Sureda y Otero. 2019. Construcción de la Función Exponencial a partir de la Potenciación. Revista Sigma, 15 (1). Pág. 1-15 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXV/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XV №1 (2019), páginas 1–15

Construcción de la Función Exponencial a partir de la Potenciación

Patricia Sureda[1]
María Rita Otero [2]

Abstract.
The exponential functions present a richness of properties such that allows to study them from different approaches. The definition of the natural powers (and non-natural) of a real number, and its properties, allows to construct the exponential function of real exponent. But the construction requires the notion of successions, decimal approximation of a rational number, convergence, and limit of a function. This construction would exceed what could be done at the secondary level, but it gives teachers the possibility of reviewing the teaching of the properties of non-natural powers in the classroom.

Keywords. Secondary Teaching, University Teaching, Mathematical Demonstration.

Resumen.
La riqueza de propiedades de la función exponencial permite estudiarla desde diferentes enfoques. La definición de las potencias naturales (y no naturales) de un número real, y sus propiedades, permite construir la función exponencial de exponente real. Pero la construcción requiere también la noción de sucesiones, aproximación decimal de un número racional, convergencia, y límite de una función. La construcción excedería lo que se podría hacer en el nivel secundario, pero brinda a los profesores la posibilidad de revisar la enseñanza de las propiedades de las potencias no naturales en el aula.

Palabras Clave. Enseñanza Secundaria, Enseñanza Universitaria, Demostración Matemática.

1. Introducción

La enseñanza de la función exponencial, en la escuela secundaria actual adopta un punto de vista práctico, donde únicamente, se pone a disposición de los alumnos un instrumento indispensable para el aprendizaje de las ciencias y de la economía. En esta visión se considera que

[1] CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas) Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires).
email: psureda@exa.unicen.edu.ar

[2] CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas) Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires).
email: rotero@exa.unicen.edu.ar

es suficiente con que los estudiantes dominen las propiedades numéricas y funcionales [4]. En este caso, un conocimiento práctico y meramente operacional de estas funciones puede ser suficiente.

Sin embargo, las características de las funciones exponenciales presentan una riqueza tal, que permite muchos enfoques diferentes, cada uno de los cuales enfatiza una característica en particular, pero que hace posible deducir todos los demás [5]. A saber:

i) Estudiar la función exponencial mediante el método por prolongación. Esto es extender la definición de la función de potencias a^x, para un exponente x real cualquiera.

ii) Estudiar la función exponencial a partir del estudio de una sucesión geométrica.

iii) Estudiar la función exponencial como una función continua que trasforma las sumas en producto, es decir la ecuación funcional:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

iv) Estudiar la función exponencial como la inversa de la función logarítmica.

v) Estudiar la función exponencial a partir de la búsqueda de una función continua cuyo factor de incremento entre x y $x+h$ es independiente de x. Es decir

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x} = g(h).$$

vi) Estudiar la función exponencial a partir de la búsqueda de una función derivable que traduce la evolución de una magnitud cuyo índice de incremento le es proporcional, es decir por la ecuación diferencial $y' = ky$.

En este trabajo solo se va a desarrollar la construcción de la función exponencial mediante el método por prolongación (i), pues el desarrollo de cada uno de estos métodos para estudiar la función exponencial y sus características, es un trabajo extenso que no es posible reducir a estas páginas. Hay algunas discusiones al respecto, disponibles en [4], [5], [7], [1] y [8].

La construcción de la función exponencial mediante el método por prolongación de las propiedades de potencias (i), se puede realizar de tres formas. Ninguna de las tres están disponibles en los textos escolares argentinos a nivel secundario, ni universitario. La primera de ellas requiere del uso de sucesiones, límites y derivadas sucesivas. Lo cual permite construir la función exponencial mediante los polinomios de Taylor, de una forma que es generalizable a los complejos. Una síntesis de este método se halla disponible en [4]. Según este autor una demostración más completa de la demostración está disponible en cierta textualización francesa[3] de la década del setenta, dirigida a las clases de preparatoria (18-19 años).

Hay una segunda forma de construir la función exponencial a partir de las propiedades de las potencias que utiliza el axioma del extremo superior. La complejidad de este axioma en su forma común, lo hace bastante difícil de entender y manipular. De aquí que en la textualización universitaria española, el libro de (Robledo, 2011) [6] inicia la construcción del símbolo a^x (para $x \in \mathbb{R}$), con el exponente x definido primero como natural, después como entero y posteriormente como un número racional y realiza la construcción del axioma del extremo superior. Pero al momento de extender la definición a los reales, el libro la evita debido a que este procedimiento requiere el paso al límite. El libro continúa con la definición

[3] Abou-Jahoudé et Chevalier, Cahiers de mathématique, Analyse II : Fonctions de la variable réelle, O.C.D.L., Paris, 1972.

de la función para exponente real de manera tradicional.

Hay sin embargo, una construcción más intuitiva de esta demostración, sobre todo para un docente de secundaria, en la que la construcción de todos sus elementos requiere de sesenta páginas [2]. Visto desde la óptica de la completitud, es la misma construcción mencionada arriba, pero enriquecida con el uso del teorema de Weierstrass y las propiedades elementales de convergencia de sucesiones. Visto desde la óptica de un docente de secundaria, es la formalización de la construcción intuitiva que se suele enseñar a los estudiantes. Esta última construcción evita el uso de herramientas del cálculo diferencial, mencionadas en el primer caso. De la teoría de límites solamente se utiliza el teorema del emparedado, lo cual permite construirla independientemente del cálculo diferencial.

A continuación se presenta una construcción abreviada de la función exponencial, con base en aproximaciones decimales de números reales, comenzando con las herramientas relativamente simples de la teoría de sucesiones numéricas. Sin embargo, hay que reconocer que el trabajo operatorio necesario para hacerlo, se encuentra rápidamente con algunas dificultades.

2. Extensión progresiva de la definición de a^x para un exponente x real cualquiera

Por lo general, en la escuela secundaria la potenciación se define durante la enseñanza de números naturales de la siguiente manera: $x^a = x.x.x.\ldots x$ donde x se multiplica a si mismo a veces, y a partir de allí se definen las propiedades de la potenciación, que son fácilmente demostrables. Sin embargo, ni la definición de potencia de un número real, ni sus propiedades suelen retomarse durante el estudio de los otros conjuntos numéricos. Esto genera una distancia conceptual entre la definición de potencia natural de un número natural y la función exponencial. Definida esta última para base y exponente real. Así, no se cuestiona la validez de las propiedades, ni el significado de x^a cuando a es entero, racional o real. Esta demostración permite construir la función exponencial, a partir de las propiedades de potenciación de una forma más o menos rigurosa.

Se deja aparte la discusión sobre si es necesario que en la escuela secundaria deba irse un poco más allá y presentar al estudiante una construcción más rigurosa de la función exponencial. Pero lo que sí es importante, es que el profesor debe estar preparado para responder cualquier pregunta que pueda surgir en este sentido. Así, este trabajo pretende brindar algunos elementos a fin de que los profesores de secundaria puedan familiarizarse con los detalles que le dan rigor a toda esa mecánica de la potenciación, lo que a la vez ayudaría en la organización de una enseñanza que explote mejor la idea intuitiva que la sustenta. En la universidad, esta construcción podría realizarse en los primeros años.

Aquí, la construcción del símbolo a^x, $x \in \mathbb{R}$ donde $a > 0$, y $a \neq 1$ se inicia mediante las definiciones de a^x en las cuales el exponente x se considera primero como un número natural, después como un entero y posteriormente como un racional. Esta construcción se completa definiendo a^x con x irracional, no obstante este último paso exige usar las nociones de sucesión, sucesión convergente, límite, cota superior y aproximación decimal de un número.

2.1. Exponente Natural

Se definen las propiedades y las funciones de potencias: $x \to x^n$ para x real y n natural como la función real de variable real que a cada x le asigna x^n.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^n$$

Donde $x^1 = x; x^{(n+1)} = x^n x, \forall n \in \mathbb{N}$.

A continuación se recuerdan las propiedades de las potencias naturales.

2.1.1. Propiedades de las potencias de exponente natural

Las demostraciones, por ser las más estudiadas, no se presentan aquí.

- $x^n x^m = x^{(n+m)}$ con $n, m \in \mathbb{N}$.
- $(x^n)^m = x^{nm}$ con $x \in \mathbb{R}$, y $n, m \in \mathbb{N}$.
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{(n-m)}$, con $n, m \in \mathbb{N}$, donde $n > m$, $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.
- $(xy)^n = x^n y^n$ cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$.
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, con $n \in \mathbb{N}$ $x, y \in \mathbb{R}$, e $y \neq 0$.

2.2. Exponente Entero

Para el caso de las funciones de potencias: $x \to x^n$ para x real y n natural se define la función potencia n-ésima como la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna x^n.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^n$$

Definida como en la sección 2.1.

En particular para los enteros negativos $(-n)$ se define la siguiente función de potencias:

$$f(x) = x^{(-n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Con esto queda definido x^z para $x \neq 0$, y cualquier $z \in \mathbb{Z}$. Finalmente, si $n = 0$ se tiene que $x^0 = 1$. Esto es fácilmente deducible al hacer $x^0 = x^{(n-n)} = \frac{x^n}{x^n} = 1$. Hay también otras demostraciones. Por ejemplo, para el caso en el que las funciones exponenciales y logarítmicas están definidas, la función potencial para el caso en que n es real y $n = 0$ se deduce de $x^0 = e^{(0 \ln x)} = e^0 = 1$.

2.2.1. Propiedades de las potencias de exponente entero

- $x^{(-p)}\ x^m = x^{(-p+m)}$ para $p, m \in \mathbb{Z}$; $p \geq m$ y con $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0$.
  $x^{(-p)} x^m = \frac{x^m}{x^p} = \left(\frac{x^p}{x^m}\right)^{(-1)} = (x^{p-m})^{(-1)} = x^{(-(p-m))} = x^{-p+m}$

Esto demuestra la propiedad en el caso $n = -p$, para $p \geq m$. El caso en que $p < m$ es más sencillo pues es un número natural.

- $(x^n)^m = x^{nm}$ con $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0$; $n = -p$ y $m > 0$.
  $(x^n)^m = (x^{(-p)})^m = \left(\frac{1}{x^p}\right)^m = \frac{1}{x^{pm}} = x^{(-pm)} = x^{nm}$

- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{(m-n)}$, con $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$ donde $m < n$.

Al ser $n < m$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$ y por lo tanto $m - n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{(x^{(m-n)}x^n)}{x^n} = x^{(m-n)}$$

Cabe aclarar que para preservar esta propiedad con exponentes enteros, es necesario aceptar que si $m = n$, entonces:

$$1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{(n-n)} = x^0$$

Esto sugiere la definición de: $x^0 = 1$; y $x^{(-n)} = \frac{1}{x^n}$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Por otra parte, si $x \neq 0$ entonces $\frac{1}{x^n} = (x^n)^{(-1)}$ y $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ por lo tanto:

$$x^{(-n)} = \frac{1}{x^n} = (x^n)^{(-1)} = (x^{(-1)})^n$$

- $(xy)^{-n} = x^{(-n)}y^{(-n)}$ cualesquiera que sean x, $y \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$(xy)^{-n} = (xy)^{(-1)})^n = \left(\frac{1}{xy}\right)^n = \frac{1}{(xy)^n} = \frac{1}{x^n y^n} = \left(\frac{1}{x^n}\right) \cdot \left(\frac{1}{y^n}\right) = x^{(-n)}y^{(-n)}$$

- $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{x^{(-n)}}{y^{(-n)}}$, con $n, m \in \mathbb{Z}^+$ $x, y \in \mathbb{R}$, e $y \neq 0$.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}}{\frac{1}{y^n}} = \frac{x^{-n}}{y^{-n}}$$

2.3. Exponente Racional

Potencias de base real y exponente racional. Sea $x > 0$ un número real positivo, y $r = \frac{p}{q}$ un número racional, con $q > 0$ y $\frac{p}{q}$ irreducible. La aplicación que a cada número real $x > 0$ le hace corresponder x^r es:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^r$$
$$x \to x^{\frac{p}{q}}$$

Si q es impar entonces x^r toma un único valor (positivo), si q es par entonces la raíz toma dos valores reales de signos opuestos. Esto implica tomar para todo x la misma determinación positiva $x^r(> 0)$. Afirmar que $x^r = y$ toma un único número real no negativo $y > 0$, implica asumir que $x^r = y$ tiene una única solución real no negativa. En otras palabras, si se toma por ejemplo, $r = \frac{1}{n}$ se espera que $y = x^{(\frac{1}{n})}$ satisfaga $y^n = x$. Esta solución es por definición la raíz n-ésima de x y se denota: $y = \sqrt[n]{x}$. A continuación se prueba la existencia de la raíz n-ésima de un número real no negativo. Esta prueba requiere de un axioma adicional de los números reales: *el axioma de completitud*[4].

[4] *Axioma de completitud:* Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si A es no vacío y acotado superiormente, entonces existe un número real único S que es la mínima cota superior de A. En tal caso se suele escribir $S = Sup(A)$. Este axioma permite demostrar por ejemplo que si a es un número real positivo, la ecuación $x^n = a$ tiene solución en $\mathbb{R}^+$ y por lo tanto $\sqrt[n]{a}$ es un número real. De ellos se sigue que hay números reales que no son racionales. Este axioma permite también precisar la noción de expresión decimal infinita de un número real, y dar cuenta de este modo de la pretensión de "completar la recta" llenando los "huecos" dejados por los racionales.

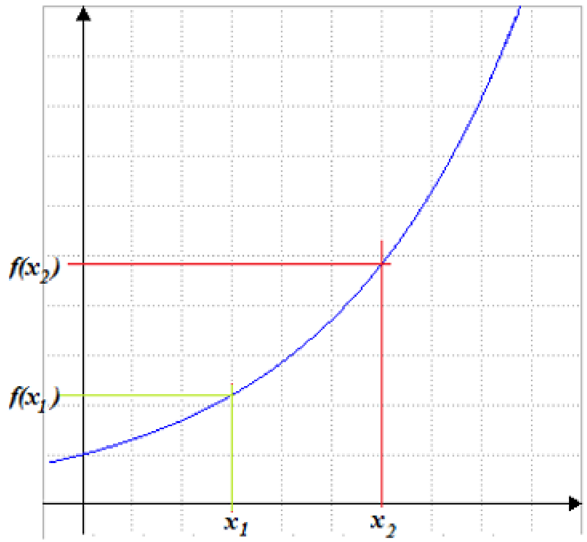

Figura 1: Representación gráfica de lo que se quiere probar.

Teorema: La ecuación $x^n = a$ con $n \in \mathbb{N}$ tiene una solución real positiva única.
La demostración de este teorema se lleva a cabo en dos partes. En la primera parte se prueba que la función $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. En la segunda parte se utiliza el *axioma de completitud* para demostrar la existencia de a, tal que a es la única solución real de $x^n = a$.

Parte 1: Para aclarar esto bien, primero hay que probar que la función $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Esto es que para $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tal que $0 \leq x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Esto se puede demostrar por inducción de la siguiente manera: Para $n = 1$ se tiene que $f(x) = x$, es estrictamente creciente. Luego, se acepta que $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente, entonces para $0 \leq x_1 < x_2$ se acepta que $f(x_1) < f(x_2)$. Esto es que: $x_1^n < x_2^n$.

Ahora se quiere probar que $g(x) = x^{(n+1)}$ es también estrictamente creciente. Sea $0 \leq x_1 < x_2$ se tiene que:

$$x_1^{n+1} = x_1^n.x_1 < x_2^n.x_1 < x_2^n.x_2 = x_2^{n+1}$$

Lo que demuestra que $g(x) = x^{n+1}$ es también estrictamente creciente.

Parte 2: Hecho ésto, se quiere probar que la ecuación $x^n = a$ con $n \in \mathbb{N}$ tiene una solución real positiva única. Para ello se consideran los conjuntos:

$$A = \{x \mid \ x \geq 0 \ \wedge \ x^n < a\}$$

$$B = \{y \mid \ y \geq 0 \ \wedge \ y^n \geq a\}$$

Para poder utilizar el *axioma de completitud* se necesita mostrar que A es no vacío y que está acotado superiormente. La primera condición es inmediata, pues como $0 \in A$ se tiene que $A \neq \phi$. Luego, debido a que $a + 1 \in B$ se sabe que B también es distinto de vacío

$(B \neq \phi)$. Falta probar que A está acotado superiormente. Se conoce que si $x \in A$ entonces $x^n < a \leq a^n$. De lo que se sigue que para $x \in A$ e $y \in B$ se tiene $x \leq y$; de lo que se desprende que A está acotado superiormente como se necesitaba.

Ahora, por el *axioma de completitud* existe un número real único S que es la mínima cota superior de A. Esto asegura la existencia de $S \in B$ tal que para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$:

$$x \leq S \leq y$$
$$x^n \leq S^n \leq y^n$$

Esto demuestra que $S^n = a$, y por lo tanto S es la raíz n-ésima de a, y se denota por $S = \sqrt[n]{a}$.

De aquí se define: $\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = (x^p)^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p}$

2.3.1. Propiedades de las potencias de exponente racional

El cálculo con potencias tiene las siguientes propiedades:

- $x^{\frac{p}{q}} x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$ con $x \in \mathbb{R}$.
  $x^{\frac{p}{q}} x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{pn}{qn}} x^{\frac{mq}{nq}} = \left(x^{\frac{1}{qn}}\right)^{pn} = \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} = \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{pn+mq} = x^{\frac{pn+mq}{nq}} = x^{\frac{pn}{nq}+\frac{mq}{nq}} = x^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$

Esta propiedad requiere demostrar la igualdad: $\left(x^{\left(\frac{1}{q}\right)}\right)^p = (x^p)^{\left(\frac{1}{q}\right)}$

Tomando $y = \sqrt[n]{x}$ tenemos $y^n = x$, y por la segunda propiedad de exponentes naturales, se sigue que: $(y^m)^n = y^{mn} = (y^n)^m = x^m$. Lo que significa que y^m es la raíz n-ésima de x^m lo cual demuestra que: $(\sqrt[n]{x})^m = y^m = \sqrt[n]{x^m}$

O equivalentemente que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$

- $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\left(\frac{p}{q}\right)} = x^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$ con $x \in \mathbb{R}$.
  $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x^m}}\right)^p = \left(\sqrt[nq]{x^m}\right)^p = \left(x^{\frac{m}{nq}}\right)^p = \left[\left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^m\right]^p = \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{mp} = x^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}}$

- $\frac{x^{\frac{p}{q}}}{x^{\frac{m}{n}}} = x^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$ con $x \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{Z}$, y con $q, n \neq 0$.
  $(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{m}{n}}$ cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, y con

- $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $m, n \neq 0$.
  $(xy)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(xy)^m} = \sqrt[n]{x^m}\sqrt[n]{y^m} = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{m}{n}}$

2.4. Función exponencial

Sea $f(x) = a^x$ para $a > 1$ y $x \in \mathbb{R}$ partiendo de la definición para $x \in \mathbb{Q}$. La definición del símbolo a^x siendo a real positivo y x real requiere probar que existe el límite de la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que r_n es la n-ésima *aproximación decimal* de x. Esto es, que:
Finalmente se obtiene que la ecuación del modelo lineal ajustado para la variable promedio es:

$$y = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

La prueba se realizará en 3 pasos. En la primera parte se definen las sucesiones, su límite y convergencia. En el segundo paso se define la noción de aproximación decimal, y se prueba la existencia de aproximaciones decimales para $x \in \mathbb{Q}$ mediante la construcción de dos sucesiones $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que la sucesión $\{r_n\}_{n\in N}$ es creciente y converge a x, mientras que la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente y converge a x. En el paso tres se utiliza esta construcción para probar la existencia de $y = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(r_n)}$.

Paso 1: Definición de sucesión convergente y existencia del límite de una sucesión.

Cuando los elementos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se acercan a cierto número real l, conforme n se hace grande, se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l. Para precisar esto mejor, se toma un intervalo $(l-\epsilon,\ l+\epsilon)$, con $\epsilon > 0$. Si los $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se acercan a l, se debe tener $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (l-\epsilon,\ l+\epsilon)$, para n suficientemente grande. Esto justifica la siguiente definición.

Definición: Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid a_n - l \mid < \epsilon, \forall n \geq N$. En tal caso se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y que su límite es l. Esto se escribe $a_n \to l$, o también se usa la notación que sigue:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Si el límite l no existe, se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. A continuación se enuncian dos lemas (Lema 1 y Lema 2), que se aceptan como verdaderos debido a que su demostración es fácilmente accesible, y luego se prueba la *ley del emparedado.* Los tres son necesarios para construir la función exponencial mediante sucesiones de aproximaciones decimales:

Lema 1: Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces su límite es único.

Lema 2: Toda sucesión convergente es acotada.

Ley del Emparedado: Dadas dos sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergentes a l. Se supone que existe n_0 tal que $b_n \leq a_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$. Se quiere probar que entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a l.

Debido a que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, entonces para un $\epsilon > 0$ dado, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mid b_n - l \mid < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$$l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$$

De la misma forma, debido a que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, existe n_2 tal que

$$\mid c_n - l \mid < \epsilon \quad \forall n \geq n_2$$

$$l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$$

Definiendo $N = max\ \{n_0, n_1, n_2\}$, por definición se tiene que $b_n \leq a_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$, entonces se puede decir que:

$$l - \epsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < l + \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\mid a_{n-l} \mid < \epsilon$$

De lo que se concluye que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l.

Paso 2: En este paso se construye primero la definición de Aproximación Decimal de un número real x; y luego se prueba la existencia de aproximaciones decimales para $x \in Q$ mediante la construcción de dos sucesiones $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge a x, mientras que la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente y converge a x.

El sistema de notación decimal permite escribir los números reales mediante una combinación de potencias de diez con "números dígitos". Esto es con números enteros entre cero y nueve, inclusive. Por ejemplo: $4,25$ se escribe como $4 + \frac{2}{10^1} + \frac{5}{10^2}$. La siguiente definición formaliza lo anterior. En lo que sigue se llamará D al conjunto de los dígitos, es decir el conjunto de los números naturales entre 0 y 9: $D = 0, 1, \ldots, 9$.

Un número real positivo x admite una *aproximación decimal* de la forma:

$$x = a + \frac{c_1}{10^1} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n}$$

$$x = a + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^k}$$

donde $a \in \mathbb{Z}$; $c_k \in \mathbb{D}$, y $n \in \mathbb{N}$. Tal expresión se suele escribir $a, c_1c_2 \ldots c_n$.

Una vez definida la aproximación decimal de un número real se procede a probar la existencia de aproximaciones decimales para $x \in \mathbb{Q}$. Considere en primer lugar un número real $x \in [0, 1)$. En lo que sigue se demostrará que efectivamente existe una sucesión de naturales $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $c_n \in \mathbb{D}$, tales que:

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} \leq x < \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots + \frac{c_n + 1}{10^n}.$$

En tal caso se dice que x tiene *aproximación decimal* $0, c_1c_2c_3 \ldots$
Para probar que x, quien pertenece al intervalo $[0, 1)$, tiene aproximación decimal $0, c_1c_2c_3 \ldots$, se debe tener $\frac{c_1}{10} \leq x < c_1 + \frac{1}{10}$; o lo que es lo mismo $c_1 \leq 10x < c_1 + 1$. Así, se comienza por definir a c_1 como la *parte entera* [5] de $10x$, esto es $c_1 = [10x]$. Nótese que, debido a la definición de parte entera, esta es la única opción.

Luego, habiendo definido $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, se debe definir c_n tal que:

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} \leq x < \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots \frac{c_n + 1}{10^n}.$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{c_n}{10^n} \leq x - \left(\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} \ldots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}\right) < \frac{c_n + 1}{10^n}$$

Lo que significa que:

$$c_n \leq 10^n x - 10^n \left(\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} \ldots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}\right) < c_n + 1$$

[5] La *parte entera* La parte entera se define como la función $f \to Z/f(x) = [x]$ siendo x el número entero que cumple la desigualdad $[x] \leq x < [x] + 1$. La parte entera de un número real positivo x también puede ser definida como, el mayor número entero, menor o igual que x, y se denota: $[x] = max\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x\}$. Por ejemplo$[5, 32]$ =5.

$$c_n \leq 10^n x - \left(10^{n-1}c_1 + 10^{n-2}c_2 + 10^{n-3}c_3 + \ldots + 10^n c_{n-1}\right) < c_n + 1$$

Luego, por definición de parte entera, la única posibilidad es definir

$$c_n = 10^n x - \left(c_1 10^{n-1} + c_2 10^{n-2} + c_3 10^{n-3} + \ldots + c_{n-1} 10^n\right)$$

Esto define la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por recurrencia, de tal forma que

$$r_n = \tfrac{c_1}{10} + \tfrac{c_2}{10^2} + \tfrac{c_3}{10^3} + \ldots + \tfrac{c_n}{10^n} \text{ satisface } r_n \leq x < r_n + \tfrac{1}{10^n}.$$

Como consecuencia se tiene $\mid r_n - x \mid < \frac{1}{10^n} \to 0$, lo cual implica que la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a x. Claramente la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente pues:

$$r_{n+1} = r_n + \frac{c_{n+1}}{10^{(n+1)}} \geq r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} r_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} &= r_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \\ &\leq r_n + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \\ &= r_n + \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

Esto muestra que la sucesión $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente y además la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Este resultado se resume a continuación.

Teorema: Dado un número real x, existe una única sucesión de naturales $c_n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ tal que

$$\frac{c_1}{10} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} \leq x < \frac{c_1}{10} + \ldots + \frac{(c_n + 1)}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida arriba es creciente y converge a x, mientras que la sucesión $\{s_n\}_{n\mathbb{N}}$ definida por $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ es decreciente y converge a x.

Definición: Si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión del teorema anterior, se dice que x tiene *aproximación decimal* $0, c_1c_2\ldots$, y se escribe $x = 0, c_1c_2\ldots$

En general, si $x > 0$ y se define $c_0 := [x]$ se obtiene $x - c_0 \in [0, 1)$ si la aproximación decimal de $x - c_0$ es cero, $0, c_1c_2\ldots$, se escribe $x = c_0, c_1c_2\ldots$

Definición: Una sucesión real $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaga la siguiente propiedad:

$$(\forall\, n, m \in \mathbb{N})(n < m \to x_n \leq x_m)$$

Se denomina **creciente.** Es claro que *la sucesión de aproximaciones decimales de todo número real positivo* x es creciente; pero además es acotada superiormente y y converge a su mínima cota superior: x. Esta propiedad de las sucesiones de aproximaciones decimales, es generalizable: toda sucesión real que sea creciente y acotada superiormente converge a su mínima cota superior. La demostración de este resultado es análoga a la del teorema según el cual un número real positivo x el límite de la sucesión de sus aproximaciones decimales.

Nota: en el caso de aproximaciones decimales de números reales, el límite de la sucesión coincide con su mínima cota superior (o su máxima cota inferior).

Paso 3: Se retoma ahora la construcción de la función exponencial. En principio se define $f(x) = a^x$ para $a > 1$ y $x \in \mathbb{R}$ partiendo de la definición para $x \in Q$. Para esto se recuerda que existen sucesiones $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la primera creciente y la segunda decreciente tales que:

$$r_n \leq x < s_n = r_n + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $a > 1$ se tiene que $f(r) = a^r$ es estrictamente creciente en $\mathbb{Q}$. Luego como

$$r_1 \leq r_n \leq r_{n+1} \leq x \leq s_{n+1} \leq s_n \leq s_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se tiene que:

$$a^{r_1} < a^{r_n} < a^{r_{n+1}} < a^{s_{n+1}} < a^{s_n} < a^{s_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto muestra que la sucesión $\{a^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente por a^{r_1}, mientras que la sucesión $\{a^{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por a^{r_1}. Por el teorema de Weierstrass, que dice que toda sucesión monótona y acotada es convergente, ambas sucesiones son convergentes.

Se puede definir entonces:

$$y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \quad y \quad \mu = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

Por otra parte, sabiendo que la sucesión $\{a^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a uno es posible deducir que como $10^n > n$ entonces $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$, de lo cual se deduce que $1 < a^{\frac{1}{10^n}} < a^{\frac{1}{n}}$.

Luego, como $\{a^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a uno, entonces $\{a^{\frac{1}{10^n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a uno. De aquí que:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n + \frac{1}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{\frac{1}{10^n}} = y$$

Nótese que es el único número real que es a la vez mayor que cada a^{r_n} y menor que cada a^{s_n}. Así, si se pretende que f siga siendo creciente la única definición posible para a^x es:

$$y = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Esta definición, de la función exponencial, en la que se hace uso de sucesiones, simplifica enormemente el trabajo al demostrar las propiedades de la exponencial para exponentes reales. Para hacerlo, el siguiente lema es de gran ayuda.

Lema: Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales que converge a x, entonces la sucesión $a^{\alpha_n}{}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a^x.

Demostración Por la desigualdad de Bernoulli,[6] se tiene que:

$$a = (1 +_n)^n > 1 + n\epsilon_n > n\epsilon_n$$

Con $\epsilon_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Reescribiendo la desigualdad se tiene: $a^{\frac{1}{n}} > 1$. Luego, reemplazando en la expresión anterior se concluye que:

$$a = (1 + a^{\frac{1}{n}} - 1)^n > 1 + na^{\frac{1}{n}} > na^{\frac{1}{n}}$$

[6] La desigualdad de Bernoulli dice que: $(1 + x)^n \geq 1 + xn, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a = (a^{\frac{1}{n}})^n > 1 + na^{\frac{1}{n}} > na^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a}{n} > \frac{1 + na^{\frac{a}{n}}}{n} > \frac{na^{\frac{a}{n}}}{n}$$

$$\frac{a}{n} > \frac{1}{n} + a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n}}$$

De la desigualdad es posible deducir que:

$$\frac{a}{n} > a^{\frac{a}{n}}$$

$$\frac{a}{n} > a^{\frac{a}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto permite concluir lo siguiente:

$$1 + \frac{a}{n} > a^{\frac{a}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{a}{m}$, de donde:

$$1 + \epsilon > 1 + \frac{a}{m} > a^{\frac{1}{m}} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego como $\{a^{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a^x, por la definición de función exponencial se tiene que $\alpha_n - r_n$ converge a 0, y que por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$-\frac{1}{m} < \alpha_n - r_n < \frac{1}{m}, \quad \forall n \geq N$$

Consecuentemente: $1 - \epsilon < \frac{1}{(1+\epsilon)} < a^{-\frac{1}{m}} < a^{\alpha_n - r_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon, \quad \forall n \geq N$

Esto muestra que: $a^{\alpha_n - r_n}$ converge a 1 y luego:

$$a^{\alpha_n} = a^{r_n} . \, a^{\alpha_n - r_n} \quad \text{converge} \quad a^x . \, 1 = a^x$$

Este lema, es la principal herramienta en las demostraciones que siguen a continuación, de las propiedades de la función exponencial con exponente real.

2.4.1. Propiedades de la función exponencial con exponente real

- Para $a > 1$ la función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

En efecto sean x e $y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Sean $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de racionales tales que la primera crece a x, y la segunda decrece a y.

Sean p y $q \in \mathbb{Q}$ tales que $x < q < p < y$ entonces:

$$a^{s_n} < a^p < a^q < a^{t_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq a^p < a^q \leq \lim_{n\to\infty} a^{t_n} = a^y$$

- Para x e $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $(a^x)^y = a^{xy}$.

Aquí hay que ser un poco más cuidadosos. Se asume primero que x e y son positivos. Luego se toman tres sucesiones de racionales positivos $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $t_{n n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crece a x; $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrece a x; y $t_{n n\in\mathbb{N}}$ converge a y.

Luego, como $a^{r_n} < a^x$ entonces por el lema anterior se tiene que $a^{r_n t_n} = (a^{(r_n})^{t_n} < (a^x)^{t_n}$, luego, por el lema anterior:

$$a^{xy} = \lim_{(n\to\infty)} a^{(r_n t_n)} \leq \lim_{(n\to\infty)} (a^x)^{t_n} = (a^x)^y$$

De forma similar

$$a^{xy} = \lim_{(n\to\infty)} a^{(s_n t_n)} \leq \lim_{(n\to\infty)} (a^x)^{t_n} = (a^x)^y$$

Pegando las dos desigualdades se obtiene la igualdad buscada. Luego si $x < 0$ ó $y < 0$ se procede de forma similar.

Las propiedades demostradas arriba siguen siendo válidas para $0 < a < 1$, excepto que ahora la función $f(x) = a^x$ sería estrictamente decreciente.

Sea $a > 1$, y la función $f(x) = a^x$ acabada de definir. Se recuerda la desigualdad:
$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + 1/n$, para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a}{n} < E$. Luego para $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ se tiene:

$$a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n} < 1 + \epsilon$$

Y también:

$$a^x > a^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{(1+\epsilon)} > 1 - \epsilon$$

Esto demuestra que tomando $\delta = \frac{1}{n}$ se tiene:

$$| x |< \delta \Rightarrow| a^x - 1 |< \epsilon$$

Esto significa que

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

En otras palabras, la función exponencial es continua en $x = 0$. En general, haciendo el cambio $t = x - x_0$ se tiene:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0}$$

y entonces la función exponencial de base a es continua en todo $\mathbb{R}$.

2.4.2. Características de la función exponencial: Sobreyectividad

Una vez probada la continuidad, se puede usar el *teorema de valores intermedios* para concluir que el rango de la función exponencial es todo $\mathbb{R}^+$.

Considera $y > 0$ se observa que:

$$a^n = (1 + a - 1)^n > n(a - 1)$$

Por propiedad arquimediana existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1(a-1) > y$, de donde:

$$a^{n_1} > n_1(a-1) > y$$

De la misma forma existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0(a-1) > \frac{1}{y}$, de donde $an_0 > \frac{1}{y}$. Consecuentemente tenemos:

$$a^{-n_0} < y < a^{n_1}$$

Por el teorema de los valores intermedios, existe $x \in (-n_0,\ n_1)$, tal que $a^x = y$. Esto demuestra que la siguiente función es sobreyectiva:

$$f : R \to (0, \infty), \quad f(x) = a^x \tag{1}$$

Como ya se sabía que era inyectiva (por ser estrictamente creciente), se concluye que es de hecho biyectiva.

Nota: Para $0 < a < 1$ tenemos $a^x = \frac{1}{b^x}$, con $b = \frac{1}{a} > 1$, y no es difícil convencerse de que sigue siendo biyectiva y continua. En adelante, cuando se hable de la función exponencial, se hará referencia a la función definida por (1), con $a > 0$ y $a \neq 1$.

En resumen se tiene:
Teorema: La función exponencial $f : R \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ es biyectiva y continua. Además, es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

3. Palabras Finales

En síntesis, este enfoque al principio parece ser la forma «más natural» o la más directa de definir la función exponencial, debido a que se basa en la operación básica de las potencias. Sin embargo, si se la quiere construir rigurosamente, su construcción presenta rápidamente dificultades conceptuales que no pueden ser salvadas en la escuela secundaria. Pues el procedimiento requiere la utilización de las propiedades del conjunto de los reales, y de métodos específicos de análisis como son las nociones de sucesiones, de límite y de continuidad. Sin embargo, discutir este tipo de conceptos es útil para los profesores en ejercicio, que la mayoría de las veces al enseñarlas en forma axiomática colabora con la trivialización que se hace de ellos. Por ejemplo, debido a que es común presentar la función exponencial a partir de su definición, aceptando su existencia y sus propiedades, la mayoría de las veces no se da siquiera una idea intuitiva de lo que pasa en el caso de exponentes irracionales del tipo a^π. Tampoco se discuten la validez de las propiedades de este tipo de potencias. Por otra parte, desde la teoría de números es posible analizar cuestiones, que desde el punto de vista funcional se aceptan sin cuestionamientos o simplemente se las ignora. Por ejemplo, estudiar la función exponencial como operación permite determinar que la razón por la cual tiene dos inversas, se debe a que no es conmutativa y no tiene neutro. En Argentina, los libros que abordaban este tipo de cuestiones en la escuela secundaria, desde la teoría de números, eran los de editorial (Estrada, 1983) más conocidos como «los Tapia» debido a sus autores (Nelly Vazquez de Tapia, Alicia Tapia de Bibiloni, Carlos Alberto Tapia).

Finalmente, resta decir que el procedimiento expuesto en este trabajo, por invitar a la discusión de conceptos y propiedades naturalizadas en la enseñanza, es adecuado para los últimos años del profesorado en matemática, o durante la capacitación de profesores en ejercicio. Está claro, que con una ingeniería didáctica adecuada podría ser propuesto también, a los estudiantes de carreras que sin ser profesorados cuentan con una fuerte formación en matemática.

Agradecimientos: agradecemos a la Dra. Ana Paula Madrid (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires) por la revisión matemática del manuscrito.

Referencias

[1] Bair, J. y Henry, V. (2009). L'exponentielle: une fonction à plusieurs facettes. *Losanges* [en línea], 3, 31-37. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/66800/1/03exponentielle.pdf 2

[2] Carbonero, S. (2002). Una Construcción Elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica. *Matemática, Educación e Internet* [en linea], 3 (1). Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2278 3

[3] Fréchet, M. (2005). Équation différentielle y ' y et fonction exponentielle. *APMEP* [en línea], 460. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: https://www.apmep.fr/Equation-differentielle-y-%E2%80%B2-y-et

[4] Friedelmeyer, J. P. (2005). Comment introduire les fonctions logarithmes et exponentielles au lycée? *APMEP* [en línea], 460. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: https://www.apmep.fr/Comment-introduire-les-fonctions 2

[5] Magnin, N. y Rogalski, M. (2011). Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale. *Bulletin Vert* [en línea]. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: https://www.apmep.fr/Un-scenario-pour-motiver-l 2

[6] Robledo Potes, J. (2014).*Matemática fundamental para matemáticos*. Cali (Colombia): Universidad del Valle. 2

[7] Sanchez Diez, C. (2012). *Construyendo la función exponencial*. Matemática, Física Astronomía. [en línea]. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: http://casanchi.com/mat/exponencial01.pdf 2

[8] Stoll, A. (2005). L'exponentielle en environnement informatique.*APMEP* [en línea], 460. Recuperado el 20 de mayo de 2018, de: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA05072.pdf 2