ROCA. Revista científico-educacional de la provincia Granma.
Vol.15 No. 3, julio-septiembre 2019. ISSN: 2074-0735. RNPS: 2090. roca@udg.co.cu

Original

Aprendizaje de curvas y superficies de nivel para generalizar familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas

Learning of level curves and level surfaces to generalize families of conic sections and quadric surfaces

M. Sc. Laura Givelly Peña Garzón, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia, laurgiv13@gmail.com

Dr. C. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia, orojasv2301@gmail.com

Recibido: 20/1/2019 Aceptado: 12/07/2019

Resumen

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas y superficies cuádricas históricamente ha presentado ciertas dificultades en la Licenciatura en Matemáticas. Esta temática es significativa para la formación de profesores, por las aplicaciones que tiene intra y extramatemática. En la investigación se presenta un taller sustentado en problemas matemáticos, que para su resolución requieren del programa GeoGebra. Este se concreta a través de una guía de trabajo, con el fin de apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las curvas y superficies de nivel de funciones de dos y tres variables respectivamente. Este proceso permite generalizar familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas a partir de exploraciones algebraicas y gráficas. El trabajo se ha desarrollado con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en la asignatura Cálculo Multivariado.

Palabras claves: curvas de nivel; superficies de nivel; secciones cónicas; superficies cuádricas; GeoGebra

Abstract

We present a classroom experience in which a work guide and the GeoGebra program have been used, in order to support the teaching and learning of level curves and level surfaces of functions of two and three variables respectively, to generalize families of conic sections and quadric surfaces from algebraic and graphic explorations. The teaching and learning process of the conic sections and quadric surfaces has historically presented some difficulties in the

Mathematics Degree. This subject is significant for the training of teachers, for the applications that it has intra and extra-mathematics. The research presents a workshop based on mathematical problems, which require the GeoGebra program for their resolution. The workshop is specified through a work guide, in order to support the teaching and learning of curves and surfaces of function level of two and three variables respectively. This process allows to generalize families of conic sections and quadric surfaces from algebraic and graphic explorations. This work has been developed with students of Mathematics Degree from the Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, in the subject Multivariable Calculus.

Key words: level curves; level surfaces; conic sections; quadric surfaces; GeoGebra

Introducción

Existen varios trabajos en relación a la idea de secciones cónicas y superficies cuádricas con mediación tecnológica. Se reconoce particularmente a Solís (2016) quien muestra de una manera gráfica y dinámica, "… las diferentes trazas que se pueden realizar sobre una superficie cuádrica, cuando ésta es intersecada por un plano paralelo a alguno de los planos coordenados y su implementación en el programa GeoGebra".

Por otra parte, un trabajo similar lo hace Anido, López y Rubio (2006) quienes fundamentan y describen una propuesta sobre

> "… el ambiente de aprendizaje que se crea cuando se utiliza una herramienta C.A.S. (Computer Algebraic System), en este caso el Scilab, en la enseñanza de la relación entre la ecuación de una superficie y su representación en el espacio. El computador se utiliza como una herramienta de aprendizaje. Se eligen superficies cuádricas cuyo estudio ha surgido a partir de la representación computacional: las supercuádricas y los supertoros. Se propone una forma general de obtención de las gráficas, las que a partir de las ecuaciones paramétricas de las cuádricas hace posible la obtención de una gran variedad de familias de superficies cuádricas. Esto como metodología que estimula el libre juego creativo del alumno, la exploración de potenciales propiedades y el afianzamiento del conocimiento de las cuádricas". (p.9)

En el ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje de las curvas y superficies de nivel de funciones de dos y tres variables respectivamente, investigadores han ofrecido cursos, conferencias y ponencias que reflejan las dificultades y avances de estas temáticas referidas en la escuela. En particular han sido abordadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM) y en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME).

El marco teórico que sustenta la investigación, hace referencia a la visualización matemática, los registros de representación semiótica, las TIC en el aprendizaje de las matemáticas, la teoría de la resolución de problemas y la teoría de comunidades de práctica.

Con respecto a la visualización se concuerda con Arcavi (2003) que "La visualización ofrece un método de ver lo invisible" (p. 216), criterios que se consideran útiles para las clases de matemáticas. En esta investigación se asume la definición sobre visualización matemática dada por (Arcavi, 2003, p. 217), pues se ajusta al propósito del trabajo, al expresar que:

> “… es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas".

Por otra parte, según Guzmán (1998, pp. 3 y 4, citando a Duval 1996) “… las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas). Esta producción no responde únicamente o necesariamente a una función de comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento”.

En lo referido a la resolución de problemas se asume la definición dada por Krulik y Rudnik (1987), pues establecen que un problema es “… una situación cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”, (p. 4). También se consideran las fases o estrategias propuestas por Polya (1965) para su concreción en el aula: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, evaluación de la solución y de la vía.

Por su parte, con respecto a la tecnología se concuerda con los criterios dados por Lim (2007), al plantear que la motivación para utilizar las TIC en la educación, en particular en la matemática, está dada en que promueve en los estudiantes su pensamiento constructivo y les permite al mismo tiempo trascender sus limitaciones cognitivas, involucrándolos en ciertas operaciones (cognitivas), que por otros medios, tal vez no hubieran podido lograr.

A través de la revisión de la literatura sobre el tema, del análisis de instrumentos como la observación participante y de la experiencia de los investigadores, se pudo constatar que existen algunas dificultades en el aprendizaje de curvas y superficies de nivel para generalizar familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas. Estas puedes resumirse en que:

- Es limitado el empleo de métodos que induzcan a la actuación productiva de los estudiantes para el dominio de las secciones cónicas.
- Las actividades asignadas en el aula no propician la experimentación, búsqueda y exploración en el estudio de las secciones cónicas.
- La construcción del contenido sobre secciones cónicas, no se introduce a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida, relacionadas con la temática.
- Son insuficientes los conocimientos previos necesarios que poseen los estudiantes para el estudio de las superficies cuádricas.
- Es escasa la utilización y aprovechamiento de los software de Geometría dinámica existentes para el trabajo con las superficies cuádricas.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las curvas y superficies de nivel, son parte fundamental en la formación de un Licenciado en Matemáticas. Este proceso debe dirigirse a encontrar y aplicar nuevas formas que permitan que los estudiantes se interesen por la temática, y se apropien del conocimiento. La guía de trabajo en el aula diseñada e implementada en este trabajo se dirige a lograr esto, permitiendo la manipulación y exploración de estos objetos matemáticos, a través de la mediación de materiales reales y dibujos dinámicos con el software GeoGebra. Se presenta, además, el objetivo sugerencias metodológicas, materiales a utilizar y el contenido a desarrollar por los estudiantes.

Población y muestra

Se realizó un estudio de tipo mixto ya que según Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista

(2014), "La meta de la investigación mixta no es reemplazar a la investigación cuantitativa ni a la investigación cualitativa, sino utilizar las fortalezas de ambos tipos de indagación, combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades potenciales". (p. 532)

Además, la investigación se estructura bajo un diseño de investigación acción. Según Minerva, (2006) este diseño

> "… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría", (p. 116).

El diseño de investigación acción aplicado al contexto del aprendizaje de curvas y superficies de nivel, propicia la experimentación, búsqueda y exploración del conocimiento sobre las secciones cónicas y superficies cuádricas. Este proceso estimula y propicia el desarrollo del pensamiento geométrico, y la independencia cognoscitiva de los estudiantes.

La investigación se llevó a cabo durante el semestre académico, y participaron 16 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, jornada diurna de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, inscritos en la asignatura de Cálculo Multivariado, quienes desarrollaron una guía de trabajo.

Para el análisis del aprendizaje, basado en la experimentación con los sistemas semióticos de representación, en el sentido de los registros usados para denotar objetos matemáticos propuestos o emergentes, en el enfoque cognitivo de Duval (1999): lenguaje natural, algebraico y gráfico, se usaron los métodos y técnicas del nivel empírico (observación participante, instrumentos de contenido y triangulación de información), y los métodos estadísticos matemáticos, en particular los programas de análisis cuantitativo y cualitativo SPSS y ATLAS.

Desarrollo

Análisis de los resultados

Para el trabajo en el aula con el taller se utiliza el software de geometría dinámica GeoGebra.

El procedimiento didáctico para el salón de clase se concreta a través de la siguiente guía de trabajo para construir curvas y superficies de nivel de funciones de dos y tres variables respectivamente, generalizando familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas.

Guía de trabajo Curvas y superficies de nivel.

Objetivo: construir curvas y superficies de nivel de funciones de dos y tres variables respectivamente, generalizando familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas.

Sugerencias metodológicas: el docente realiza curvas y superficies de nivel a partir de funciones diferentes a las presentadas en la guía. Con un tiempo prudente en la resolución y la asesoría del docente, se puede evidenciar y analizar los procesos de pensamiento matemático, y los sistemas de representación semiótica usados por los estudiantes.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, computador, software GeoGebra.

Desarrollo de la guía.

A. Dada la ecuación $\boldsymbol{4x^2 - y^2 + z = 0}$:

i. Determine el tipo de superficie llevando la ecuación de la forma general a la canónica.

ii. Establezca si la superficie es o no es función. Argumente su respuesta.

iii. Construya en GeoGebra (alternando las vistas gráficas 2D y 3D), la animación que permite visualizar las curvas de nivel o mapa de contorno ($\boldsymbol{4x^2 - y^2 + k = 0}$).

iv. Escriba la ecuación e identifique los tipos de curvas si:

a) $\boldsymbol{k = 0}$ b) $\boldsymbol{k < 0}$ c) $\boldsymbol{k > 0}$

B. Dada la función de tres variables $\boldsymbol{f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2}$:

i. Construya en GeoGebra la animación que permite visualizar las superficies de nivel ($\boldsymbol{k = x^2 - y^2 - z^2}$)

ii. Escriba la ecuación e identifique los tipos de superficies si:

a) $\boldsymbol{k = 0}$ b) $\boldsymbol{k < 0}$ c) $\boldsymbol{k > 0}$

Para el desarrollo de las cuestiones se formaron grupos de tres estudiantes, se estableció un líder, de acuerdo a la teoría de las comunidades de práctica de Wenger (1998), y se concluyó socializando y evaluando los resultados.

En el desarrollo de la guía de trabajo se sugiere la construcción de dos animaciones en el programa GeoGebra, una relacionada con curvas de nivel y la otra con superficies de nivel. El docente en el aula de computadores ejemplifica animaciones de curvas y superficies de nivel de funciones de dos y tres variables respectivamente ($f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}$; $f(x,y)=\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y$; $f(x,y,z)=y^2+x^2-4$).

En la Figura 1 se observan las animaciones presentadas por el docente a modo de ejemplo y los estudiantes analizando las mismas.

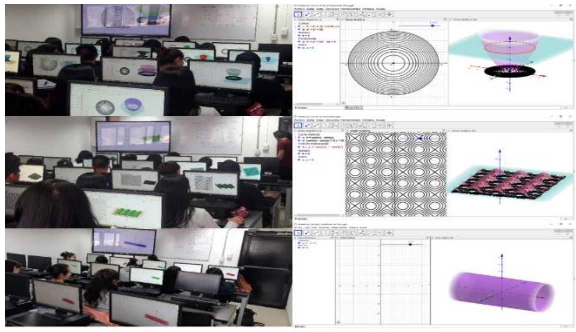

Figura 1. Estudiantes analizando los ejemplos de curvas y superficies de nivel. Fuente - Autores

Para las preguntas i, ii y iii del literal A, y la pregunta i del literal B, se establecieron cuatro variables, en tanto que para la pregunta iv del literal A, y ii del literal B, seis variables una por cada restricción de $\boldsymbol{k}$. Cada una de estas se valoraron de 0 a 5 donde se asignó 0 si no contestó, 1 si la respuesta era deficiente, 2 si era mala, 3 si era regular, 4 si era buena y 5 si era excelente.

A partir del procesamiento estadístico con el software SPSS se pudo valorar que la variable que más conllevó dificultad fue identificar el tipo de curva de nivel si $\boldsymbol{k}<\mathbf{0}$, y la variable de mayor desempeño sin contar las construcciones en GeoGebra fue la correspondiente a determinar el tipo de superficie llevando la ecuación de la forma general a la canónica (ver Figura 2).

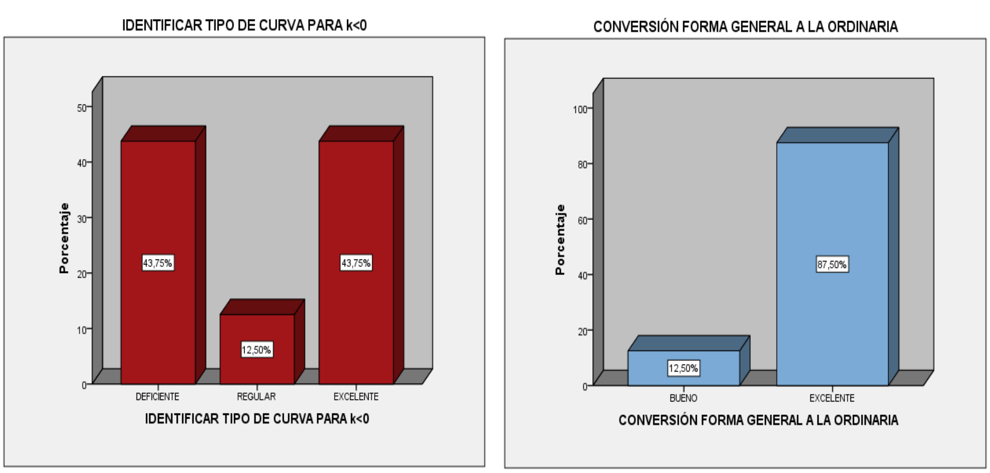

Figura 2. Resultados de los estudiantes en el aspecto de mayor y menor dificultad en la guía.

Se pudo resaltar también a partir del coeficiente de correlación de Pearson[1] que hay una fuerte correlación entre identificar tipo de curva de nivel si $\boldsymbol{k < 0}$ e identificar tipo de curva de nivel si $\boldsymbol{k > 0}$ al igual que entre tipo de superficie de nivel si $\boldsymbol{k < 0}$ e identificar tipo de superficie de nivel si $\boldsymbol{k > 0}$. En la Figura 3 se puede evidenciar las líneas de tendencia y el coeficiente de determinación[2] permaneciendo cercano a $\mathbf{1}$, lo que ratifica la relación directa entre las dos variables presentadas.

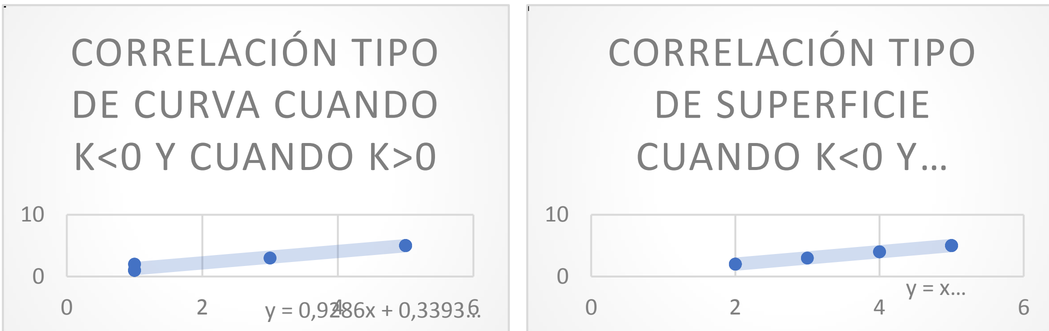

Figura 3. Líneas de tendencia para variables altamente correlacionadas. Fuente - Autores

Lo que significa que un estudiante que reconoce el tipo de curva o de superficie de nivel cuando $\boldsymbol{k < 0}$, va a poder determinar sin problema el caso análogo cuando $\boldsymbol{k > 0}$ o si no reconoce el lugar geométrico cuando $\boldsymbol{k < 0}$, tampoco lo va a reconocer cuando $\boldsymbol{k > 0}$.

En esta guía se presentaba una pregunta en la que se explicitaba la importancia de justificar la respuesta. La pregunta ii del literal A: "Dada la ecuación $\boldsymbol{4x^2} - y^2 + z = 0$. Establezca si la superficie es o no es función. Argumente su respuesta". A partir de esta se realizó una red conceptual con el programa de análisis cualitativo ATLAS.ti, con el fin de inferir el sistema de representación semiótico, y los procesos de pensamiento matemático que predominan en los estudiantes.

En la Figura 4 se observan las transcripciones que dieron los estudiantes a la pregunta en cuestión y en la Figura 5 algunas de las categorías establecidas para formar una Red conceptual para la definición de función de dos variables. Estas categorías se establecieron entre los sistemas de representación semiótica (lenguaje usual, representación tabular, representación algebraica y representación gráfica), los procesos en los sistemas de representación (conversión, tratamiento, y traducción), y los procesos de pensamiento

---

[1] Coeficiente de correlación de Pearson (R): en estadística es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. Si R cercano a 1 las variables tienden a ser directamente proporcionales, pero si R cercano a -1 las variables tienden a ser inversamente proporcionales.

[2] Coeficiente de determinación (R^2): es simplemente el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson.

matemático (argumentación, conjeturación, verificación, justificación y formalización).

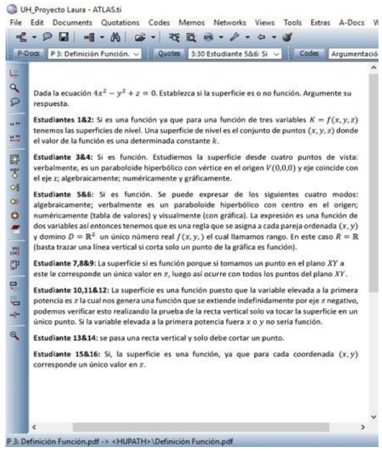

Figura 4. Resultados argumentación estudiantes si la superficie es o no es función. Fuente - Autores

Figura 5. Red Conceptual elaborada con el programa de análisis cualitativo ATLAS.ti. Fuente - Autores

A partir de la red construida se puede inferir que los estudiantes tienen claro qué es una función de dos variables, pero para argumentar su respuesta como era lo pedido, dentro de los sistemas de representación semiótica, prefieren en su orden: el lenguaje usual, la representación gráfica, la representación algebraica y por último la representación tabular. Además, dentro de los procesos de pensamiento matemático la argumentación es el predominante, y que procesos como la conjeturación y la formalización son escasos.

Para la pregunta iii del literal A, y la pregunta i del literal B ambas direccionadas a construcciones en GeoGebra se pudo destacar que todos los estudiantes realizaron la Animación de superficies de nivel y un 87,5% de los estudiantes la Animación de curvas de nivel. Durante la socialización de acuerdo a las comunidades de práctica, expresaron que a diferencia de lo que percibieron en el salón de clase cuando se desarrolló la temática analíticamente, las superficies de nivel resultaron más fáciles de construir que las curvas de nivel. En la Figura 5 y en la Figura 6 se pueden ver las construcciones concluidas de uno de los grupos.

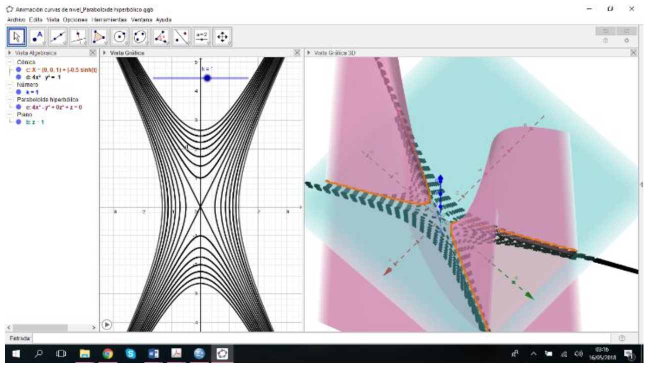

Figura 5. Construcción de los estudiantes “Animación de curvas de nivel”

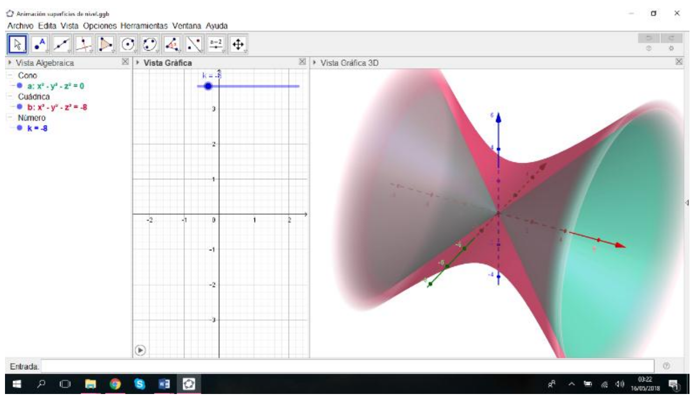

Figura 6. Construcción de los estudiantes “Animación de superficies de nivel”

Conclusiones

1. La integración en el taller de los diferentes registros de representación semiótica, la teoría de resolución de problemas y la visualización, propician el aprendizaje de las superficies cuádricas y sus elementos a partir de exploraciones algebraicas y gráficas con mediación tecnológica, de una forma diferente a la usual.
2. La visualización en el proceso de estudio y de aprendizaje de las superficies cuádricas, alcanza el nivel de visualización dinámica cuando se permite la interacción del estudiante con la tecnología, construyendo dibujos dinámicos en GeoGebra.
3. Se proporciona el espacio apropiado para que los estudiantes fortalecieran la generalización, cuando se expresaban las familias de curvas y de superficies de nivel pedidas en la guía.
4. Los estudiantes presentaron los argumentos de que la superficie si era función, a partir de

los cuatro sistemas de representación semiótica. En este proceso se muestra una buena comprensión en el tránsito de la representación gráfica al lenguaje usual.

5. La motivación y dominio en las construcciones en el programa GeoGebra se pudieron constatar, al observar que, en la vista gráfica, los estudiantes escribieron los nombres de los lugares geométricos y las restricciones para k, además de personalizaciones en diferentes colores.
6. Es escasa la percepción que tienen los estudiantes de la cuarta dimensión, cuando se trabaja con funciones de tres variables.
7. Los referentes teóricos para la construcción del taller: resolución de problemas, visualización, uso de las tecnologías y comunidades prácticas de Wenger, y su integración en este, permite el aprendizaje de curvas y superficies de nivel para generalizar familias de secciones cónicas y de superficies cuádricas.

Referencias bibliográficas

Anido, M., López, R. y Rubio, H. (2006). Las Supersuperficies Cuádricas en el Aprendizaje de la Geometría*.* Argentina: Universidad Nacional de Rosario.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. En *Educational studies in mathematics* (Vol. 52, págs. 215-241). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1).

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (Sexta ed.). México: Mc Graw Hill.

Krulik, S. y Rudnick, J. A. (1987). Problem solving: A handbook for teachers. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Lim, C. P. (2007). Effective integration of ICT in Singapore schools: Pedagogical and policy implications. *Educational Technology Research and Development*, 55 (1), 83-116.

Minerva, F. (2006). El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas.

Solís, A. (2016). Gráficas de superficies cuádricas y trazas empleando GeoGebra. Costa Rica. : Escuela de Matemática Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Cambridge: Cambridge University Press.