Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio

Juan Luna González, Oscar Ruiz Chávez, Eduardo José Loera Ochoa, José Valente Barrón López, María Concepción Salazar Álvarez

Departamento de Física y Matemáticas del Instituto de Ingeniería y Tecnología.
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

RESUMEN

El presente artículo expone, en términos generales, la problemática que envuelve la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, referenciado en las investigaciones publicadas en el área de Matemática Educativa. En la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada y la definición de variación encontramos una serie de obstáculos para lograr su comprensión y aplicación. Esto hace necesaria la búsqueda de nuevas estrategias didácticas que contribuyan a que los estudiantes logren conocimientos significativos. En este trabajo presentamos una propuesta de un problema tipo que puede ser reproducido en un experimento de laboratorio y que muestra tener un potencial didáctico importante, dado que puede fomentar el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas de tal manera que propicie en el estudiante, la percepción de que los problemas presentados en clase, no son productos prefabricados cuyo trabajo sobre ellos culmina al encontrar la solución, sino que, al contrario, es posible la búsqueda de más variantes que contribuyan a refinar las situaciones planteadas en clase (Ruiz, 2012).

Palabras clave: Derivada, Estrategias didácticas, APOE.

INTRODUCCIÓN

En base a nuestra experiencia como docentes dentro de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ), hemos detectado que los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial no tienen una idea clara del concepto de derivada expresada como una razón de cambio o variación. Las causas más comunes podrían ser:

a) El discurso tradicional del docente. Enseñar la derivada como un proceso algorítmico o de aplicación de fórmulas.

b) El tratamiento que se da en los libros de texto del concepto sin darle una significación práctica en problemas físicos o de aplicación real en los campos de la ingeniería.

Lo anterior nos preocupa y por tal motivo nos dimos a la tarea de realizar una investigación en donde se involucran experimentos de simple realización sobre fenómenos físicos, en los cuales se pueda observar un cambio cuantificable. Esto con la intensión de buscar el proceso cognitivo donde el estudiante pueda asociar esos cambios con el concepto empírico de la derivada de una función, haciendo hincapié en que el objeto de estudio no es tanto el concepto de derivada, el experimento o la razón de cambio sino la forma en que el estudiante lo interpreta en un contexto físico.

En este proceso es que nos surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cómo favorece a los estudiantes de cálculo diferencial la experimentación física para comprender la derivada como una cuantificadora de la variación instantánea?

- ¿Cómo influye el interactuar en una situación no tradicional para lograrlo?

Para nuestra investigación recopilamos algunos experimentos de fenómenos físicos, en los cuales se presentan a los estudiantes los resultados obtenidos como una simple información y, posteriormente se realizan los experimentos en presencia de los alumnos, analizando en cada caso la interpretación que éstos le den, con el fin de saber si reconocen la variación instantánea como el concepto de derivada.

Creemos que en estudiantes de nivel superior es de suma importancia que éstos pasen de un nivel de conocimiento a otro o de un contexto a otro, en este caso del físico al matemático y viceversa.

En esta investigación trataremos de analizar el concepto de variación o razón de cambio desde un aspecto cognitivo con estudiantes del Instituto de Ingeniería y Tecnología (IIT) de la UACJ.

LA PROBLEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Para realizar esta investigación nos apoyamos en una teoría cognitiva conocida como APOE. Esta teoría maneja los niveles de cognición: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y está fundamentada en la epistemología genética de Piaget y fue elaborada de manera inicial por Ed Dubinsky.

En relación a nuestro problema de investigación, Cantoral y Molina (2005) nos dicen que antes de intentar acotar el sentido del término ‘variacional’ debemos dejar clara la diferencia que percibimos entre cambio y variación: La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado.

Sobre nuestro problema en particular Contreras et al. (2000) comentan que uno de los fenómenos didácticos característicos de la enseñanza del análisis matemático es la “algebrización del cálculo diferencial” que reduce el concepto derivada a las operaciones algebraicas y trata de forma simplista las ideas específicas del análisis, como la razón de cambo instantánea, obstaculizando la construcción de una comprensión compleja de la derivada.

En este mismo sentido, Contreras (2000) plantea que la enseñanza del Cálculo ha sido, a veces, una ampliación de métodos algebraicos y no un estudio de la matemática del cambio, Contreras considera fundamental identificar concepciones de la derivada tales como: concepción de razón de cambio instantáneo, concepción geométrica (asociada históricamente a la idea de pendiente de la tangente de Fermat), concepción numérica (asociada históricamente a la idea de límite de

Cauchy) y concepción algebraica (asociada al uso de los métodos algebraicos en el concepto de derivada).

Identificar las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos en general, y de la derivada en particular, ha generado trabajos de investigación que pretenden describir como se transforma y evoluciona el acercamiento al objeto matemático, la teoría APOE de Dubinsky (citado por Meel, 2003) alude a la propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva (que según Piaget, es el mecanismo mediante el cual un individuo se mueve de un nivel de comprensión a otro). La teoría APOE establece que el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.

Existen diferentes autores que han reportado resultados sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de derivada y variación.

Artigue (1995) dice que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo: algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación, sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico usado en esta investigación consiste de tres componentes ilustradas en la figura 1 y la relación entre ellos. Un estudio del crecimiento cognitivo de un individuo, tratando de aprender un concepto matemático en particular, se establece por medio de refinamientos sucesivos, mientras que el investigador realiza ciclos entre los componentes.

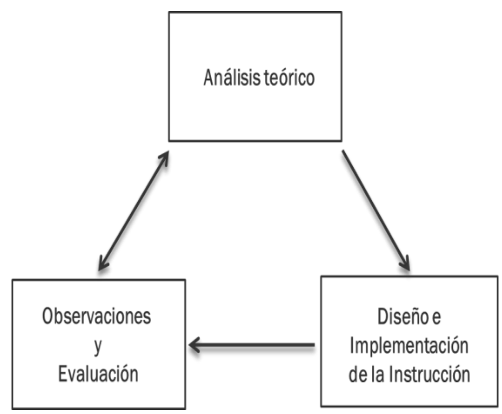


Fig. 1. Los componentes del marco teórico

La investigación comienza con un análisis teórico modelando la epistemología del concepto en cuestión: Lo que significa entender el concepto y cómo ese entendimiento puede ser construido por el alumno. Este análisis inicial marca la entrada de los investigadores en el ciclo de las componentes del marco teórico, está basado principalmente en el entendimiento de los investigadores del concepto en cuestión y sus experiencias como aprendices y maestros del concepto. El análisis teórico da forma al diseño de la instrucción. La implementación de la instrucción, proporciona una oportunidad para reunir datos y para reconsiderar el análisis teórico inicial. El resultado bien puede ser una revisión del análisis teórico el cual entonces, fundamenta la siguiente iteración del estudio. Esta iteración inicia con la revisión del análisis teórico y termina con una futura revisión o un entendimiento más profundo de la epistemología del concepto en cuestión, el cual puede fundamentar la repetición de otro ciclo. Estas repeticiones se realizan tantas veces como parezca ser necesario para alcanzar la estabilidad en el entendimiento de los investigadores sobre la epistemología del concepto.

El propósito del análisis teórico de un concepto es proponer un modelo de cognición. Esto es, una descripción de la construcción mental especifica que un estudiante podría hacer para desarrollar su propio entendimiento del concepto.

Nos referiremos al resultado de este análisis como una descomposición genética del concepto, o sea, un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales podrían describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo.

LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

En relación a las concepciones que tienen la mayoría de los estudiantes sobre la derivada éstas están centradas en procesos operativos y mnemotécnicos, con el fin de resignificar el concepto de derivada, nos proponemos describir el conjunto de construcciones mentales que el estudiante debe de generar para lograrlo, éstas en torno a la idea de variación.

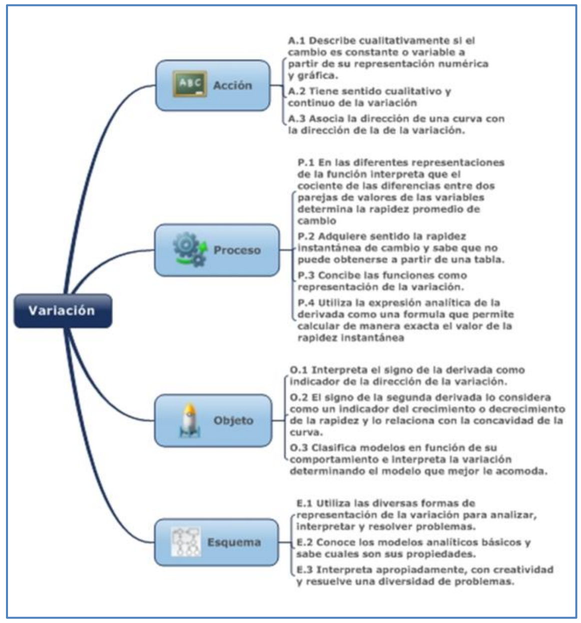


Fig. 2. Descomposición genética del concepto de variación

Estos procesos cognoscitivos que se pretenden provocar en los estudiantes requieren que ya se haya trabajado con técnicas y métodos de diferenciación así como con la significación de la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN

En nuestros estudios reunimos datos usando tres tipos de instrumentos: preguntas y respuestas escritas en forma de exámenes en el curso o un conjunto de preguntas especialmente diseñadas; entrevistas a profundidad de los estudiantes acerca de las cuestiones matemáticas en estudio; y una combinación de instrumentos escritos y entrevistas. Para efecto del análisis de datos, todos nuestros datos se agregan cruzando el conjunto de los estudiantes que participaron en el estudio.

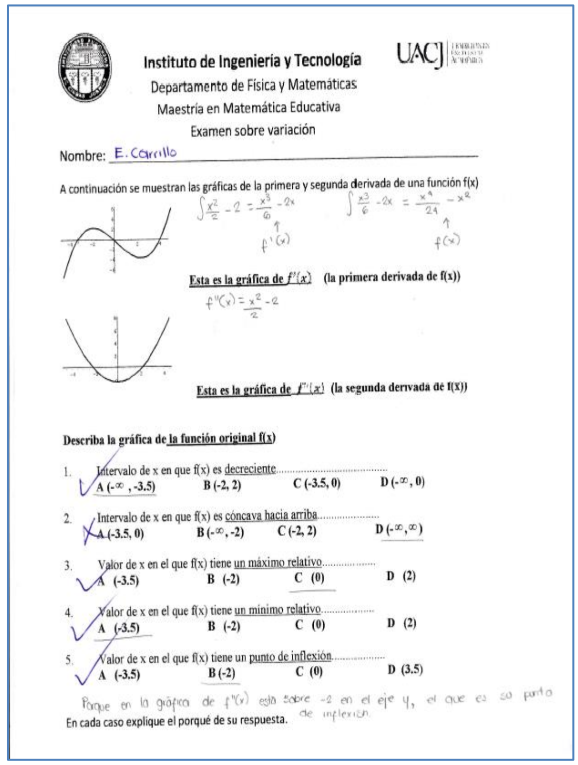
Los instrumentos escritos contienen preguntas bastante estándar sobre el contenido matemático y son analizados en formas relativamente tradicionales. Calificamos las respuestas en escalas apropiadas que van desde incorrecto hasta correcto con créditos parciales intermedios, y luego se contabilizan las puntuaciones. Cuando sea apropiado listamos los puntos específicos (tanto correctos e incorrectos) en las respuestas de todos los estudiantes y recopilamos esos puntos. Esta información nos dice sobre lo que el estudiante puede o no estar aprendiendo y también sobre sus posibles construcciones mentales.

En una encuesta realizada en el transcurso del semestre Enero-Junio de 2012 con estudiantes de ingeniería que estaban cursando la materia de Cálculo II y Cálculo III (estudiantes que ya han acreditado el curso de Cálculo Diferencial) en el IIT de la UACJ realizada para explorar la concepción que éstos tienen respecto a variación, se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 1.

Tabla 1. Resultados de la encuesta sobre el concepto de variación.

Concepto de variación	Porcentaje
Cuando dos cantidades son interdependientes, los cambios en el valor de una tendrán un efecto predecible sobre el valor de la otra.	32 %
Relación entre dos variables de manera que los valores de ambas variables aumentan o disminuyen al mismo tiempo a una razón constante.	35 %
Modificación, cambio y transformación.	25 %
Diversidad.	4 %
Una variable como función de otra.	4 %

Con el fin de saber la concepción que los estudiantes de las diferentes ingenierías en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez tienen, referente a la derivada y al concepto de variación se les aplicó el siguiente cuestionario a 48 estudiantes que cursaban las materias de Cálculo II (cálculo integral) y Análisis Vectorial.


Instituto de Ingeniería y Tecnología
Departamento de Física y Matemáticas
Maestría en Matemática Educativa
Examen sobre variación

Nombre: E. Carrillo

A continuación se muestran las gráficas de la primera y segunda derivada de una función f(x)

$\int \frac{x^2}{2} - 2 = \frac{x^3}{6} - 2x$ ← f'(x)

$\int \frac{x^3}{6} - 2x = \frac{x^4}{24} - x^2$ ← f(x)

Esta es la gráfica de $f'(x)$ (la primera derivada de f(x))

$f''(x) = \frac{x^2}{2} - 2$

Esta es la gráfica de $f''(x)$ (la segunda derivada de f(x))

Describa la gráfica de la función original f(x)

1. Intervalo de x en que f(x) es decreciente...
A (-∞, -3.5) B (-2, 2) C (-3.5, 0) D (-∞, 0)
2. Intervalo de x en que f(x) es cóncava hacia arriba...
A (-3.5, 0) B (-∞, -2) C (-2, 2) D (-∞, ∞)
3. Valor de x en el que f(x) tiene un máximo relativo...
A (-3.5) B (-2) C (0) D (2)
4. Valor de x en el que f(x) tiene un mínimo relativo...
A (-3.5) B (-2) C (0) D (2)
5. Valor de x en el que f(x) tiene un punto de inflexión...
A (-3.5) B (-2) C (0) D (3.5)

Porque en la gráfica de f''(x) está sobre -2 en el eje y, el que es su punto de inflexión

En cada caso explique el porqué de su respuesta.

Fig. 3. Muestra del cuestionario sobre variación.

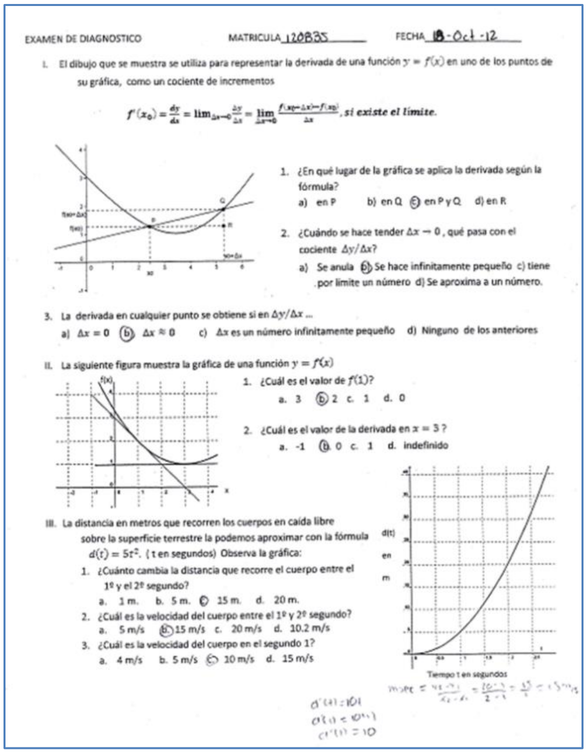
Los resultados del cuestionario se muestran en la tabla. Donde se puede apreciar las respuestas de los estudiantes a cada una de las preguntas. El instrumento escrito se administra al total de la población y las respuestas se utilizan en la elaboración de las preguntas de la entrevista.

Tabla 2. Resultados del cuestionario.

Preguntas	Opciones	No. de estudiantes	% Porcentaje
1) Intervalo de x en que f(x) es decreciente	A (∞,-3.5) *	20	42
	B (-2,2)	6	12.5
	C (-3.5,0)	7	14.6
	D (-∞,0)	12	25
2) Intervalo de x en que f(x) es cóncava hacia arriba	A (-3.5,0)	7	14.6
	B (-∞,-2) *	13	27
	C (-2,2)	11	23
	D (-∞,∞)	16	33.3
3) Valor de x en el que f(x) tiene un máximo relativo	A (-3.5)	2	4.2
	B (-2)	7	14.6
	C (0) *	21	44
	D (2)	13	27
4) Valor de x en el que f(x) tiene un mínimo relativo	A (-3.5) *	16	33.3
	B (-2)	17	35.4
	C (0)	5	10.4
	D (2)	6	12.5
5) Valor de x en el que f(x) tiene un punto de inflexión	A (-3.5)	4	8.3
	B (-2) *	11	22.9
	C (0)	30	62.5
	D (2)	2	4.2
***Respuesta correcta**			

Aquí se muestra la situación de aprendizaje que se implementó con estudiantes que cursaban la materia de Cálculo I (cálculo diferencial) a finales del semestre agosto-diciembre de 2012, cuando éstos ya habían visto funciones (unidad I), la derivada (unidad II), métodos de diferenciación (unidad III) y estaban iniciando la unidad IV que incluye aplicaciones de la derivada.

El cuestionario fue diseñado en función del objetivo fundamental de la investigación, propiciar que los estudiantes pusieran en juego sus ideas acerca de la derivada. Para ello se diseñaron 8 preguntas que, para darles respuestas correctas, es necesario poner en juego alguna o algunas ideas básicas que subyacen en el concepto de derivada. Estas ideas básicas están directamente relacionadas con la cuantificación de la variación por medio de las diferencias, con la cuantificación relativa de la variación por medio de la velocidad media, con la idea de límite del cociente incremental, con las pendientes de tangentes y con la velocidad instantánea. Las preguntas no se plantearon para dar respuestas abiertas, sino que se propusieron opciones en las cuales se incluyen (además de las que responden correctamente a cada pregunta) algunas posibles respuestas que esperábamos de los estudiantes, las respuestas esperadas fueron diseñadas tomando en cuenta las dificultades ligadas a los obstáculos epistemológicos y las confusiones frecuentes en que incurren los estudiantes cuando intentan entender los conceptos básicos del cálculo.



EXAMEN DE DIAGNOSTICO MATRICULA 120835 FECHA 18-Oct-12

I. El dibujo que se muestra se utiliza para representar la derivada de una función $y = f(x)$ en uno de los puntos de su gráfica, como un cociente de incrementos

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \textit{ si existe el límite.}$$

1. ¿En qué lugar de la gráfica se aplica la derivada según la fórmula?
   a) en P b) en Q c) en P y Q d) en R
2. ¿Cuándo se hace tender $\Delta x \to 0$, qué pasa con el cociente $\Delta y/\Delta x$?
   a) Se anula b) Se hace infinitamente pequeño c) tiene por limite un número d) Se aproxima a un número.
3. La derivada en cualquier punto se obtiene si en $\Delta y/\Delta x$ ...
   a) $\Delta x = 0$ b) $\Delta x \approx 0$ c) Δx es un número infinitamente pequeño d) Ninguno de los anteriores

II. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $y = f(x)$

1. ¿Cuál es el valor de $f(1)$?
   a. 3 b. 2 c. 1 d. 0
2. ¿Cuál es el valor de la derivada en $x = 3$?
   a. -1 b. 0 c. 1 d. indefinido

III. La distancia en metros que recorren los cuerpos en caída libre sobre la superficie terrestre la podemos aproximar con la fórmula $d(t) = 5t^2$. (t en segundos) Observa la gráfica:

1. ¿Cuánto cambia la distancia que recorre el cuerpo entre el 1º y el 2º segundo?
   a. 1 m. b. 5 m. c. 15 m. d. 20 m.
2. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo entre el 1º y 2º segundo?
   a. 5 m/s b. 15 m/s c. 20 m/s d. 10.2 m/s
3. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo en el segundo 1?
   a. 4 m/s b. 5 m/s c. 10 m/s d. 15 m/s

Fig. 4. Muestra del examen diagnostic.

La metodología empleada en la experimentación implica la presentación de un fenómeno físico en una secuencia abierta en la cual se plantean al estudiante cuestionamientos relacionados con la identificación de variables, forma en que éstas cambian, con qué rapidez lo hacen, estimaciones y predicción de valores futuros, etc.

Con la finalidad de que el estudiante se enfrentara a una situación de variación, se programó un experimento basado en el vaciado de arena, aprovechando la cualidad de que éste, se da con rapidez constante (ver figura 5).

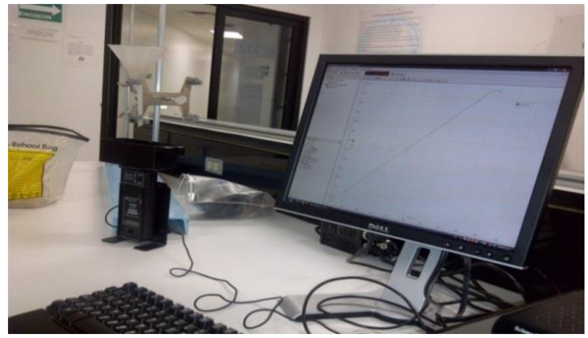


Fig. 5. Experimento con arena.

Al estudiante se le introduce a una dinámica de predicción, donde el único recurso es el uso de su antecedente matemático y la posibilidad de repetir, si es necesario, el experimento. Todo esto en el contexto de una experiencia inédita para él y sin el seguimiento de una secuencia de aprendizaje estrictamente establecida. Con un afán de sistematizar la manera de abordar y analizar el tipo de comportamiento del fenómeno de variación, se induce al estudiante al uso de recursos tecnológicos como los sensores y el DataStudio®, además de la exportación de bases de datos numéricos al Microsoft Excel® con el propósito de realizar un análisis en términos del cálculo de las primeras y segundas diferencias de las variables utilizadas (ver figura 6).

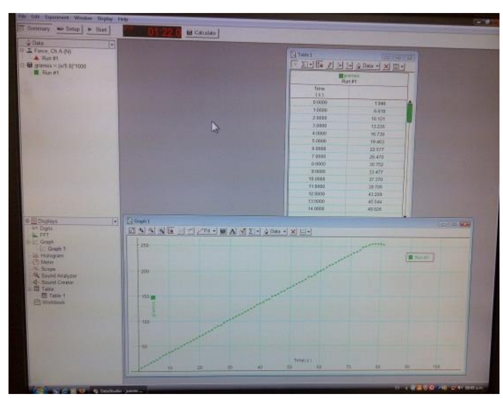


Fig. 6. Toma de datos del experimento.

Después se realizó un experimento sobre el comportamiento de la pérdida de masa de un trozo de hielo seco (CO_2) en dos condiciones; entero y parcialmente triturado, ante un fenómeno de sublimación con respecto al tiempo. Fenómeno que no corresponde a un comportamiento lineal, ni cuadrático (figura 7). La intención de este experimento era mostrar a los estudiantes, que no todos los fenómenos necesariamente deben caer en comportamientos del tipo polinomial. Se tuvo que recurrir a una hoja de cálculo para observar el comportamiento del fenómeno el cual presenta una tendencia exponencial. En la figura 8 se muestra la recolección de datos con el sensor en el DataStudio®.

Fig. 7. Experimento con hielo seco (CO_2).

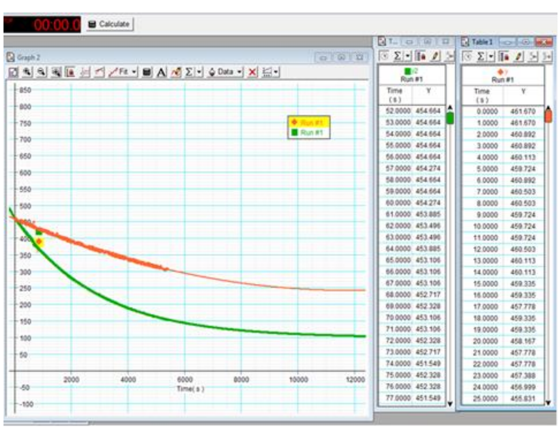


Fig. 8. Toma de datos del experimento.

Después de determinar los criterios que deben cumplirse para alcanzar el nivel cognitivo (Tabla 3) y haber terminado los experimentos en el laboratorio de física realizamos algunas actividades extra clase, tales como, proporcionar a los estudiantes una tabla con los datos obtenidos en el laboratorio de la práctica de pérdida de masa del hielo seco (CO_2) para que éstos, en equipo y como tarea, trabajaran de manera tradicional para reforzar las actividades realizadas en el salón de clases. El propósito de los ejercicios es reforzar las ideas que los estudiantes han construido, usar las matemáticas que han aprendido y, en ocasiones, comenzar a pensar en situaciones que se estudiarán más adelante en sus diferentes carreras. En la figura 9 se muestran alguna de las actividades de extra clase.

Tabla 3. Criterios utilizados para definir el nivel cognitivo.

Nivel Cognitivo	**Criterios**
Acción	Asocia la dirección de una curva con la dirección de la variación
Proceso	Adquiere sentido la rapidez instantánea de cambio y sabe que no puede obtenerse a partir de una tabla
Objeto	Interpreta el signo de la derivada como indicador de la dirección de la variación.
Esquema	Utiliza las diversas formas de representación de la variación para analizar, interpretar y resolver problemas

CONCLUSIONES

Haciendo un análisis de los resultados obtenidos, podemos apreciar que en la implementación de la instrucción ya rediseñada se logra en todos los estudiantes, las concepciones de Acción y Proceso del concepto de la derivada como una cuantificación de la variación instantánea, solo un estudiante no logra la concepción de Objeto y otro no logra la concepción de Esquema.

Se puede observar congruencia en los resultados obtenidos ya que todos los estudiantes muestran consistencia al construir primero la concepción de Acción y Proceso antes de la concepción de Objeto y Esquema y solo un estudiante muestra una inconsistencia ya que logra construir la concepción de Esquema sin construir la concepción de Objeto.

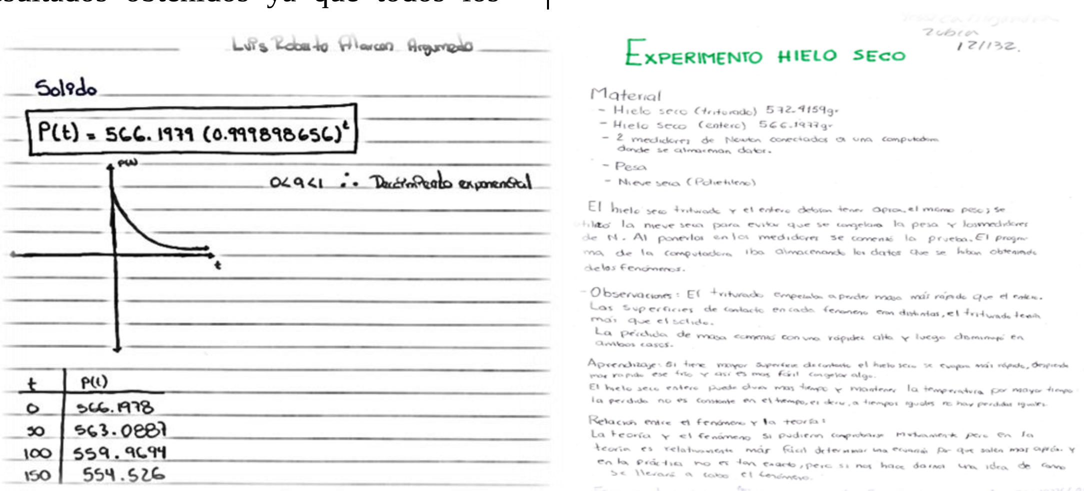
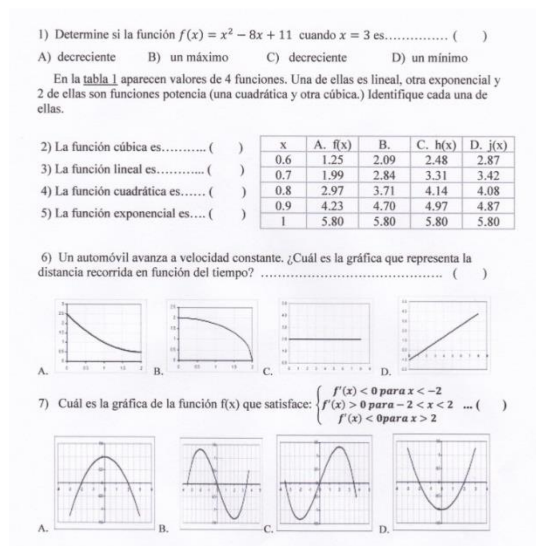


Fig. 9. Actividades de extra clase.

Por la experiencia vivida en esta investigación y los resultados obtenidos en la misma se hace la sugerencia de la introducción en el discurso de la matemática escolar el estudio de la variación como una perspectiva de la derivada y su aplicación en la solución de problemas como un adelanto a lo que se presentará en sus respectivas carreras.

Definimos el nuevo cuestionario, mismo que nos ayudará a evaluar el concepto en cuestión, se muestra a continuación en la figura 10.



1) Determine si la función $f(x) = x^2 - 8x + 11$ cuando $x = 3$ es............... (   )

A) decreciente   B) un máximo   C) decreciente   D) un mínimo

En la tabla 1 aparecen valores de 4 funciones. Una de ellas es lineal, otra exponencial y 2 de ellas son funciones potencia (una cuadrática y otra cúbica.) Identifique cada una de ellas.

2) La función cúbica es........... (   )
3) La función lineal es............ (   )
4) La función cuadrática es...... (   )
5) La función exponencial es.... (   )

x	A. f(x)	B.	C. h(x)	D. j(x)
0.6	1.25	2.09	2.48	2.87
0.7	1.99	2.84	3.31	3.42
0.8	2.97	3.71	4.14	4.08
0.9	4.23	4.70	4.97	4.87
1	5.80	5.80	5.80	5.80

6) Un automóvil avanza a velocidad constante. ¿Cuál es la gráfica que representa la distancia recorrida en función del tiempo? .... (   )

A.   B.   C.   D.

7) Cuál es la gráfica de la función f(x) que satisface: $\begin{cases} f'(x) < 0\ para\ x < -2 \\ f'(x) > 0\ para\ -2 < x < 2 \\ f'(x) < 0\ para\ x > 2 \end{cases}$ ... (   )

A.   B.   C.   D.

Fig. 10. Nuevo cuestionario.

En la tabla 4 se muestra un resumen de los resultados con los niveles de cognición.

Tabla 4. Resumen de los resultados

Estudiante	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Luis Ángel	☺	☺	☺	✗
Luis Roberto	☺	☺	✗	☺
Mario Enrique	☺	☺	☺	☺
Luis Ary	☺	☺	☺	☺
Jessica	☺	☺	☺	☺

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México: "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica

Asiala, M. Cottrill, J. Dubinsky, E. Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. Journal of Mathematical Behavior 16 (4), 399-431.

Ávila Godoy R. (2000). Un estudio sobre la variación. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Barrón, V. Luna, J. Estrada, J. Flores, S. Estrada, F. Ramos, M. (2009). La Ecuación de la Línea Recta en la Modelación de Fenómenos Físicos. CULCyT, Año 6, No 31.

Cantoral, R. Molina, J.M. Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.18, 463 – 468.

Contreras, A. et al. (2000). Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de Bachillerato-Logse. IX congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES". San Fernando (Cádiz).

Contreras, A. (2000), La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión, IV Simposio de la SEIEM, Huelva.

Cottrill, J. Dubinsky. E. Nichols. D. Schwingendorf, K. Thomas, K. Vitfakovic, D. (1996). Uticlerstanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. Journal of Mathematical Behavior. 15. 167-192.

Fernández, H.C. (2010). Un Estudio Cognitivo Sobre la Integral desde la Perspectiva de la Acumulación Empleando la Teoría APOE. Tesis no publicada. Universidad Autónoma de Cd. Juárez.

Luna, J. (1997). La geometría analítica a través de modelos físicos. Tesis para obtener el grado de maestro en matemática educativa, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Mathematics 14, Núm. 3, pp. 235-250, 1983.

Meel, D. (2003, Julio). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. Relime Vol. 6, No. 3, 221-271.

Ruiz Chávez O. Luna González J. Salazar Álvarez M.C. (2012). Cocientes de diferencias y algebra lineal para modelar problemas de variación en funciones de 2 variables utilizando Microsoft Excel. CULCyT Año 9, No 47.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto). Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-Matamoros García, G. García Blanco, M. Llinares Ciscar, S. (2006). El Desarrollo del Esquema de la Derivada, Investigación Didáctica, Estudio de las Ciencias. 24(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., M. García., y S. Llinares. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 267-296.