho" (Entrevista 4, p.1).

También surgieron este tipo de emociones al resolver un problema en el pizarrón o en tomar en cuenta el tiempo de resolución:

> Si fallo frente a toda la clase siento que todos dirán que no sé, aunque yo esté segura de que sé. Debido a los *nervios* no podría resolverlo y me daría por vencida. Si alguien ya lo resolvió y me dice que está mal me haría sentir insegura. Es fácil que pierda la seguridad al hacerlo si otro es más rápido y lo hace sin errores. Un profesor calificaba sólo a los cinco primeros y yo me llevaba toda la clase y pensé que eran más ágiles [que yo]. (Entrevista 3, p.4)

De las respuestas anteriores podemos destacar que, además de la emoción negativa que significa un resultado incorrecto, Frida está sujeta a una presión adicional que intensifica sus emociones en función del tiempo que tarda en resolver un problema determinado: "yo hago las cosas, pero las hago lenta, no sé por qué mi ritmo es un poco más lento, pero lo hago bien, llego al mismo resultado" (Entrevista 7, p. 20). Esto significa que un gran esfuerzo al resolver un problema puede terminar en total frustración al no poder entregar un resultado y el número de intentos fallidos incrementa la intensidad de la emoción si el resultado final es incorrecto.

Por último, respecto de las emociones de bienestar ante los acontecimientos (júbilo, congoja e, incluso, aburrimiento (ver Martínez-Sierra y García, 2014)) antes de aprobar los cursos A y GT, Frida aseguró:

> Sentía mucha *desilusión* de ver que lo que me había esforzado no funcionó de nada. Casi todo el tiempo creía que esta escuela no era para mí, que era muy difícil y no entendía cómo entré aquí. (Entrevista 4, p.1)

En otras palabras, Frida, al ver que sus esfuerzos en matemáticas no eran recompensados, se sentía fuera de un lugar confortable. De esta forma, generaliza su malestar hacia todos sus estudios. Presentar tantos exámenes y acumular experiencias negativas repercute emocionalmente en Frida:

> *Me hartó* esta materia [la de matemáticas]. Presenté ocho ETS. Sacaba de 4 [escala reprobatoria: 0-5] hacia abajo. (Entrevista 7, p. 2)

De hecho, aunque esta persistencia le permitió no abandonar la escuela (otros estudiantes, en situaciones similares a las de Frida, decidieron dejar de estudiar en esa escuela), se observa la consolidación de una actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas. Además de esta actitud, la materia le generó un malestar continuo:

> ...*me aburría* saber que seguía esa clase, cuando no había clase *me sentía feliz*, me sentía incómoda de saber que no entendía nada. *Me decepcionaba* de creer que había entendido y me sentía mal de no salirme los ejercicios y ya no quería seguir. Las últimas veces era dejarlo y ya no intentarlo. Trataba de relajarme y volver a intentarlo, no me quería dar por vencida, sabía que podía y no entendía porque no lo lograba. (Entrevista 3, p. 3)

Este tipo de emociones pueden generarse cuando los alumnos vislumbran cambios en su futuro causados por temores de ver modificado de forma importante su porvenir (por ejemplo., truncar sus estudios).

Reacciones ante los agentes

Este tipo de emociones surgieron como resultado de la evaluación que Frida realizó de acuerdo con las normas que ella aceptó como válidas y que consisten en pautas de aprobación o desaprobación de lo que sus compañeros, ella misma o sus profesores, hicieron o estaban haciendo. La mayoría de las normas así entendidas están, de hecho, basadas en consideraciones sociales. Aun cuando las normas no presentan una estructura visible y su consistencia interna no es evidente, en las entrevistas realizadas a Frida se identificaron normas que ella utilizó explícitamente (Tabla 2).

Tabla 2. Normas que Frida hace explícitas en situación de reprobación

De comportamiento	Frida no acepta copiar en los exámenes y juzga injusto que sus amigos que lo hicieron hayan aprobado. Frida acepta las características del maestro (o profesor) sin cuestionarlas. Piensa que es ella la que debe adaptarse a estas características; sin embargo, de forma contradictoria, llega a culpar a sus maestros en sus primeros fracasos al considerar que era su deber explicarle tantas veces como hubieran sido necesarias.
De rendimiento	Frida se percibía a sí misma como incapaz de entender los conceptos matemáticos, a diferencia de sus compañeros que sí entendían. Frida se percibe sin capacidad para los estudios de matemáticas
Morales o cuasimorales	Para Frida los estudios de matemáticas requieren un enorme esfuerzo. La persistencia es fundamental para lograr sus objetivos

Fuente: Elaboración propia basada en datos

De acuerdo con la teoría OCC, las emociones ante agentes se alimentan de las normas que la persona acepta como válidas. Entre las emociones negativas que Frida dirige hacia sí misma cuando estaba en situación de reprobación sobresale la desilusión que de sí misma expresa a pesar de reconocer su esfuerzo:

> [Al no aprobar los cursos A y GT sentí] mucha *desilusión* de ver que lo que me había esforzado no funcionó de nada. Casi todo el tiempo creí que esta escuela no era para mí, que era muy difícil y no entendía cómo entré aquí. (Entrevista 4, p. 1)

En cuanto a las emociones que expresa hacia otros, en específico hacia sus maestros, se pueden hacer explícitas a través de lo que ella concibe lo que debe ser la función de un maestro y de qué forma el no cumplimiento de esta función repercute en su rendimiento. Esto le genera emociones negativas:

> Pensaba que la culpa de que yo no entendiera era del maestro. Yo decía, si no me explicó no lo voy a entender... Me generaba *enojo y coraje* porque yo siempre pensaba que era su deber explicarme las veces que yo lo necesitara. (Entrevista 7, p. 20)

Frida también expresa emociones hacia sus compañeros que aprueban la materia mientras ella no puede hacerlo:

> Sentí *envidia* porque ellos [mis compañeros] no tendrían que hacer ETS ni recursar [volver a cursar]. *Sentí que era inferior a todos ellos*, que *eran más inteligentes que yo*. (Entrevista 4, p. 1)

En específico, una de sus emociones negativas fue experimentada cuando se comparó con una de sus compañeras, quien estaba, al igual que ella, muy cerca de quedar fuera de la escuela y que, sin embargo, logró aprobar el curso A:

> Una compañera estaba igual que yo: no entendía mucho. También era de recursamiento [se encontraba cursando por segunda vez el curso]. Ella copiaba y llevaba su teléfono y veía las cosas. Cuando supe que ella sí se quedó dentro [aprobó], *me dio mucho coraje*...y ella, a pesar de que sabía que no debía de hacer eso lo hizo, y aparte lo presumía con orgullo. Decía "ya me quedé dentro", como si hubiera sido su esfuerzo. Y no fue su esfuerzo, fue de alguien más. Lo copió y ya...*me enojé muchísimo*. Me dio *mucho coraje* porque no era justo... (Entrevista 7, p. 11)

Frida expresa emociones de auto reproche a través de la desilusión y llega a pensar que su esfuerzo no le genera resultados, pues no aprobaba los cursos. También expresa enojo hacia sus profesores y les asigna la culpa de su situación, tal vez reprochando cierta indiferencia hacia ella. Ante algunos de sus compañeros siente envidia y –siguiendo sus normas- desprecia la actitud de una compañera que aprobó, pero copiando las respuestas del examen.

Emociones ante aspectos de los objetos

Respecto de las características de las emociones de atracción (afecto por, gusto por, etc.) y repulsión (aborrecer, detestar, etc.) acerca de un "objeto", se observa que convierte las matemáticas en "objeto" al concebirlas como una entidad con ciertas características fijas que le generan atracción o repulsión.

La conformación de una actitud o predisposición de atracción o rechazo, según la teoría OCC, es el resultado de la fusión de tres componentes:

1. Influencias innatas, culturales y personales. Entre ellas destacan las culturales en el sentido de influencias familiares, de amigos o de grupos a los que se pertenece.

2. Experiencia histórica adquirida en la interacción de uno con las características del objeto específico o con objetos de la misma clase (categoría).
3. Experiencia histórica emocional, resultado de la interacción emocional registrada en la memoria.

Del tercer componente puede observarse una relación entre la actitud (que contiene las experiencias históricas emocionales) y la emoción en sí misma (basada en las actitudes). Esta relación es inevitable excepto en las experiencias emocionales primeras, basadas sólo en influencias innatas y culturales. Lo anterior significa que, si bien la experiencia emocional de agrado o desagrado momentáneo está basada en la actitud hacia el objeto (el agrado o desagrado disposicional), una parte muy importante de la conformación de esta actitud es resultado de la acumulación de experiencias emocionales de la misma valencia.

En el caso de Frida, y debido a una trayectoria con múltiples fracasos (ver Tabla 1), son evidentes los componentes 2 y 3 en la conformación de sus actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas. Pero también está presente la componente 1, por medio de la influencia de su madre a través de su propio miedo hacia las matemáticas, tal y como se observa en la siguiente respuesta a la pregunta referente a cómo fue su ingreso a la escuela:

> Siento que cuando mi mamá vio que me quedé en la vocacional [escuela], primero me felicitó y me dijo que ella no había confiado en que yo pudiera [ingresar]; porque, de hecho, cuando terminé el examen ese día me preguntó cómo me había ido; y yo le había dicho que me sentía dentro de la escuela; y ella me decía que de todas maneras íbamos a seguir buscando escuelas. Ella no confiaba en lo que yo decía. Cuando entré y le dije las materias [que debía cursar], tenía, por ejemplo, cuando le dije de álgebra, ella me decía: "ponle mucha, pero mucha atención porque ¿qué tal si no le entiendes?" Desde el principio ella me decía que era muy difícil, que a lo mejor no le entendía...Desde el principio yo le tuve *miedo* a la escuela... porque mi mamá me dijo: "es que [la escuela donde entraste] es escuela de puras matemáticas." (Entrevista 7, p. 8)

Algunas de las respuestas de Frida respecto de sus emociones ante las matemáticas, consideradas como un objeto, fueron las siguientes:

> [A las matemáticas] *no las quería, no me gustaban para nada*, pues sentía que eso era lo que me iba a detener en todo...Creo que era *odio* porque yo no entendía por

> qué todos podían y yo no. Sentía, llegué a sentir, 'eso no es para mí'. No, nunca va a ser para mí y para qué lo sigo intentando. Si no va a ser para mí no me puedo seguir forzando a algo que a lo mejor no se me va a dar nunca. Yo sentía que era algo que nunca iba a aceptar, algo muy alejado de mí, algo que no tenía nada que ver conmigo. (Entrevista 7, p. 17)
>
> Al reprobar, hacia las matemáticas sentía *desprecio*. Simplemente *no quería saber nada de ellas,* ni seguir intentando ni nada. El simple hecho de que alguien me las mencionara me hacía *sentir mal.* (Entrevista 4, p. 2)

La actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas de Frida, como puede inferirse de la sección anterior, se generó como resultado de una historia de experiencias negativas con objetos que ella percibe como pertenecientes a la misma clase (representaciones almacenadas) así como de la influencia familiar que refuerza esta postura. Al llegar a este momento emocional, según la teoría OCC, Frida ha experimentado emociones ante acontecimientos que afectan de forma real o imaginada la consecución de sus metas. Pero no sólo eso, ha buscado a los agentes responsables de dichos acontecimientos en sus maestros, sus padres, amigos e, incluso, en ella misma. Finalmente, ha consolidado estas experiencias expresando emociones de repulsión hacia el aprendizaje de las matemáticas, es decir, ha consolidado una actitud negativa hacia las matemáticas. Este recorrido, en sentido lógico, lo prevé la teoría OCC:

> Las diferentes ramas de la taxonomía propuesta tienden a conectarse a través del razonamiento causal implícito del sujeto de la experiencia. El hecho de que la gente tienda a buscar las causas de los acontecimientos y de las acciones significativos que experimenta significa que hay una tendencia a que haya...un movimiento de izquierda a derecha [ver Figura 3] que va desde las emociones centradas en los Acontecimientos hasta las centradas en los Agentes y, de ahí, hasta las centradas en los Objetos (Ortony *et al.*, 1988, p. 209).

Esto significa que Frida, a través de sus emociones hacia el aprendizaje de las matemáticas, todas de valencia negativa, ha recorrido hacia la derecha el espectro emocional mencionado por la teoría OCC (Figura 3).

Figura 3. Sentido del recorrido emocional en la teoría OCC.

Fuente: Elaboración propia.

En la siguiente sección explicamos cómo las asesorías proporcionadas por las maestras contribuyeron a que Frida cambiara su actitud hacia la manera de aprender matemáticas.

Cambio de actitud de Frida hacia el aprendizaje de las matemáticas

¿Cómo Frida pudo generar un cambio de actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas?, es decir, si ya tenía estructurado un desagrado disposicional hacia el aprendizaje de las matemáticas, ¿cómo pudo cambiarlo? La respuesta a estas preguntas no es sencilla debido a que, precisamente, la función de las actitudes es volver relativamente inaccesibles las razones que las generaron; y es este hecho en el que radican precisamente su fuerza y su arraigo. Existen dos alternativas para responder estas preguntas. La primera consiste en analizar las explicaciones de Frida en el sentido propuesto en la Figura 3; la segunda, en analizar estas explicaciones en el sentido contrario (Figura 4). Con la primera alternativa debe suponerse que Frida debió cambiar la valoración respecto de ciertos acontecimientos. Esto implicaría que Frida evalúa positivamente la oportunidad que tiene de asistir a asesorías personalizadas, en el sentido de que son acontecimientos que contribuyen a sus metas. Esperaría, por tanto, una actuación diferente de las docentes que imparten dichas asesorías, de tal forma que valoraría positivamente su actuación. Ambos tipos de emociones, ante acontecimientos y ante agentes, pueden ocurrir aun cuando se tiene una actitud negativa hacia objetos (en este caso, el aprendizaje de las matemáticas). Finalmente, al recorrer este camino podría experimentar emociones positivas hacia el aprendizaje de las matemáticas que estarían en contradicción con su actitud de rechazo y que iría modificando cada vez que experimentara dicho recorrido o bien podría mantener una actitud de rechazo sustentándose emocionalmente por los resultados positivos de los acontecimientos y las actuaciones de los agentes.

Ahora bien, con base en los datos de esta investigación, esta alternativa no parece coincidir con el camino emocional recorrido por Frida. Ella asistió a las asesorías sin tener una idea específica de las características de esta forma de aprender matemáticas y, aún más, tampoco tuvo la esperanza de que podían ayudarle a lograr sus metas. En una de las entrevistas, Frida comentó:

> Cuando empecé a ir a las asesorías...yo me acuerdo que fui *muy desanimada*. Yo iba como si fuera la última opción porque ya era mi última oportunidad [para continuar como estudiante en la escuela]. Ya me darían de baja aquí, *ni siquiera tenía esperanza*. (Entrevista 7, p. 13)

Tal parece que Frida asistió a las asesorías como un paso más que tenía que dar en una cadena de acontecimientos que no controla, y que se tornan positivos casi sin que ella lo note; es decir, aunque es muy persistente y presenta todos los exámenes permitidos y asiste a asesorías por no dejar una opción sin cubrir, es difícil, en este caso, hacerla recorrer el camino emocional de la Figura 3.

Ahora bien, de acuerdo con la siguiente cita, se observa que lo primero que Frida interpretó positivamente no fue el acontecimiento de las asesorías, sino la actuación de la profesora que las impartió:

> Su explicación [de la profesora] era muy entendible y pensé que a lo mejor era porque yo tenía toda su atención y no éramos los 40 alumnos entre los que no se me ponía atención. Entonces me dieron atención en cada detalle. Yo podía decir cada cosa en el momento, ni un segundo de diferencia. Yo le podía decir lo que no entendí, entonces *me sentí más en confianza*, como no me había sentido con un maestro antes. (Entrevista 7, p. 18)

La disposición de la profesora para explicar fue inesperada para Frida. Esto hizo que tuviera primero emociones positivas ante la actuación de los agentes [la profesora], sorprendiéndose por su forma de exponer y contrastándola con las actuaciones de profesores anteriores con los que había experimentado emociones negativas:

La segunda alternativa ofrece más elementos de explicación del cambio de actitud de Frida. Esta explicación se basa en proponer que Frida debió recorrer en sentido inverso el espectro emocional de la Figura 3; es decir, debió partir de que sus emociones de rechazo hacia el aprendizaje de las matemáticas, basadas en su repulsión genérica (actitud negativa) hacia éstas, entraron en conflicto con una forma diferente de explicación de las matemáticas por parte de las asesoras. Esta manera distinta de exponer los conceptos de las matemáticas ayudó a Frida a experimentar emociones positivas ante la aprobación de la actuación de los agentes. Esto le permitió resolver el conflicto entre emociones positivas y negativas por medio de la distinción entre diferentes actuaciones de los agentes (profesores que no tienen paciencia para explicar y aquellos que sí la tienen) y, de esta forma, reinterpretar los acontecimientos ocurridos: con más paciencia por parte del profesor y, en condiciones de enseñanza personalizada, ella puede resolver los ejercicios que antes no podía (Figura 4).

Figura 4. Sentido del recorrido emocional para explicar el cambio de actitud

Fuente: Elaboración propia.

Con mayor detalle, para que este proceso inverso pudiera llevarse a cabo, debió ocurrir “algo” que disminuyera la solidez de la actitud de rechazo hacia el aprendizaje de las matemáticas. A esta situación le hemos llamado *discrepancia* y es la que permite una interpretación emocional distinta desde el objeto hacia la actuación de los agentes y el acontecimiento, lo que inicia un cambio de actitud. En el caso específico de Frida, la discrepancia se generó al asistir a asesorías para preparar sus exámenes. Al conocer una forma distinta de enseñanza, más personalizada, pudo comenzar a desestructurar su actitud genérica de rechazo hacia las matemáticas y comprender que hay otras formas de abordar la problemática.

Frida hace explícita la discrepancia existente entre su actitud negativa hacia las matemáticas y sus emociones positivas ante las asesorías ya que, al relatar su experiencia al presentarse a las asesorías, acepta que llega con una actitud negativa al expresar: "creo que los maestros sienten y se dan cuenta cuando los alumnos odian su materia" (Entrevista 7, p. 18). Su actitud negativa choca con la experiencia de las asesorías que no esperaba:

> Entonces siento que cuando la maestra vio que me acerqué a ella con esa materia se sorprendió, porque me dijo que no cualquiera viene a buscar ayuda. Siempre [los estudiantes] estudian por su cuenta y se dan por vencidos. Me dijo 'casi no tenemos alumnos que vengan a preguntar; hay unos pocos, pero no que vengan a asesorías en estas circunstancias cuando ya está casi todo perdido'. Me recordó que lo principal era que yo quisiera aprender y después vi que su actitud era muy liviana... (Entrevista 7, p. 18)

Las asesorías provocan que Frida reinterprete la actuación de los docentes y reconozca que hay una forma diferente de aprender y enseñar, con la cual ella puede entender las matemáticas:

> *Antes* [de las asesorías] *tenía miedo* de decir que no había aprendido y que se molestaran y creyeran que no ponía atención, pero cuando fue individualmente, su atención era completamente hacia mí y *me hacía sentir muy segura* de que estuviera aprendiendo. (Entrevista 9, p. 2)

Esta discrepancia entre lo que había vivido y la nueva experiencia le permitió a Frida reinterpretar la participación de los agentes y los acontecimientos en función de normas y metas aceptados por ella, pero debemos resaltar que estas experiencias positivas que comienzan a minar su actitud negativa ocurren cuando Frida aún estaba reprobada en ambos cursos (A y GT), por lo que no fueron los resultados positivos en sus exámenes los que comenzaron a generar un cambio de actitud, sino la experiencia ocurrida en las asesorías. Frida describió su propio proceso de cambio de la siguiente manera:

> Me empezaron a decir [en las asesorías] que lo primero que querían era compromiso y que hiciera las tareas. *Al principio yo no le veía caso*, pero después de varias veces de hablar con mi mamá y con otra persona cercana a la familia me hacían pensar las cosas, hubo un momento en que me empecé a sentir mucho más comprometida,

> más que con la escuela, conmigo. Es que [me] decía: si no me lo aprendo no voy a poder, si no practico, si no hago ejercicios, en el examen no voy a poder resolverlos. Yo ya pensaba más por mí, no por la escuela o por la calificación, sino porque debía aprender y porque ya era muy tarde. [Me] decía: a lo mejor estoy esforzándome mucho y no es lo que haría yo realmente, pero después de seguir haciéndolo sentí que eso me hacía *sentir bien*, y que me hacía *sentir segura* y *ya no le tenía miedo a las asesorías*. (Entrevista 7, p. 13)

> En las asesorías, cuando iba al día siguiente con mi tarea al menos ya intentada, ya tenía más dudas, ya sabía que era lo que me fallaba...en sí ya sabía mínimo el tema que estaba tratando de entender, a lo mejor todavía no le entendía pero mínimo ya sabía cuál era mi problema en el tema y ahí era cuando ya me podía *desahogar* con la maestra, decir que es lo que no entendía, qué es lo que sí había podido hacer y ahí es donde empezó a decirme, "sigue haciendo el mismo tipo de ejercicios y ya después vamos viendo". Después de tres o cuatro intentos de ese tipo de ejercicios era cuando ya me salían [los ejercicios] casi sin errores... (Entrevista 4, p. 2)

Después de haber contrastado la actuación de los agentes en las clases y en las asesorías, un momento importante corresponde a la presentación de exámenes ETS, donde se observa una mezcla de emociones positivas y negativas y una actitud en proceso de cambio:

> Siento que mi familia confía mucho en mí porque han visto que estoy viniendo a mis asesorías y *eso me hace sentir bien*, pero a la vez me hace sentir más *presionada* de que debo pasar [los exámenes].... Me costó mucho trabajo atreverme, hasta hoy todavía siento *miedo* de no poder resolver un ejercicio, pero siento que con todo esto he aprendido a no dejar de intentar...*me siento orgullosa* de seguir intentando...siento que resultará bien. (Entrevista 6, p. 1)

Frida aprueba A pero no el curso GT:

> Al aprobar Álgebra, ¡Siento que me quité un peso enorme de encima! Me siento *totalmente satisfecha* de haberlo logrado; realmente *nunca me había sentido tan bien conmigo misma*... (Entrevista 7, p. 1)

> En cuanto a Geometría y Trigonometría, sí *me entristece*, porque cuando pasé Álgebra ya me sentía más cerca de aprobarlas las dos, de alguna manera no estaba tan segura como con Álgebra, pero tampoco imaginé reprobarla. (Entrevista 8, p. 1)

Finalmente, después de haber aprobado ambos cursos, Frida reconoce los cambios que ha experimentado con respecto a su aprendizaje de las matemáticas y que venían gestándose desde el periodo de asesorías:

> Yo creo que sí cambié. En ese aspecto creo que tengo más seguridad, porque ya lo vi al aprobar mis exámenes...pero creo que no sólo aprendí matemáticas... siento que cambió de alguna manera mi seguridad y por lo mismo de las experiencias pasadas, ni siquiera por pena o lo que sentí antes quiero dejar que pase el semestre y volver a reprobar. Siento que ya puedo preguntar y acercarme al profesor, aunque sea alguno de aquellos con los que reprobé. (Entrevista 9, p. 3)

La reinterpretación ante agentes y acontecimientos se fue consolidando en una nueva actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas que va emergiendo de forma gradual en la descripción de Frida:

> Ahorita *ya no les tengo miedo*, siento que *me están empezando a gustar*...estoy viendo que todo se enlaza y simplemente no tiene más dificultad. (Entrevista 7, p. 18)

Como puede notarse de las respuestas de Frida, las asesorías no sólo le ayudaron a disminuir el miedo que ella tenía hacia las matemáticas, sino también comenzó a surgir un gusto hacia ellas.

En la Tabla 3 se muestran algunas de las respuestas proporcionadas por Frida, una vez que ella aprobó los cursos A y GT.

Tabla 3. Experiencias emocionales de Frida después de aprobar los cursos de A y GT

Clasificación según OCC	Respuestas de Frida
Emociones ante aspectos de los objetos	Me siento *feliz* de haber podido con ellas. Y bueno, ahora [las matemáticas] *me empezaron a gustar por primera vez*. (Entrevista 4, p. 2).
Reacciones ante los agentes	[Cuando pasé Algebra y Geometría y Trigonometría] *sentí mucho orgullo*. Realmente estaba muy orgullosa de mí. Por primera vez me demostré yo sola que lo que me propongo lo puedo hacer. (Entrevista 4, p. 2). Realmente nunca había sentido la comprensión y la paciencia de un profesor de esta manera, estoy *muy agradecida*..." (Entrevista 9, p. 1).
Emociones de bienestar ante los acontecimientos	Mi meta a corto plazo es terminar este semestre [cuarto] sin deber ninguna materia como lo hice en tercero que terminé sin deber nada y pues me *sentí bien* porque fue lo que me propuse al principio y lo cumplí. (Entrevista 7, p. 21)
Reacciones ante acontecimientos confirmados y refutados	Mucha *satisfacción y orgullo* de mí misma, vi que todo mi esfuerzo funcionó y que tenía la capacidad para entenderlo, aunque me costara trabajo. (Entrevista 2, p. 3)

Fuente: Elaboración propia basada en datos

En la respuesta correspondiente a Emociones ante aspectos de los objetos, se observa en Frida el surgimiento de una emoción de valencia positiva, "[las matemáticas] me empezaron a gustar por primera vez", que podemos comparar con alguna emoción de valencia negativa ante objetos, anterior a las asesorías, como la siguiente: "hacia las matemáticas sentía *desprecio*" (Entrevista 4, p. 2). Recordemos que estas emociones se evalúan con respecto a actitudes, por lo que es claro que la actitud de Frida hacia el aprendizaje de las matemáticas ha cambiado.

Cuando Frida logró aprobar los cursos, las emociones positivas manifestadas por ella destacan su orgullo propio, lo que fortalece su autoestima cuando expresa que lo que se propone lo puede hacer. Con respecto a sus maestros, muestra sentimientos de agradecimiento hacia las maestras que le ayudaron en las asesorías.

En cuanto a emociones de bienestar ante acontecimientos, se distingue un cambio de valencia desde su emoción de desilusión, expresada en un momento en que no veía recompensado su esfuerzo al estudiar arduamente, hacia la emoción de bienestar, al corroborar que cumplió lo que se propuso: aprobar los cursos A y GT. Ahora que ya es una estudiante que ha aprobado todos sus cursos, a Frida le emociona reforzar las posibilidades de alcanzar los objetivos o metas que desea en su vida y ya no se siente fuera de lugar.

CONCLUSIONES

En este estudio de caso se ha evidenciado el cambio de actitud (de negativa a positiva) hacia el aprendizaje de las matemáticas de Frida, una estudiante cuyas oportunidades de continuar con sus estudios en la escuela en la que inicialmente se había inscrito eran mínimas. Con base en la sugerencia de la teoría OCC para analizar el recorrido emocional de los individuos (de izquierda a derecha para emociones de la misma valencia, en la Figura 3), este cambio, en el cual se presentan emociones de valencias contrarias, fue analizado a partir del recorrido inverso; es decir, a partir de la forma como Frida valoró, primero, las consecuencias negativas que para sus metas tuvo el hecho de no haber aprobado sus cursos de matemáticas; segundo, las normas de la actuación que sus docentes y ella misma tuvieron en su fracaso académico y, tercero, la consolidación de su rechazo a lo que Frida caracterizó como "las matemáticas" (ver Figura 5). Más específicamente, el estudio de la trayectoria seguida por Frida para aprobar los cursos A y GT nos permitió entender el cambio de actitud que ella experimentó como un proceso caracterizado por una discrepancia que, de algún modo, desarticuló su actitud negativa hacia las matemáticas, haciéndole reconsiderar el patrón de conducta de los docentes y reevaluar los acontecimientos con otra perspectiva. Esta reconsideración fue originada, por un lado, por la determinación de Frida de asistir a cursos de asesorías con la intención de agotar una de sus últimas alternativas antes de que fuera imposible permanecer en su escuela y, por otro, por la paciencia mostrada por las profesoras de estas asesorías para enseñar a Frida a resolver los problemas abordados en los cursos A y GT. En este sentido, consideramos que esta manera de estudiar el cambio de actitud y las emociones por medio de la teoría OCC puede resultar en un enfoque dinámico, coherente y diferente a otros estudios sobre reprobación en matemáticas que abordan la interrelación entre actitudes y emociones como los de Zan y Di Martino (2014) y Di Martino y Zan (2010; 2011), por un lado, y los de Hannula (2002; 2003), por el otro. En los estudios de Zan y Di Martino (2014) y Di Martino y Zan (2010; 2011) se parte de una construcción más compleja del concepto de actitud, conformada por tres dimensiones con valencia: la emocional, la competencia auto-percibida para el aprendizaje de las matemáticas y la visión que se tiene de éstas y cuyos resultados les permiten a los autores clasificar diferentes perfiles de actitud hacia las matemáticas. Respecto de los estudios de Hannula (2002; 2003), el cambio de actitud y las emociones correspondientes se explican por la coexistencia de actitudes positivas y negativas hacia las matemáticas en una misma persona y cuyos resultados en el aprendizaje de las matemáticas inclinan la balanza en uno u otro sentido, generando una actitud única, ya sea positiva o negativa. Consideramos que estos estudios, incluyendo el mostrado en el presente artículo, son diferentes enfoques teóricos que enriquecen los estudios del ámbito afectivo en matemática educativa. Con respecto a la aplicación de la teoría OCC al ámbito educativo y, en específico, al entorno emocional del aprendizaje de las matemáticas, puede observarse que esta teoría aportó explicaciones útiles para comprender el cambio de actitud de Frida.

Aun cuando la selección de un estudio de caso único (Simons, 2011) como método de investigación no permita extrapolar sus resultados, haber estudiado con detalle las emociones de Frida permite profundizar en alguna de las causas por las que los estudiantes pudieran tener actitudes positivas hacia las matemáticas: una atención personalizada que les permita reducir, por ejemplo, el miedo al ser exhibido por cometer errores en la solución de los problemas. Creemos que entender lo que le sucedió a Frida desde el punto de vista emotivo puede generar reflexiones respecto del papel que desempeñan los diferentes grupos de personas con los que los estudiantes conviven regularmente (padres, compañeros, profesores, autoridades). En particular, futuras investigaciones podrían estar enfocadas en estudiar de qué forma las instituciones educativas propician, por medio de mecanismos institucionales (por ejemplo, asesorías personalizadas, talleres extra-clase, etc.), que un grupo importante de estudiantes puedan cambiar su actitud de rechazo hacia el aprendizaje de las matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

El presente artículo contó con el apoyo de la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional a través de los proyectos SIP20152041, SIP 20161700 y SIP 20171971.

REFERENCIAS

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*, (6a. Ed.). New York: Routledge.

De Bellis, V., & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problema solving: A representational Perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 131-147, doi: 10.1007/s10649-006-9026-4

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). "Me and Maths" toward a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 27-48, doi 10.1007/s10857-009-9134-z

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM. 43*, 471-482, doi: 10.10077s11858-011-0309-6

Fennema, E. (1979). Women and girls in mathematics-equity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 389-401.

Gómez-Chacón, I.M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, *21*(3), 5-32.

Gómez-Chacón, I, M. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Ed. Narcea.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 25-46.

Hannula, M. S. (2003). Affect towards mathematics: Narratives with attitude. *CERME III. Thematic group 2.* 28 febrero-3 marzo, Bellaria, Italia.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: emboided and social thories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161.

Goldin, G. (2000). Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 209-219.

Leder, G. y Forgasz, H. (1997). A case Study in Mathematics: Looking Back Toward The Future. *Australian Educational Researcher*, *24*(3). 97113.

McLeod, D. B. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics Education: a reconceptualization, En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 575-596). New York: Macmillan.

Mandler, G. (1989a). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. B. McLeod *et al.* (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 3-19). New York: Springer.

Mandler, G. (1989b). Affect and learning: Reflections and Prospects. En D. B. McLeod *et al.* (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 237-244). New York: Springer.

Martínez-Sierra, G., & García-González, M. S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics clases. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234-250. doi: 10.1080/14794802.2014.895676

Op 'T Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity" A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 193-207. doi: 10.1007/s10649-006-9034-4

Op 'T Eynde, P., & Hannula, M. S. (2006). The case study of Frank. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 123-129. doi: 10.1007/s10649-006-9030-8

Ortony, A., Clore, G.L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Travers, M. (2001). *Qualitative research through case studies*. London, England: SAGE publications.

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). *Attitude towards mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy*. TMME, Monograph 3, 157-168.

Zan, R., & Di Martino, P. (2014). Students' Attitude in Mathematics Education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Zan, R., Brown, L, Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 113-121, doi: 10.1007/s10649-006-9028-2.

Alejandro Coca Santillana

Dirección postal: Instituto Politécnico Nacional, CECyT 14.
Peluqueros y Orfebrería s/n. Colonia Michoacana
Alcaldía Venustiano Carranza, C.P. 15240
Ciudad de México.

Teléfono: 5513796776

Producción

Formas e Imágenes, S.A. de C.V. Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (IRMICYT), del CONACYT, SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), ZdM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Latindex, Redalyc (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SciElo) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx www.revista-educacion-matematica.com