Ingeniería Industrial/ISSN1815-5936/ Vol. XL/No. 3/septiembre-diciembre /2019 /pp. 248-259

ARTÍCULO ORIGINAL
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Y ESTADÍSTICA

Modelo de ponderación de atributos basado en un nuevo índice de inconsistencia

Attribute weighting model based on a new inconsistency index

Julio César-Pena, Lucía Francisca-Argüelles, Leonardo Concepción

Universidad Central de las Villas. Santa Clara, Cuba
Correo electrónico: Jpena@uclv.cu, largue@uclv.edu.cu, lcperez@uclv.cu

Recibido: Recibido: 5 de junio del 2019.
Aprobado: 30 de agosto del 2019.

RESUMEN
Este trabajo parte de demostrar que un índice de consistencia propuesto en 2015 como parte de un modelo de ponderación de atributos no es suficientemente objetivo. Por lo anterior, se propone un nuevo modelo de optimización para ponderar atributos que se base en una idea similar a la del modelo analizado donde no se evidencien las limitaciones detectadas en él. Para su logro interpretan la significación y el alcance de los índices de consistencia e inconsistencia propuestas en el trabajo previo, de donde se indujo la limitante en el primero que se corrobora luego con el análisis de un caso de estudio. Se usan métodos estadísticos-matemáticos. El nuevo modelo se basa en técnicas de la lógica difusa extendida y en nuevos conceptos introducidos por los autores como el índice de inconsistencia generalizado ponderado de orden q y los coeficientes de confianza internos y externos.

Palabras clave: toma de decisiones, ponderación de atributos, modelo de optimización, inconsistencia, consistencia.

ABSTRACT
This work was proposed as the first objective to demonstrate that a consistency index proposed in 2015 as part of an attribute weighting model is not objective enough. The second objective is the proposal of a new optimization model to weight attributes that is based on an idea similar to that of the analyzed model where the limitations detected in it are not evident. To achieve the above, the significance and scope of the consistency and inconsistency indices proposed in the previous work from where the limitation was induced in the first one is corroborated with the analysis of a case study. The new model is based on extended fuzzy logic techniques and on new concepts introduced by the authors such as the weighted generalized inconsistency index of order q and the internal and external confidence coefficients.

Key words: *Decision making, attribute weighting; Optimization model; Inconsistency; Consistency.*

I. INTRODUCCIÓN

El Análisis De Decisión Múltiple Atributo (ADMA) es un importante campo de investigación en ciencias decisionales, investigación de operaciones y en administración (Wan and Li, 2014). Muchos enfoques se han desarrollado a través de los años para apoyar la toma de decisiones en aquellos escenarios complejos que lo requieran.

Dentro de las metodologías de apoyo a la toma de decisiones, un paso fundamental consiste en la ponderación de los atributos que los decisores consideran relevantes. Un primer enfoque aplicativo de la ponderación de atributos, es permitir que la evaluación de las alternativas disponibles en un problema de toma de decisiones sea más objetiva. Un segundo enfoque es permitir a los proveedores de un determinado producto o servicio, determinar las características más relevantes de lo que proveen, para así orientar la generación de nuevas alternativas en función de los atributos con mayor significación.

La mayoría de las tendencias actuales para ponderar atributos se basan en modelos de optimización que persiguen optimizar determinadas funciones objetivo con restricciones en el conjunto de pesos. Las ideas en que se basan las distintas funciones objetivo dentro de estos modelos suelen ser variadas. Algunas de estas ideas son las siguientes:

- Maximizar las evaluaciones de las alternativas (Wang and Fu, 1993)(Wan *et al.*, 2015)(Fu and Wang, 2015)(D.F. Li, 1999)(Wang, 2005)(Park *et al.*, 2011)
- Minimizar la incompatibilidad de decisión y la incompatibilidad de desviación(Chin, Fu and Wang, 2015)
- Minimizar la entropía difusa en la matriz de decisiones (Chen and Li, 2010)(Jin *et al.*, 2014)
- Minimizar la disonancia cognitiva (Pei, 2013)
- Maximizar la diferencia mínima entre evaluaciones consecutivas de las alternativas que se corresponden con un orden previamente establecido de estas (Horowitz and Zappe, 1995)
- (VI) Maximizar la compatibilidad entre distintas formas de evaluación de las alternativas (Fan, Ma and Zhang, 2002)(Chen, 2014)(Wan and Li, 2014)(Wan and Dong, 2015), (VII) Minimizar errores respecto a la opinión de los decisores(Horsky and Rao, 1984)(DENG, Yang and XU, 2004).

En este artículo se considera que la idea VI es de las más interesantes. En este sentido, uno de los más recientes trabajos es el método de generación de pesos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia (Wan and Dong, 2015).

En (Wan and Dong, 2015)se pide al decisor que establezca las relaciones de preferencia difusa (RPD) entre las alternativas y se consideran evaluaciones globales de las alternativas basadas en un TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*). Luego, se definen los índices de inconsistencia y consistencia asociados a los dos anteriores tipos de evaluación como indicadores de la incompatibilidad o compatibilidad existentes entre ambos respectivamente. Así, se considera que los pesos de los atributos deben maximizarla consistencia y minimizar la inconsistencia a la vez.

Se parte de demostrar que la forma de medir la consistencia en (Wan and Dong, 2015)no es suficientemente objetiva. El objetivo es la generación de un modelo alternativo al anterior basado en una idea similar, pero que no se vea afectado por las limitaciones encontradas. Los principales aportes de este trabajo son:

1- Se muestra que el modelo de ponderación de atributos propuesto en (Wan and Dong, 2015) puede resultar ineficaz en ciertas circunstancias.
2- Se introducen los conceptos de índice de inconsistencia generalizado ponderado y los coeficientes de confianza externos e internos.
3- Se propone un nuevo modelo de optimización para ponderar atributos, basado en los conceptos introducidos.

II. MÉTODOS

1.1. Conjuntos Difusos Intuicionistas Valorados en Intervalos ($CDIVIs$)

Un Conjunto Difuso Intuicionista (CDI) A asociado a un universo $X = \{x_1, x_2 \dots x_k\}$ de números reales, se define por $A = \{\langle x, \mu_A(x), v_A(x) | x \in X\rangle\}$, donde $\mu_A(x): X \to [0,1]$ y $v_A(x): X \to [0,1]$ representan los grados de pertenencia y no pertenencia de A a X respectivamente. Los valores $\mu_A(x)$ y $v_A(x)$ satisfacen $\mu_A(x) + v_A(x) \leq 1$. Además se define el índice de ignorancia $\pi_A(x)$ por: $\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + v_v(x))$.

Para generalizar el concepto de CDI, se define el de $CDIVIs$ ($\bar{A}$) asociado a un universo de discurso $X = \{x_1, x_2 \dots x_k\}$ de números reales por $\bar{A} = \{\langle x, \bar{\mu}_{\bar{A}}(x), \bar{v}_{\bar{A}}(x) | x \in X\rangle\}$, donde $\bar{\mu}_{\bar{A}}(x): X \to L([0,1])$, $\bar{v}_{\bar{A}}(x): X \to L([0,1])$ representan los grados de pertenencia y no pertenencia (expresados en intervalos) respectivamente de $\bar{A}$ a X. $L([0,1])$ es el conjunto de todos los subintervalos del intervalo$[0,1]$.$\bar{A}$ puede expresarse como: $\bar{A}=\{\langle x,[\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x),\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)],[\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x),\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)]|x\in X\rangle\}$, sien++do $\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x),\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x)$ los límites inferiores de los intervalos y $\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x),\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)$ los superiores, donde $0\le\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)\le\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)\le 1,\ 0\le\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x)\le\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)\le 1\ y\ \bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)+\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)\le 1\ \forall x\in X$. Se define el índice de ignorancia $\bar{\pi}_{\bar{A}}(x)$ por: $\bar{\pi}_{\bar{A}}(x)=[1-(\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)+\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)),1-(\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)+\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x))\ ]$.

Definición 1: Sean $\bar{A}=\{\langle x,[\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x),\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)],[\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x),\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)]|x\in X\rangle\}$ y $\bar{B}=\{\langle x,[\bar{\mu}_{\bar{B}}^{L}(x),\bar{\mu}_{\bar{B}}^{R}(x)],[\bar{v}_{\bar{B}}^{L}(x),\bar{v}_{\bar{B}}^{R}(x)]|x\in X\rangle\}$, $\lambda>0$,dos CDIVIs,entonces (Wan and Dong, 2015):

(1)$\bar{A}\subseteq\bar{B}\leftrightarrow\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)\le\bar{\mu}_{\bar{B}}^{L}(x)$, $\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)\le\bar{\mu}_{\bar{B}}^{R}(x)$, $\bar{v}_{\bar{B}}^{L}(x)\le\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x)$ y $\bar{v}_{\bar{B}}^{R}(x)\le\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)$.

(2) $\bar{A}=\bar{B}$ si y solo si $\bar{A}\subseteq\bar{B}$ y $\bar{B}\subseteq\bar{A}$

(3)$\bar{A}+\bar{B}=\left\{\left\langle x,\begin{bmatrix}\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)+\bar{\mu}_{\bar{B}}^{L}(x)-\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)\bar{\mu}_{\bar{B}}^{L}(x)\\ \bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)+\bar{\mu}_{\bar{B}}^{R}(x)-\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)\bar{\mu}_{\bar{B}}^{R}(x)\end{bmatrix},[\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x)\bar{v}_{\bar{B}}^{L}(x),\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)\bar{v}_{\bar{B}}^{R}(x)]\middle|x\in X\right\rangle\right\}$

(4)$\lambda\bar{A}=\left\{\left\langle x,\left[1-\left(1-\bar{\mu}_{\bar{A}}^{L}(x)\right)^{\lambda},1-\left(1-\bar{\mu}_{\bar{A}}^{R}(x)\right)^{\lambda}\right],[\bar{v}_{\bar{A}}^{L}(x)^{\lambda},\bar{v}_{\bar{A}}^{R}(x)^{\lambda}]\middle|x\in X\right\rangle\right\}$

1.2. Formato incompleto de preferencias entre atributos

Dada la subjetividad del proceso de dar información sobre los atributos, normalmente no se otorgan valores precisos, sino que se establece esta información usando el formato incompleto de preferencias entre atributos (I)que consta de las restricciones siguientes (Chen and Li, 2011)(Wan and Dong, 2015)(D.F. Li, 2011)(Wan and Li, 2013):

$$\text{Orden débil } w_i\ge w_j \tag{1}$$
$$\text{Ranking con múltiplos } w_i\ge a_{ij}*w_j\ con\ 1\ge a_{ij}\ge 0 \tag{2}$$
$$\text{Orden fuerte } b_{ij}>w_i-w_j\ge a_{ij}>0,\ \ 1\ge b_{ij},a_{ij}\ge 0 \tag{3}$$
$$\text{Valor de intervalo } b_{ij}\ge w_i\ge a_{ij},1\ge b_{ij},a_{ij}\ge 0 \tag{4}$$
$$\text{Ranking de diferencias } w_i-w_j\ge w_{i'}-w_{j'} \tag{5}$$

1.3. Método de generación de pesos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia

Este método es propuesto en (Wan and Dong, 2015). A continuación, se explican los pasos del mismo.

Paso 1: Construcción de la matriz de decisiones.

Sea el conjunto de alternativas: $O=\{O_1\ ,O_2,\dots,O_m\}$, el conjunto de atributos es: $A=\{A_1,A_{2,}\dots,A_n\}$ y el conjunto de decisores es $E=\{e_1,e_2,\dots,e_K\}$. Luego, se consideran seis formatos de información para que cada decisor exprese los elementos de la matriz decisional. Estos formatos son: (I_1)→ $CDIVIs$: $r=\langle[\mu_{ij}^{-p},\mu_{ij}^{+p}],[v_{ij}^{-p},v_{ij}^{+p}]\rangle$, (I_2)→ $CDIs$: $r=\langle\mu_{ij}^{p},v_{ij}^{p}\rangle$, (I_3)→Números difusos trapezoidales ($NDTRs$): $r=(a_{ij1}^{p},a_{ij2}^{p},a_{ij3}^{p},a_{ij4}^{p})$, (I_4)→Números difusos triangulares $NDTs$:$r=(b_{ij1}^{p},b_{ij2}^{p},b_{ij3}^{p})$, (I_5)→ Intervalos:$r=[c_{ij1}^{p},c_{ij2}^{p}]$ y (I_6)→ números reales $r=d_{ij}^{p}$. Cada decisor emplea alguno entre los formatos (I_1-I_6) según el nivel de conocimiento que posea o la comodidad que sienta al usarlos. Aquí ij se refiere a la evaluación de la alternativa O_i respecto a A_j y p se refiere a que es información dada por e_p.

Al representar cada valor en la matriz de decisiones por y_{ij}^{p}, esta matriz puede expresarse como $Y^p=(y_{ij}^{p})_{(mxn)}$ y luego se deben normalizar estas evaluaciones. Para llevar a cabo estas normalizaciones se pueden considerar las relaciones siguientes$(Wang\ and\ Luo,2010)(Wang\ and\ Parkan,2006)$:$r_{i\ j}=\frac{y_{ij}-y_j^{min}}{y_j^{max}-y_j^{min}}\ para\ atributos\ de\ beneficio, o\ r_{ij}=\frac{y_j^{max}-y_{ij}}{y_j^{max}-y_j^{min}}$ para atributos de costo. Luego, la matriz de decisiones original $Y^p=(y_{ij}^{p})_{(mxn)}$ es cambiada a una normalizada $R^p=(r_{ij}^{p})_{(mxn)}$.

Paso 2: Relaciones de preferencia subjetivas entre alternativas

Cuando existe información para hacerlo, el decisor e_p debe establecer la relación de preferencia subjetiva entre las alternativas a partir de valores de $CDIVIs$ de acuerdo a: $\tilde{\Omega}_p=\{\langle(k,j),\ \tilde{t}_p(k,j)\rangle a_k\succeq_p a_j\}$. Aquí $\tilde{t}_p(k,j)$ es el valor $CDIVIs$ que expresa la preferencia de la alternativa $a_k$sobre la a_j, favoreciendo a a_k (dada por $a_k\succeq_p a_j$).

Paso 3: Evaluación de alternativas basadas en TOPSIS

Ya conocida la matriz $R^p = (r_{ij}^p)_{(mxn)}$, se procede a generar una alternativa ideal positiva (AIP) $r = (r_1^*, r_2^*, \ldots, r_n^*)$ y una alternativa ideal negativa (AIN) $r = (r_{*1}, r_{*2}, \ldots, r_{*n})$. Los valores de r_i^* y r_{i*} representan las mejores evaluaciones posibles de cada atributo según el formato de $(I_1 - I_6)$ en que se expresaron las evaluaciones de la matriz decisional para dicho atributo y pueden representarse de la siguiente manera:

$$r_i^* = \begin{cases} \langle [\mu_i^{*-}, \mu_i^{*+}], [v_i^{*-}, v_i^{*+}] \rangle (I \in I_1) \\ \langle \mu_i^*, v_i^* \rangle (I \in I_2) \\ (a_{i1}^*, a_{i2}^*, a_{i3}^*, a_{i4}^*)(I \in I_3) \\ (b_{i1}^*, b_{i2}^*, b_{i3}^*)(I \in I_4) \\ [c_{i1}^*, c_{i2}^*](I \in I_5) \\ d_i^*(I \in I_6) \end{cases} \quad \text{y} \quad r_{*i} = \begin{cases} \langle [\mu_{*i}^-, \mu_{*i}^+], [v_{*i}^-, v_{*i}^+] \rangle (I \in I_1) \\ \langle \mu_{*i}, v_{*i} \rangle (I \in I_2) \\ (a_{*i1}, a_{*i2}, a_{*i3}, a_{*i4})(I \in I_3) \\ (b_{*i1}, b_{*i2}, b_{*i3})(I \in I_4) \\ [c_{*i1}, c_{*i2}](I \in I_5) \\ d_{*i}(I \in I_6) \end{cases}$$

Las distancias de una evaluación r_{ij}^p de la matriz de decisiones normalizada a la evaluaciones ideal positiva e ideal negativa en A_i se determinan por S_{ij}^{*p} y S_{*ij}^p respectivamente. Para calcular S_{ij}^{*p} y S_{*ij}^p se combinan medidas de distancias asociadas a cada formato $I_k, k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (ver (Wan and Dong, 2015)). Para valores reales, estas distancias se calculan respectivamente por $\left(d_{ij}^p - d_i^*\right)^2$ y $\left(d_{ij}^p - d_{*i}\right)^2$.

Así, se considera el grado de proximidad relativa de r_{ij}^p respecto a r_i^* por$\beta_{ij}^p = S_{*ij}^p / (S_{*ij}^p + S_{ij}^{*p})$. Además, la evaluación global de la alternativa O_i se calcula por $D_i^p = \sum_{j=1}^n w_j \beta_{ij}^p$, donde w_j es el peso de A_j y a mayor D_i^p, mejor evaluación recibe O_i.

Paso 4: Índices de inconsistencia y consistencia. Modelo de optimización.

Suponiendo que las preferencias subjetivas del decisor dadas por $\tilde{t}_p(k,j)$ y la expresión D_i^p constituyen evaluaciones confiables sobre las alternativas, es necesario que exista una compatibilidad alta entre ellas. Para verificar lo anterior se definen los índices de inconsistencia y consistencia para el par (O_k, O_j) respectivamente por Ecuación 1 y Ecuación 3:

Definición 2 (Índice de inconsistencia):

$$\tilde{E}_{kj}^p = \begin{cases} \tilde{t}_p(k,j)\left(D_j^p - D_k^p\right), si \ D_k^p < D_j^p \\ 0, \quad si \ D_k^p \geq D_j^p \end{cases} \tag{1}$$

Ya que $\tilde{t}_p(k,j)$ se estableció para cuando $O_k \geq O_j$, si $D_k^p < D_j^p$ significa que $O_j \succ O_k$ por lo que no hay correspondencia entre ambos tipos de evaluación, teniendo sentido un coeficiente positivo de inconsistencia. Además, como $\tilde{E}_{kj}^p = \tilde{t}_p(k,j)\max\{0, D_j^p - D_k^p\}$, se define el índice general de inconsistencia por ecuación 2:

$$\tilde{E} = \sum_{p=1}^K \sum_{(k,j)\in\tilde{\Omega}_p} \tilde{E}_{kj}^p = \sum_{p=1}^K \sum_{(k,j)\in\tilde{\Omega}_p} [\tilde{t}_p(k,j)\max\{0, D_j^p - D_k^p\}] \tag{2}$$

Definición 3 (Índice de consistencia):

$$\tilde{F}_{kj}^p = \begin{cases} \tilde{t}_p(k,j)\left(D_k^p - D_j^p\right), si \ D_k^p \geq D_j^p \\ 0, \quad si \ D_k^p < D_j^p \end{cases} \tag{3}$$

En este caso, $\tilde{t}_p(k,j)$ indica que $O_k \geq O_j$, por lo que si $D_k^p \geq D_j^p$, tiene sentido un índice positivo de consistencia. Si $D_k^p < D_j^p$, tiene sentido el 0.Como $\tilde{F}_{kj}^p = \tilde{t}_p(k,j)\max\{0, D_k^p - D_j^p\}$, se define el índice general de consistencia por ecuación 4:

$$\tilde{F} = \sum_{p=1}^K \sum_{(k,j)\in\tilde{\Omega}_p} \tilde{F}_{kj}^p = \sum_{p=1}^K \sum_{(k,j)\in\tilde{\Omega}_p} [\tilde{t}_p(k,j)\max\{0, D_k^p - D_j^p\}] \tag{4}$$

Para ponderar los atributos se propone el siguiente modelo de optimizaciónEcuación 5:

$$\mathrm{Min}\{\tilde{E}\}/\,\mathrm{Max}\{\tilde{F}\}, \quad \mathrm{s.t}: w \in I \ (5)$$

Como en $\tilde{E}$ y $\tilde{F}$ aparecen implícitos problemas de optimización, y que se persiguen dos objetivos a la vez, este modelo se cambia a otro de programación por metas ponderadas. Al no ser el objetivo de este trabajo indagar en especificaciones relativas a lo anterior, se sugiere al lector ver detalles en(Wan and Dong, 2015).

1.4. Análisis crítico del método de generación de pesos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia

La idea de generar un conjunto pesos que posibilite una mayor compatibilidad entre las evaluaciones de las alternativas dadas por las relaciones subjetivas del decisor ($\tilde{t}_p(k,j)$) y la expresión de cálculo de D_j^pes bastante objetiva. Es decir, si se acepta que $\tilde{t}_p(k,j)$ y D_j^p son confiables, entonces los pesos implicados en el cálculo de D_j^p deben permitir que dicha expresión sea compatible con los valores de $\tilde{t}_p(k,j)$.

Al considerar el índice de inconsistencia, tenga en cuenta que su valor está expresado en términos de $CDIVIs$ y note que la desigualdad $D_k^p < D_j^p$ es compatible con que se cumpla que$O_k \prec O_j$ y esto a su vez es incompatible con el valor de $\tilde{t}_p(k,j)$, que implica que $O_k \succeq O_j$. Luego, a mayor valor de $\left(D_j^p - D_k^p\right)$, más se refuerza la incompatibilidad entre los valores de $\tilde{t}_p(k,j)$ y los pares de evaluaciones (D_j^p, D_k^p).

Con lo anterior, queda claro que $\tilde{E}_{kj}^p$ representa la incompatibilidad entre los valores de $\tilde{t}_p(k,j)$ y las evaluaciones $D_i^p, (i \in \{j,k\})$ objetivamente.

Note en cambio que $\tilde{F}_{kj}^p$, una vez establecida la relación subjetiva $\tilde{t}_p(k,j)$, crece cuanto mayor se haga la diferencia $\left(D_k^p - D_j^p\right)$, siempre y cuando esta sea positiva. Sucede que lo anterior no resulta un criterio suficientemente sólido de consistencia. Es decir, una vez establecida la relación $\tilde{t}_p(k,j)$, tiene sentido que se considere la existencia de consistencia si $D_k^p \geq D_j^p$, pero no necesariamente se da una mayor compatibilidad por que aumente la diferencia $D_k^p - D_j^p$. Tenga en cuenta que es posible que un valor de $\tilde{t}_p(k,j)$favorezca mínimamente aO_k sobre O_j, por lo que si un determinado conjunto de pesos $w_i^1, i \in \{1,2,\dots,n\}$ genera una diferencia d_1 bastante alta entre D_k^p y $D_j^p\left(D_k^p - D_j^p = d_1 > 0\right)$, mientras que otro conjunto de pesos $w_i^2, i \in \{1,2,\dots,n\}$ genera una diferencia ligeramente superior de D_k^p respecto a $D_j^p(D_k^p - D_j^p = d_2 > 0)$, se tendría que $\tilde{F}_{kj1}^p = \tilde{t}_p(k,j) * d_1 > \tilde{F}_{kj2}^p = \tilde{t}_p(k,j) * d_2$. De esta forma, $\tilde{F}_{kj}^p$ favorece al primer conjunto de pesos (w_i^1) sobre el segundo (w_i^2) a pesar de que de los dos es w_i^2 el que se corresponde en mayor medida con una superioridad mínimade O_k sobre O_j como indica $\tilde{t}_p(k,j)$. Lo anterior se ejemplificará y analizará en el siguiente caso de estudio.

<u>Caso de estudio</u>:

Supóngase, para simplificar, que un problema decisional consta de un solo decisor y que este establecerá los valores de la matriz de decisiones concernientes a cada atributo en el formato I_6, es decir, valores reales. Considere la escala (cero-uno) para otorgar dichos valores. Considere también que todos los atributos son de beneficio. En este contexto, la matriz decisional dada es mostrada en la Tabla 1 y las relaciones subjetivas de preferencia entre las alternativas ($\tilde{t}_p(k,j)$) establecidas por el decisor se muestran en la Tabla 2.

Tabla 1. Matriz de decisiones de tres alternativas y tres atributos perteneciente al caso de estudio

	A_1	A_2	A_3
O_1	0,8	0,2	0,5
O_2	0,2	0,5	0,7
O_3	0,2	0,9	0,2

Tabla 2. Relaciones de preferencia subjetivas entre las alternativas para el caso de estudio

	μ^-	μ^+	v^-	v^+
$\tilde{t}_1(1,2)$	0,45	0,50	0,35	0,40
$\tilde{t}_1(1,3)$	0,45	0,50	0,35	0,40
$\tilde{t}_1(2,3)$	0,45	0,50	0,45	0,50

Como se puede apreciar, la percepción que tiene el decisor sobre el valor que tienen para él las alternativas es que O_1 es moderadamente superior respecto a O_2 y a O_3. Además, considera que los valores que tienen O_2 y O_3 son aproximadamente iguales.

Al analizar los valores en la Tabla 3 puede apreciarse que el primer conjunto de pesos ($w_1 = 0{,}40$, $w_2 = 0{,}35, w_3 = 0{,}25$) genera evaluaciones de las alternativas (D_i) que están muy en correspondencia con la información subjetiva del decisor. Por otro lado, el segundo conjunto de pesos ($w_1 = 0{,}80,\ w_2 = 0{,}10, w_3 = 0{,}10$) genera evaluaciones que indican una diferencia muy alta de

O_1 sobre O_2 y O_3 lo cual no se corresponde con la información subjetiva brindada por el decisor. Acorde a las evaluaciones (D_i) generadas, el primer conjunto de pesos logra claramente una mayor compatibilidad con la información subjetiva que se tiene del decisor respecto al segundo conjunto de pesos. Sin embargo, es el segundo conjunto de pesos el que genera un mayor índice general de consistencia, lo que demuestra la falta de objetividad del formato de cálculo de consistencia como se quería demostrar. Note que para ambos conjuntos de pesos el índice de inconsistencia es 0, por lo que en estos casos solo influye la consistencia

Tabla 3. Incompatibilidad entre las evaluaciones de las alternativas y los índices generales de consistencia ($\tilde{F}$) generados por dos conjuntos de pesos en el caso de estudio

$w_1 \vert w_2 \vert w_3$	D_1	D_2	D_3	$(\tilde{F}) = \langle[\mu^-, \mu^+], [v^-, v^+]\rangle$
0,40| 0,35| 0,25	0,52	0,41	0,38	$\langle[0{,}15, \quad 0.17], [0{,}75, \quad 0{,}78]\rangle$
0,80| 0,10| 0,10	0,81	0,18	0,15	$\langle[0{,}54, \quad 0.60], [0{,}25, \quad 0{,}30]\rangle$

III. RESULTADOS

1.5. Propuesta de un modelo alternativo al método de generación de pesos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia

Se parte de considerar que las evaluaciones D_k^p y D_j^p sobre las alternativas O_k y O_j respectivamente pueden transformarse en un valor CDI por:

$$\tilde{t}_p'(k,j) = \langle \mu_1, v_1 \rangle = \left\langle \frac{D_k^p}{D_k^p + D_j^p}, \frac{D_j^p}{D_k^p + D_j^p} \right\rangle \tag{6}$$

Las relaciones subjetivas de preferencias expresadas con $CDIVIs$ entre O_k y O_j dadas por el decisor e_p ($\tilde{t}_p(k,j) = \langle[\mu_{kj}^{-p}, \mu_{kj}^{+p}], [v_{kj}^{-p}, v_{kj}^{+p}]\rangle$) pueden ser transformadas en $CDIs$ de acuerdo a la expresión:

$$\tilde{t}_p''(k,j) = \langle \mu_2, v_2 \rangle = \left\langle \left[(1 - c_1^p)\mu_{kj}^{-p} + c_1^p \mu_{kj}^{+p}\right], \left[(1 - c_2^p) v_{kj}^{-p} + c_2^p v_{kj}^{+p}\right] \right\rangle \tag{7}$$

Aquí, c_1^p es un coeficiente de confianza interno asociado al límite superior del intervalo de pertenencia que debe establecer el decisor tal que $0 \leq c_1^p \leq 1$. Si $c_1^p > 0{,}5$ el decisor siente mayor confianza hacia el valor de μ_{kj}^{+p} respecto al valor de μ_{kj}^{-p}. Si $c_1^p < 0{,}5$ el decisor siente mayor confianza hacia el valor de μ_{kj}^{-p}respecto al valor de μ_{kj}^{+p}, mientras que si $c_1^p = 0{,}5$ el decisor siente igual confianza por μ_{kj}^{-p}yμ_{kj}^{+p}.

De forma análoga ocurre con el coeficiente de confianza interno asociado al límite superior del intervalo de no pertenencia (c_2^p). Es decir, $0 \leq c_2^p \leq 1$ y si $c_2^p > 0{,}5$ el decisor siente mayor confianza hacia el valor de v_{kj}^{+p} respecto al valor de v_{kj}^{-p}. Si $c_2^p < 0.5$ el decisor siente mayor confianza hacia el valor de v_{kj}^{-p}respecto al valor de μ_{kj}^{+p}, mientras que si $c_2^p = 0{,}5$ el decisor siente igual confianza por v_{kj}^{-p}y v_{kj}^{+p}.

Así, la distancia de Minkowski tradicional puede ser usada como medidor de distancia entre los números difusos intuicionistas $\tilde{t}_p'(k,j)$ y $\tilde{t}_p''(k,j)$ por Ecuación 8:

$$d^q\left[\tilde{t}_p'(k,j), \tilde{t}_p''(k,j)\right] = (|\mu_2 - \mu_1|^q + |v_2 - v_1|^q + |\pi_2 - \pi_1|^q)^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

En base a Ecuación 8, se define el índice de inconsistencia generalizado de orden q por Ecuación 9:

$$I_{IG}^q = \sum_{p=1}^{K} \sum_{O_k, O_j \in \tilde{\Omega}_p} d^q[\tilde{t}_p'(k,j), \tilde{t}_p''(k,j)] \tag{9}$$

En base a I_{IG}^q, se propone el modelo de optimización (Ecuación 10) para ponderar los atributos:

$$\min I_{IG}^q = \sum_{p=1}^{K} \sum_{O_k, O_j \in \tilde{\Omega}_p} d^q\left[\tilde{t}_p'(k,j), \tilde{t}_p''(k,j)\right], \quad s.t{:}\, w \in I \tag{10}$$

Para generalizar este modelo, es interesante considerar el nivel de confianza que siente el decisor hacia las relaciones subjetivas ($\tilde{t}_p(k,j)$) que dio. Es decir, partiendo de que este generalmente no va otorgar valores de $\tilde{t}_p(k,j)$ para todos los pares de alternativas, es posible que algunas de las alternativas respecto a las que sí da información posean características en sus atributos que estén sujetos a una incertidumbre más fuerte respecto a otras alternativas. Un ejemplo de esto

puede darse si se considera que entre varios planes de inversión (alternativas) que se están proponiendo para hacer determinadas reformas en una empresa, se está teniendo en cuenta el atributo: "ganancias esperadas en un periodo de tiempo (t)". Aquí, es posible que las ganancias esperadas para algunos de los planes de inversión estén sujetas a ciertas variables no controladas totalmente y por tanto dar información concerniente a tales alternativas es más incierto que dar información sobre otras alternativas con características menos inciertas.
Si se considera un coeficiente de confianza externo $w_{k,j}^{p}$ como medida de la confianza que se tiene hacia cada valor $\tilde{t}_p(k,j)$ establecido, tal que $0 \leq w_{k,j}^{p} \leq 1$ y mayores valores de $w_{k,j}^{p}$ significan que el decisor se siente más seguro del valor $\tilde{t}_p(k,j)$ dado, puede definirse el índice de inconsistencia generalizado ponderado de orden q por ecuación 11:

$$I_{IGP}^{q} = \sum_{p=1}^{K} \sum_{O_k,O_j \in \tilde{\Omega}_p} w_{k,j}^{p} d^q[\tilde{t}_p'(k,j), \tilde{t}_p''(k,j)] \quad (11)$$

La generalización del modelo establecido en Ecuación 10está dado por ecuación 12:

$$\min I_{IGP}^{q} = \sum_{p=1}^{K} \sum_{O_k,O_j \in \tilde{\Omega}_p} w_{k,j}^{p} d^q[\tilde{t}_p'(k,j), \tilde{t}_p''(k,j)], \ \ s.t{:}\, w \in I \quad (12)$$

El anterior modelo se denominará: modelo de ponderación basado en el índice de inconsistencia generalizado ponderado de orden q con $CDIs$.

1.6. Ejemplo ilustrativo
Suponga que una compañía C se dedica a la fabricación y venta de paneles solares. Suponga además que su producto a perdido espacio en el mercado internacional en los últimos tiempos y que se ha decidido, por tanto, desarrollar un nuevo proyecto para fabricar nuevos paneles solares con el objetivo de que logren una mayor competitividad internacional. Para comenzar el análisis, se recopilaron datos de cinco de los paneles solares más exitosos en el mercado $(P_1, P_2, P_3, P_4 P_5)$ asociados a algunas de las variables que se consideran que mejor pueden explicar el éxito de los mismos. Los datos se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Datos que se obtienen de los atributos de algunos paneles solares de más éxito

Paneles exitosos	Potencia (Watt)	Eficiencia %	Tiempo de vida esperado (años)	Superficie m^2	Costo (€)	Porcentaje de ventas anuales
P_1	380	23	8	1.55	150	55-60
P_2	330	22	10	2.00	140	50-60
P_3	300	16	10	2.10	100	45-55
P_4	400	20	6	1.40	170	35-40
P_5	350	18	12	1.55	140	25-40

Se asumirá que solo un decisor se encargará de dar la información para simplificar el ejemplo.
Paso 1: Construcción de la matriz de decisiones.
En este caso, para simplificar supondremos que los valores fueron dados con números reales (I_6). Además, las alternativas serían $(P_1, P_2, P_3, P_4 P_5)$, sin embargo, se considerarán como atributos de decisión todos los que representan las columnas de la Tabla 4 salvo el porcentaje de ventas anuales y la explicación a esto será dada en el paso 2. Entonces, la matriz normalizada $R^p = (r_{ij}^{p})_{(mxn)}$ queda conformada como muestra la Tabla 5:

Tabla 5. Normalización de los valores de la Tabla 4

Paneles exitosos	Potencia (Watt)	Eficiencia %	Tiempo de vida esperado (años)	Superficie m^2	Costo (€)
P_1	0.80	1.00	0.33	0.25	0.29
P_2	0.30	0.86	0.67	1.00	0.43
P_3	0.00	0.00	0.67	1.17	1.00
P_4	1.00	0.57	0.00	0.00	0.00
P_5	0.50	0.29	1.00	0.25	0.43

Paso 2: Relaciones de preferencia subjetivas entre alternativas
En este paso los decisores establecen $CDIVIs$ para comparar los pares de alternativas de acuerdo a: $\tilde{\Omega}_p = \{\langle(k,j),\ \tilde{t}_p(k,j)\rangle a_k \geq_p a_j\}$. Sin embargo, la información así dada, es completamente intuitiva, aunque acorde a las características reales de las alternativas. Pero en el planteamiento del problema, hay una variable que puede ser más confiableque la intuición de los decisores, por la medida en que tributa dicha variable al objetivo que se persigue en el problema. Se trata del porcentaje de ventas anuales.
Note que el objetivo principal que se persigue en el problema es lograr un producto de mayor competencia en el mercado internacional. Por tanto, al margen de lo que piensen los decisores de cuáles serían los mejores paneles solares (alternativas), el porcentaje de ventas anuales es la manifestación directa del éxito en la venta de los paneles. De esta forma, cuando el decisor vaya a establecer los $CDIVIs$ asociados a las comparaciones pareadas entre alternativas, lo lógico sería que la razón entre los grados de membresía y no membresía de los $CDIVIs$ dados, sean similares a la razón entre los porcentaje *de ventas anuales* de los paneles que se comparan. El índice de ignorancia $\pi_A(x)$, debe ser mayor, cuanto mayores sean los rangos en los que se dan los valores de los *porcentaje de* ventas *anuales* de los paneles que se comparan, pues rangos más amplios significan (mayor imprecisión y desconocimiento. Teniendo en cuenta todo lo anterior, son dados los valore de $\tilde{t}_p(k,j)$ por parte del decisor y estos son mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6. Relaciones de preferencia subjetivas entre alternativas dadas por el decisor ($\tilde{t}_p(k,j)$)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	…	$\langle[0.43, 0.48], [0{,}38, 0.48]\rangle$	$\langle[0.47, 0.52], [0{,}30, 0.40]\rangle$	$\langle[0.50, 0.55], [0{,}20, 0.35]\rangle$	$\langle[0.50, 0.55], [0{,}20, 0.30]\rangle$
P_2		…	$\langle[0.40, 0.50], [0.30, 0.40]\rangle$	$\langle[0.42, 0.52], [0.33, 0.38]\rangle$	$\langle\langle[0.43, 0.53], [0{,}20, 0.35]\rangle\rangle$
P_3			…	$\langle\langle[0.40, 0.50], [0.35, 040]\rangle\rangle$	$\langle\langle[0.40, 0.50], [0{,}20, 0.35]\rangle\rangle$
P_4				…	$\langle\langle[0.40, 0.45], [0.30, 0.45]\rangle\rangle$
P_5					…

Note que las alternativas fueron dispuestas de forma que los elementos de la diagonal superior tengan sentido. Es decir, que el valor $\tilde{t}_p(k,j)$ satisfice que la superioridad de P_k sobre P_j.Por tal motivo, no tiene sentido otorgar valores a ningún elemento de la diagonal inferior.

Paso 3: Evaluación de alternativas basadas en TOPSIS

Tabla 7. Grados de proximidad relativa **de r_{ij}^p respecto a r_i^***

Paneles exitosos	Potencia (Watt)	Eficiencia %	Tiempo de vida esperado (años)	Superficie m^2	Costo (€)
P_1	$\beta_{11}^p = 0.94$	$\beta_{12}^p = 1.00$	$\beta_{13}^p = 0.20$	$\beta_{14}^p = 0.10$	$\beta_{15}^p = 0.14$
P_2	$\beta_{21}^p = 0.16$	$\beta_{22}^p = 0.97$	$\beta_{23}^p = 0.80$	$\beta_{24}^p = 1.00$	$\beta_{25}^p = 0.36$
P_3	$\beta_{31}^p = 0.00$	$\beta_{32}^p = 0.00$	$\beta_{33}^p = 0.80$	$\beta_{34}^p = 0.98$	$\beta_{35}^p = 1.00$
P_4	$\beta_{41}^p = 1.00$	$\beta_{42}^p = 0.64$	$\beta_{43}^p = 0.00$	$\beta_{44}^p = 0.00$	$\beta_{45}^p = 0.00$
P_5	$\beta_{51}^p = 0.50$	$\beta_{52}^p = 0.14$	$\beta_{53}^p = 1.00$	$\beta_{54}^p = 0.10$	$\beta_{55}^p = 0.36$

Luego, la evaluación global de la alternativa O_i se considera que se pude calcular por $D_i^p = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_{ij}^p$, donde w_j es el peso de A_j y a mayor D_i^p, mejor evaluación recibe O_i.
Paso 4: Nuevo modelo de optimización

Aquí, se deben transformar los $CDIVIs$ dados en la Tabla 6 en $CDIs$usando la Ecuación 7 a partir de los coeficientes de confianza internosc_1^py c_2^p. Se asumirá, para simplificar, que para todos los valores de $\tilde{t}_p(k,j)$disponibles se otorgaron los valores $c_1^p = c_2^p = 0.5$. Con esto, los valores de$\tilde{t}_p^{''}(k,j)$ quedan como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Transformación de los $CDIVIs$ dados en la Tabla 6 en $CDIs$ de acuerdo a Ecuación 7

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	...	$\langle[0.46],[0.43]\rangle(\tilde{t}_p''(1,2))$	$\langle[0.50],[0.35]\rangle\ (\tilde{t}_p''(1,3))$	$\langle[0.53],[0.28]\rangle\ (\tilde{t}_p''(1,4))$	$\langle[0.53],[0,25]\rangle(\tilde{t}_p''(1,5))$
P_2		...	$\langle[0.45],[0.35]\rangle(\tilde{t}_p''(2,3))$	$\langle[0.47],[0.36]\rangle(\tilde{t}_p''(2,4))$	$\langle\langle[0.48],[0.28]\rangle\rangle(\tilde{t}_p''(2,5))$
P_3			...	$\langle[0.45],[0.38]\rangle(\tilde{t}_p''(3,4))$	$\langle\langle[0.45],[0.28]\rangle\rangle(\tilde{t}_p''(3,5))$
P_4				...	$\langle\langle[0.43],[0.38]\rangle\rangle(\tilde{t}_p''(4,5))$
P_5					...

Además, deben ser dados los coeficientes de confianza externos $w_{k,j}^p$ asociados a los valores de $(\tilde{t}_p(k,j))$ que estableció el decisor. Se supondrá que $w_{k,j}^p = 1\ \forall k,j \in \{\tilde{\Omega}_p\}$. El modelode la Ecuación 12, para $q = 1$ quedaría de la siguiente manera:

$$\min I_{IGP}^q$$
$$= \left(\left|0.46 - \frac{D_1^p}{D_1^p + D_2^p}\right|^1 + \left|0.43 - \frac{D_2^p}{D_1^p + D_2^p}\right|^1 + |0.11|^1\right)^1 + \left(\left|0.50 - \frac{D_1^p}{D_1^p + D_3^p}\right|^1 + \left|0.35 - \frac{D_3^p}{D_1^p + D_3^p}\right|^1 + |0.15|^1\right)^1$$
$$+ \left(\left|0.53 - \frac{D_1^p}{D_1^p + D_4^p}\right|^1 + \left|0.28 - \frac{D_4^p}{D_1^p + D_4^p}\right|^1 + |0.19|^1\right)^1 + \left(\left|0.53 - \frac{D_1^p}{D_1^p + D_5^p}\right|^1 + \left|0.25 - \frac{D_5^p}{D_1^p + D_5^p}\right|^1 + |0.22|^1\right)^1$$
$$+ \left(\left|0.45 - \frac{D_2^p}{D_2^p + D_3^p}\right|^1 + \left|0.35 - \frac{D_3^p}{D_2^p + D_3^p}\right|^1 + |0.20|^1\right)^1 + \left(\left|0.47 - \frac{D_2^p}{D_2^p + D_4^p}\right|^1 + \left|0.36 - \frac{D_4^p}{D_2^p + D_4^p}\right|^1 + |0.17|^1\right)^1$$
$$+ \left(\left|0.48 - \frac{D_2^p}{D_2^p + D_5^p}\right|^1 + \left|0.28 - \frac{D_5^p}{D_2^p + D_5^p}\right|^1 + |0.24|^1\right)^1 + \left(\left|0.45 - \frac{D_3^p}{D_3^p + D_4^p}\right|^1 + \left|0.38 - \frac{D_4^p}{D_3^p + D_4^p}\right|^1 + |0.17|^1\right)^1$$
$$+ \left(\left|0.45 - \frac{D_3^p}{D_3^p + D_5^p}\right|^1 + \left|0.28 - \frac{D_5^p}{D_3^p + D_5^p}\right|^1 + |0.27|^1\right)^1 + \left(\left|0.43 - \frac{D_4^p}{D_4^p + D_5^p}\right|^1 + \left|0.38 - \frac{D_5^p}{D_4^p + D_5^p}\right|^1 + |0.19|^1\right)^1$$
$$s.t: 1 \geq w_i \geq 0\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Note que se asume que la información incompleta no está disponible. El vector solución para los pesos calculado por los modelos nuevo y original fueron obtenidos con ayuda del software libre Wolfram Mathematica 8 y se muestran en la Tabla 9:

Tabla 9. Pesos de los atributos obtenidos a partir del nuevo modelo propuesto y del modelo original

	w(Potencia)	w(Eficiencia)	w(Tiempo)	w(Superficie)	w(Costo)
Pesos modelo nuevo	0.1427	0.4412	0.0510	0.0190	0.3470
Pesos modelo original	0.4805	0.000	0.1726	0.2199	0.1270

Según los valores de la tabla 10, con el modelo original se sugiere concentrar la inversión para desarrollar el nuevo producto en lograr altos índices de potencia, aunque sin despreciar, el logro de valores elevados en la superficie y el tiempo de vida facilitando además costos moderados. Por otro lado, el modelo nuevo sugiere concentrar la inversión en lograr altos índices de eficiencia y le atribuye una gran relevancia a la moderación de los precios. No se desprecia el logro de altos valores de potencia, mientras que se le presta mucha menor atención a la superficie o al tiempo de vida esperado de los paneles solares.

Para comparar la eficacia de los conjuntos de pesos generados por ambos métodos, se muestra en la Tabla 10 los porcentajes de ventas anuales (representaciones directas de los éxitos de ventas) y las correspondientes evaluaciones funcionales de cada panel

Tabla 10. Comparación entre evaluaciones funcionales del modelo nuevo y el original respecto a los porcentajes de venta anuales

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5

Evaluación para el modelo nuevo	0.6357	0.6361	0.4064	0.4250	0.3100
Evaluación para el modelo original	0.5263	0.4783	0.4806	0.4805	0.4806
Porcentajes de ventas anuales	$55-60$	$50-60$	$45-55$	$35-40$	$25-40$

Se puede apreciar que al comparar las evaluaciones funcionales generadas por el modelo nuevo con los *porcentajes de ventas anuales* hay un error mínimo dado por una ínfima superioridad en la evaluación de P_2sobre la de P_1 (cuando debería ser una ligera superioridad en sentido contrario). Algo similar ocurre en relación a las evaluaciones funcionales de P_3y P_4. Sin embargo, en general se puede apreciar cómo las evaluaciones funcionales van en descenso desde P_1 hasta P_5 con una tendencia y proporcionalidad similar a la de los porcentajes de ventas anuales. Para mayor visibilidad de este comportamiento puede separase las evaluaciones en tres conjuntos. El primero dado por: P_1 y P_2, cuyas evaluaciones superarían a las del segundo conjunto:P_3 y P_4 que a su vez sería superior al tercer conjunto: P_5.

Por otro lado, de las evaluaciones generadas por el modelo original solo se puede apreciar un comportamiento notablemente consistente con los porcentajes de ventas, en el hecho de la superioridad de P_1 sobre el resto de evaluaciones. Sin embargo, todas las demás evaluaciones son demasiado similares, a tal punto que a partir de ellas no se puede establecer con confianza un orden de jerarquía bien definido entre los distintos paneles, situación que no se corresponde con la realidad del problema planteado.

En base a lo anterior, puede apreciarse que los pesos generados por el modelo propuesto logran una mayor compatibilidad entre la evaluación funcional de las alternativas y la intuitiva respecto al modelo original en este caso analizado.

IV. DISCUSIÓN

El nuevo modelo propuesto presenta varias diferencias importantes con el modelo propuesto por (Wan and Dong, 2015) que le atribuyen mayor objetividad y un mayor alcance respecto a este. Estas diferencias son enumeradas y explicadas a continuación:

1- El valor del$\mathrm{I}_{\mathrm{IG}}^{\mathrm{q}}$ puede explicar mejor que el par$(\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{kj}}^{\mathrm{p}},\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{kj}}^{\mathrm{p}})$la existencia o no de compatibilidad entre las relaciones

2- $\tilde{t}_p(k,j)$.

3- Lo anterior se logra a partir de los subjetivas sobre los pares de alternativas $\tilde{\mathrm{t}}_{\mathrm{p}}(\mathrm{k},\mathrm{j})$ y las evaluaciones $\mathrm{D}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{p}},(\mathrm{i}\in\{\mathrm{j},\mathrm{k}\})$.

Esto se debe a que cuanto mayor sean los valores de I_{IG}^{q}, mayor serán las diferencias entre las relaciones subjetivas $\tilde{t}_p(k,j)$y lo que se espera de los pares de evaluaciones D_j^p y D_k^p y viceversa. Así, grandes valores de I_{IG}^{q} indican poca compatibilidad mientras que pequeños valores de I_{IG}^{q} indican alta compatibilidad. Lo anterior no puede ser garantizado por el coeficiente$\tilde{F}_{kj}^{p}$ del modelo propuesto en (Wan and Dong, 2015) como se dedujo analíticamente y ejemplificó en la sección 3.1.

Se asimila la mayor o menor afinidad de los decisores hacia los limites inferior y superior de los grados de pertenencia de los valores coeficientes de confianza interno$\mathrm{c}_1^{\mathrm{p}}$ y $\mathrm{c}_2^{\mathrm{p}}$dados por él.

4- Se modela la incertidumbre del decisor hacia los valores $\tilde{\mathrm{t}}_{\mathrm{p}}(\mathrm{k},\mathrm{j})$ que otorgó usando el coeficiente de confianza externo.

Aun cuando los $CDIVIs$, de por sí solos, se utilizan para captar la incertidumbre del decisor, es posible que este sienta mayor seguridad respecto a algunos de ellos sobre otros. Lo anterior puede ser modelado a partir de los valores $w_{k,j}^{p}$ y no es tenido en cuenta en modelo que lo precede.

Se sugiere que el nuevo modelo propuesto sea usado en aplicaciones a la solución de problemas de toma de decisiones. Específicamente, la utilidad se evidencia cuando se requiera cuantificar la importancia de las variables de decisión que están inmersas en un problema. Esto puede ser muy útil en la planificación de proyectos de inversión, pues este debe enfocarse en aquellas variables de mayor relevancia. Se exhorta a la investigación de trabajos que permitan una comparación del modelo propuesto con otros afines, para contrastar la eficiencia de las soluciones que se Genera.

En relación a la anterior con ineficacia, en determinados casos, del formato de cálculo para el índice de consistencia $\tilde{F}_{kj}^{p}$ asociado al método de ponderación de atributos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia se sugiere una investigación más profunda. Donde se pueda determinar umbrales a partir de los cuales deba considerarse no confiable la magnitud de las diferencias que se generen entre las evaluaciones subjetivas dadas por los decisores y las evaluaciones funcionales.

V. CONCLUSIONES

1- En este trabajo se ha demostrado cómo el formato de cálculo para el índice de consistencia $\tilde{F}_{kj}^{p}$ asociado al método de ponderación de atributos por minimización de la inconsistencia y maximización de la consistencia (Wan and Dong, 2015) es ineficaz en su aplicación en determinados casos. Fue evidenciado que para los casos en que el orden jerárquico entre las alternativas es el mismo según las relaciones subjetivas de preferencias dadas por los decisores y las evaluaciones funcionales de las mismas, el modelo original no detecta problemas de compatibilidad. Lo anterior no es una representación fiel a la realidad, pues es necesario considerar la magnitud de la superioridad en las comparaciones y no solo el orden si se quiere tener un mejor medidor de compatibilidad.

2- En base a las deficiencias detectadas se propuso un nuevo modelo de optimización para ponderar atributos basado en un nuevo índice de inconsistencia (índice de inconsistencia generalizado ponderado de orden q (I_{IGP}^{q})) donde no se evidencian las limitaciones encontradas en el primero. En la construcción del nuevo modelo se emplean nuevos conceptos introducidos por los autores. Por un lado, los coeficientes de confianza interno c_1^p, c_2^p que modelan la actitud de los decisores hacia los límites de los $CDIVIs$ usados en las relaciones subjetivas ($\tilde{t}_p(k,j)$) dadas por él. Por otro lado, con el coeficiente de confianza externo ($w_{k,j}^{p}$) se recogen los niveles de confianza que tienen los decisores hacia dichas relaciones subjetivas de forma general y permiten que el cálculo de I_{IGP}^{q} resulte más objetivo.

VI. REFERENCIAS

1. Chen T. Interval-valued intuitionistic fuzzy QUALIFLEX method with a likelihood-based comparison approach for multiple criteria decision analysis. Information Sciences. 2014;261:149–69. ISSN 00200255. DOI 10.1016/j.ins.2013.08.054.
2. Chen TaL, C. Determining objective weights with intuitionistic fuzzy entropy measures : A comparative analysis. Information Sciences. 2010;180(21): 4207–22. ISSN 00200255. DOI 10.1016/j.ins.2010.07.009.
3. Chen TaL, C. Objective weights with intuitionistic fuzzy entropy measures and computational experiment analysis. Applied Soft Computing Journal. 2011;11(8):5411–23. ISSN 15684946. DOI 10.1016/j.asoc.2011.05.018.
4. Chin K, Fu, C. and Wang, Y. A method of determining attribute weights in evidential reasoning approach based on incompatibility among attributes. Computers & Industrial Engineering. 2015;87:150-62. ISSN 03608352. DOI 10.1016/j.cie.2015.04.016.
5. Li DF. Fuzzy multiattribute decision-making models and methods with incomplete preference information. Fuzzy Sets and Systems. 1999;106:113-9. ISSN 01650114.
6. Li DF. Closeness coefficient based nonlinear programming method for interval valued intuitionistic fuzzy multiattribute decision making with incomplete preference information. Appl Soft Comput. 2011;11:3402–18.ISSN 15684946.
7. Deng M, Yang, J. and XU, W. Estimating the attribute weights through evidential reasoning and mathematical programming International Journal of Information Technology & Decision Making. 2004;3(3):419–28. ISSN 01650114.
8. Fan Z, Ma, J. and Zhang, Q. . An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives Fuzzy Sets and Systems. 2002;131:101–6. ISSN 01650114.
9. Fu CaW, Y. An interval difference based evidential reasoning approach with unknown attribute weights and utilities of assessment grades Computers & Industrial Engineering 2015;81:109–17. ISSN 01650114. DOI 10.1016/j.cie.2014.12.031.
10. Horowitz IaZ, C. . The Linear Programming Alternative to Policy Capturing for Eliciting Criteria Weights in the Performance Appraisal Process Omega. 1995;23(6):667–76. ISSN

03050483.
11. Horsky DaR, M. R. . Estimation of Attribute Weights from Preference Comparisons. Management Science. 1984;30(7):801–22. ISSN 03050483.
12. Jin Fea. Interval-valued intuitionistic fuzzy continuous weighted entropy and its application to multi-criteria fuzzy group decision making Knowledge-Based Systems. 2014;59:132–41. ISSN 09507051. DOI 10.1016/j.knosys.2014.01.014.
13. Park JH, et al. Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment Applied Mathematical Modelling. 2011;35(5):2544–56. ISSN 0307904X. DOI 10.1016/j.apm.2010.11.025.
14. Pei Z. Rational decision making models with incomplete weight information for production line assessment. Information Sciences. 2013;222:696–716. ISSN 00200255. DOI 10.1016/j.ins.2012.07.060.
15. Wan S, et al. A new method for Atanassov's interval-valued intuitionistic fuzzy MAGDM with incomplete attribute weight information Information Sciences. 2015;316(118):329-47. ISSN 00200255. DOI 10.1016/j.ins.2015.04.01.
16. Wan SaD, J Interval-valued intuitionistic fuzzy mathematical programming method for hybrid multi-criteria group decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy truth degrees. Information Fusion. 2015;26:49–65. ISSN 00200255. DOI 10.1016/j.inffus.2015.01.006.
17. Wan SaL, D. . Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Programming Method for Heterogeneous Multiattribute Group Decision Making With Atanassov's Intuitionistic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2014;22(2):300–12. ISSN 10636706.
18. Wan SPaL, D. F. . Fuzzy LINMAP approach to heterogeneous MADM considering comparisons of alternatives with hesitation degrees. Omega. 2013;41 925–40. ISSN 03050483.
19. Wang Y. On fuzzy multiattribute decision-making models and methods with incomplete preference information. Fuzzy Sets and Systems. 2005;151:285–301. ISSN 01650114. 10.1016/j.fss.2004.08.015.
20. Wang YaL, Y. Integration of correlations with standard deviations for determining attribute weights in multiple attribute decision making Mathematical and Computer Modelling. 2010;51(1-2):1-12. ISSN 08957177. DOI 10.1016/j.mcm.2009.07.016.
21. Wang YMaF, G. W. Using multiobjective decision making method to make decision for multiattributes Control and Decision. 1993;8(1): 25–9. ISSN 10010920.
22. Wang YaP, C. . A general multiple attribute decision-making approach for integrating subjective preferences and objective information. Fuzzy Sets and Systems. 2006;157 1333–45. ISSN 01650114. DOI 10.1016/j.fss.2005.11.017.