

Estudio socioepistemológico de la división de números fraccionarios

Rosalinda García Macías, Arcelia Gaspar De Alba

Departamento de Física y Matemáticas del Instituto de Ingeniería y Tecnología.
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de una investigación inspirada en la problemática que se genera en torno a la concepción de la *división de números fraccionarios* derivada de los distintos significados que le son asociados al objeto matemático, basada en un acercamiento socioepistemológico analizando las cuatro componentes de este marco teórico con el propósito de integrar los resultados y sugerir posibles alternativas de solución.

Palabras clave: División de fracciones, Concepción, Socioepistemología, Significados.

PROBLEMÁTICA

En nuestra experiencia, hemos observado que un gran número de alumnos muestran dificultad con el aprendizaje de la división con números fraccionarios. Es interesante observar el lenguaje corporal y facial de los estudiantes al momento de estar resolviendo las operaciones, porque aunque en la mayoría de los casos las realizan correctamente, la expresión de sus caras es de duda e incertidumbre. Saben que el procedimiento que utilizan para realizar la operación es correcto, pero no pueden interpretar de una manera clara y concreta ese resultado que están obteniendo, y como consecuencia, la mayoría de los estudiantes construyen un aprendizaje memorístico temporal con el único objetivo de pasar las unidades o acreditar la materia.

Por lo anterior, creemos que la división es la operación aritmética que representa mayor dificultad para los estudiantes, específicamente la división con números fraccionarios. Por lo general la enseñanza comienza y termina con el algoritmo de invertir y multiplicar sin

utilizar ningún modelo que sustente los resultados de los algoritmos.

En base a esta problemática generamos la siguiente pregunta: ¿Por qué es tan difícil dar un significado lógico-matemático y un contexto físico a la división de números fraccionarios?

LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

El problema de investigación se aborda desde un enfoque socioepistemológico, donde el objetivo principal es encontrar cual fue la actividad o actividades humanas en tiempos remotos que producen este conocimiento, con el fin de asociarle significados al mismo, ya que pensamos que esta problemática puede ser generada en base a los distintos significados que pueda presentar el concepto matemático (Fig. 1):

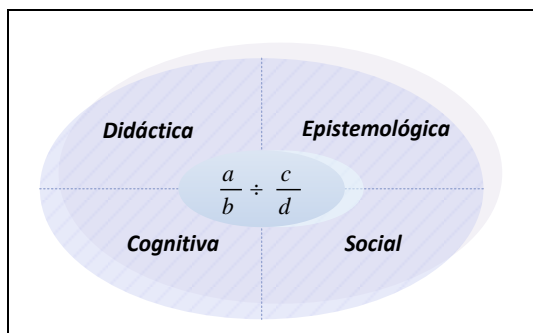


Fig. 1. Aproximación Socioepistemológica de la división de números fraccionarios

Una vez identificadas las situaciones problema en las cuales surgió este conocimiento y por medio de las cuales se le asocian significados al objeto matemático, se realiza el análisis didáctico con el propósito de indagar cuales de esos significados encontrados son utilizados por los libros de texto al momento de abordar la división de números fraccionarios por primera vez.

Por último, se lleva a cabo un análisis cognitivo con el objeto de averiguar cuáles de esos significados encontrados utilizan los estudiantes para resolver los problemas de división de fracciones y tratar de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

ANTECEDENTES

El proceso de la enseñanza-aprendizaje de las operaciones con números fraccionarios en general, es uno de los más estudiados desde el comienzo de la investigación en Matemática Educativa, ya que siempre ha representado una de las áreas en el currículo matemático con más fallas en las escuelas de todo el mundo (Fandiño, 2007).

En la dimensión epistemológica, generalmente las investigaciones del surgimiento de la fracción y sus operaciones se encuentran sólo dentro del contexto algebraico (Contreras, s.f.; Puig, 2006; Stewart, 2008) y carecen de explicaciones acerca del significado que tuvo este concepto al momento de su nacimiento en la antigüedad.

Por otro lado, Freudenthal dijo que la división en general se le pueden asociar varios significados entre los cuales se encuentran la repartición, partición-repartición, medida, agrupamiento, velocidad, área, volumen, etc. (Fischbein et al., 1985) y según algunos diccionarios de uso común (Wikipedia, 2011; Wordreference, 2011; Definicion.de, 2011), sólo el significado de medida.

Para el caso específico de la división de dos números fraccionarios no se encuentran investigaciones que mencionen explícitamente los significados que se le puedan asociar, sólo se mencionan los significados que se le pueden asociar a la división en general.

En el plano cognitivo, específicamente para la división de números fraccionario $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)$, la mayoría de las investigaciones están enfocadas principalmente en estudiantes de educación primaria y secundaria, en docentes en formación e incluso en docentes en servicio de estos niveles de educación.

Las investigaciones realizadas tanto en docentes en formación, como en docentes en servicio coinciden en que la mayoría de ellos pueden resolver correctamente la división con los números fraccionarios pero

no pueden explicar porque este procedimiento funciona, ni pueden utilizar ninguna otra alternativa para el algoritmo de “invertir y multiplicar”; por lo que mencionan que no poseen un conocimiento conceptual de este objeto matemático, lo único que poseen es el conocimiento procedimental; es decir, sólo saben aplicar las reglas de los algoritmos para resolver los problemas que les son requeridos (Kyriakides, 2004; Nillas, 2003; Rule y Hallagan, 2006).

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

En nuestra investigación, la intención no fue buscar las relaciones algebraicas que justifican las operaciones de la división de números fraccionarios. Pretendemos encontrar cuales son los significados que le pueden ser asociados en la vida real para poder realizar una revisión de los libros de texto y hacer un análisis cognitivo en base a estos significados y encontrar posibles respuestas a la problemática presentada anteriormente.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y SOCIAL

En este análisis se presentan dos significados que le pueden ser asociados a la división de fracciones.

Significado de partición

Este significado surge con las necesidades primarias y elementales del ser humano como la repartición igualitaria de alimentos entre cierto número de personas; como ejemplo, Gairín (2001) en su investigación desde el Recto del Papiro de Rhind, simula las condiciones de trabajo de los escribas para obtener información acerca del significado que tenían las fracciones para

los egipcios, utilizando situaciones de reparto y resolviendo el siguiente problema:

Se tienen que repartir dos bizcochos entre cinco personas de modo que cada una reciba la misma cantidad de bizcocho, ¿cuánto bizcocho le corresponde a cada persona?

Es lógico que a cada una de las cinco personas no se le pueda dar un bizcocho entero, por lo tanto, sólo le corresponderá una parte de un bizcocho y habrá que fraccionar cada uno de los bizcochos en un número entero de partes iguales de modo que se le pueda dar una de esas partes a cada persona; Gairín (2001) procede de la siguiente forma: en un primer acercamiento, divide cada bizcocho en dos partes iguales con lo que obtiene cuatro partes y no tiene suficientes partes para las cinco personas; en una segunda aproximación a la solución del problema, divide en tres partes iguales cada bizcocho obteniendo seis partes con lo que ya puede entregar a cada una de las cinco personas una de esas partes y sobrará una de ellas.

Esta parte de bizcocho sobrante se divide en cinco partes iguales y a su vez se reparten entre las cinco personas y se termina con el reparto (Fig. 2).



Fig. 2. Repartición de dos bizcochos

Este procedimiento lleva a Gairín (2001) a obtener el resultado del reparto de dos unidades entre cinco personas en la forma:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

En esta simulación de *Gairín (2001)* durante el proceso de repartición se observa la necesidad de dividir una cantidad fraccionaria entre un número natural; *es aquí donde suponemos nace de manera implícita la división de números fraccionarios y al mismo tiempo un significado para esta operación, la partición-repartición.*

Significado de medición

Asumimos que la operación aritmética de la división surge simultáneamente con la actividad humana de la comparación de objetos para satisfacer las necesidades diarias del hombre primitivo en tiempos remotos; esto hacia el 5000 a. C. donde la civilización china ya utilizaba como medidas, la longitud, volumen y peso (*History of Metrology, 2001*).

Como ejemplo, para comparar las magnitudes primarias, las más simples y elementales, como la longitud, hace falta un objeto de referencia y el objeto que se quiere relacionar por medio de la comparación, naciendo de esta forma el concepto de medición. Dicho de otro modo, ¿cuántas unidades de medida caben en un objeto motivo de análisis?

La división, utilizando el significado de medición, podría ser la estatura de una persona, usando como unidad de referencia o medida el pie (Fig. 3).

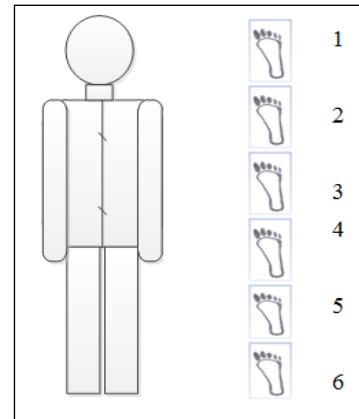


Fig. 3. estatura de persona

Como podemos observar, el hombre mide aproximadamente seis pies, o dicho de otra forma, caben seis pies en la longitud o estatura de la persona.

La medición de longitud, en este caso la estatura de una persona utilizando como unidad de referencia el pie, la podemos expresar por medio del concepto matemático de la división (Fig. 4).

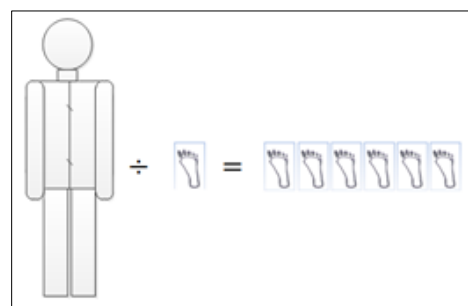


Fig. 4. División como medida

En este modelo de la medición de estatura de una persona se utiliza de manera implícita el concepto de división matemática.

Al igual que en el modelo de *Gairín (2001)*, en la simulación anterior, asumimos surge el concepto matemático de la división y a su vez otro significado para la división de números fraccionarios, la medición.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Este análisis se realiza con el objetivo de investigar si la división de números fraccionarios es abordada por medio de los significados encontrados anteriormente.

El programa de estudios 2006 para la asignatura de matemáticas en la Educación Secundaria en México, aborda el tema de las operaciones con números fraccionarios sólo en primer grado y menciona que en lo que respecta a la multiplicación y división de los mismos es un contenido nuevo para los alumnos, puesto que esto no se incluye en los programas de educación primaria.

El currículo menciona que los problemas que involucran divisiones se ubican sólo en el contexto de proporcionalidad.

Con el propósito de investigar si los libros de texto abordan la división de números fraccionarios en un contexto diferente al de proporcionalidad, se revisaron once libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública para el Ciclo Escolar 2009-2010. Específicamente se examinó si alguno de los libros manejaba la división de números fraccionarios en situaciones de medida y partición-repartición.

Libros de texto seleccionados:

Elegimos a *Arteaga y Sánchez (2008)* ya que es utilizado en algunas de las

escuelas secundarias de Ciudad Juárez, Chihuahua. En este libro se presenta la división de números fraccionarios sólo desde la perspectiva de la multiplicación y no se presenta ningún modelo que justifique estos procedimientos.

Al igual que en *Arteaga y Sánchez (2008)*, en *Block y García (2008)*, en *Arriaga et al. (2008)* y en *Guzmán et al. (2008)* no se presenta ningún modelo para el algoritmo de la división.

Es importante destacar que aunque en *Cabañas et al. (2008)* no se presenta ningún modelo para la división, si se realiza una distinción en la división como resultado de un reparto y en la división en contexto de medida.

En *Guillén y Soto (s.f.)* sólo se menciona que la división se puede resolver como reparto o como medida, pero no presenta ningún modelo.

En *Almaguer et al. (2008)*, en *Briseño et al. (2008)* y en *Bosch y Gómez (2009)* sólo se presenta el modelo de medida para el algoritmo de la división.

En *Treviño y Zamarrón (2009)* sólo se presenta el modelo partitivo para el algoritmo de la división.

En *Escareño y López (2008)* a diferencia de los demás, es el único que presenta los dos modelos, tanto el partitivo como el modelo de medida para el algoritmo de la división.

En resumen, más de la mitad de los libros de texto revisados no presentan ningún modelo que justifique la división de números fraccionarios; por otro lado los que si lo hacen, lo hacen privilegiando sólo el

significado de medida. Es importante señalar que sólo uno de los once libros presenta el modelo de división partitiva, al igual que sólo uno de ellos utiliza los dos modelos, tanto medida como partición para la división de números fraccionarios.

En base a esta revisión, suponemos es aquí donde podría iniciar el problema de la división con números fraccionarios ya que el concepto se aborda sólo en contexto de proporcionalidad como problemas multiplicativos.

ANÁLISIS COGNITIVO

Se diseñó un cuestionario tipo exploratorio de cuatro reactivos de división con números fraccionarios (utilizando sólo el modelo de longitud) en base a las prácticas sociales, al estado del arte y a la revisión de libros de texto; todo descrito en párrafos anteriores, utilizando los significados que le son asociados al concepto matemático en cuestión.

Con esta actividad se pretendía identificar cuáles son los significados de la división de números fraccionarios presentes en los estudiantes para resolver los problemas requeridos, así como observar si usan procedimientos distintos de los algoritmos para justificar sus respuestas.

Las producciones de los estudiantes

Presentamos algunas evidencias de los resultados encontrados en nuestro cuestionario, el cual fue aplicado a una muestra de tipo intencional, con un total de cuarenta y seis estudiantes de nivel superior en Cd. Juárez, Chih. Veintinueve de ellos son de dos grupos de la clase de “Matemáticas” de la Licenciatura en Entrenamiento Deportivo del Instituto de

Ciencias Biomédicas (ICB) de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ), la mayoría de primer semestre; los diecisiete restantes son de un grupo de “Álgebra Superior” del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la UACJ donde se mezclan alumnos de diferentes ingenierías, la mayoría también de primer semestre.

Reactivo: División partitiva

En lo que respecta la división de una fracción entre un número natural la mayoría de los ellos respondieron correctamente partiendo la fracción de recta en el número correspondiente. Sin embargo surgen algunas producciones particulares en la solución gráfica donde el razonamiento no justifica el resultado numérico (Figs. 6-8):

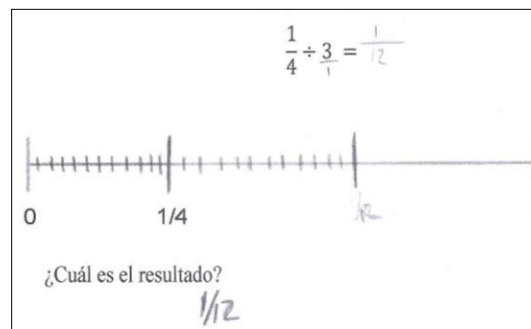


Fig. 5. Resultados de los estudiantes

En la Fig. 5 el alumno dividió cada cuarto en doce partes iguales. En la Fig. 6 el estudiante dividió cada cuarto en tres partes y a su vez, cada una de esas partes las dividió en doce partes. En la Fig. 7 el alumno realiza tres particiones a la fracción de recta.

Como era de esperarse, casi la totalidad de los estudiantes resuelven correctamente el reactivo de manera gráfica

dividiendo la fracción de recta en tres partes iguales; es decir, utilizan correctamente el significado de partición para resolver el problema.

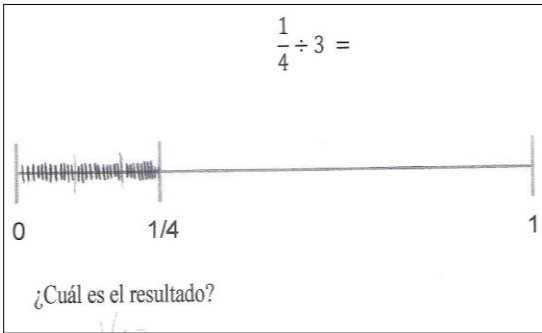


Fig. 6. Resultados de los estudiantes.

En la Fig. 6 el estudiante dividió cada cuarto en tres partes y a su vez, cada una de esas partes las dividió en doce partes.

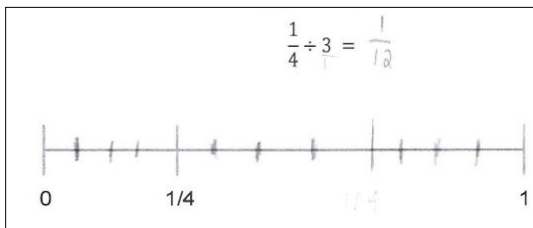


Fig. 7. Resultados de los estudiantes

En la Fig. 7 el alumno realiza tres particiones a la fracción de recta.

Como era de esperarse, casi la totalidad de los estudiantes resuelven correctamente el reactivo de manera gráfica dividiendo la fracción de recta en tres partes iguales; es decir, utilizan correctamente el significado de partición para resolver el problema.

Reactivos: División como medida

En lo que respecta la división de un número fraccionario entre un número fraccionario se observa que en la mayoría de los casos obtienen el resultado numérico correcto, pero el razonamiento que utilizan no es correcto ya que por medio de la partición intenta justificar los resultados que obtienen, en las Figs. 8-10 observamos algunos ejemplos:

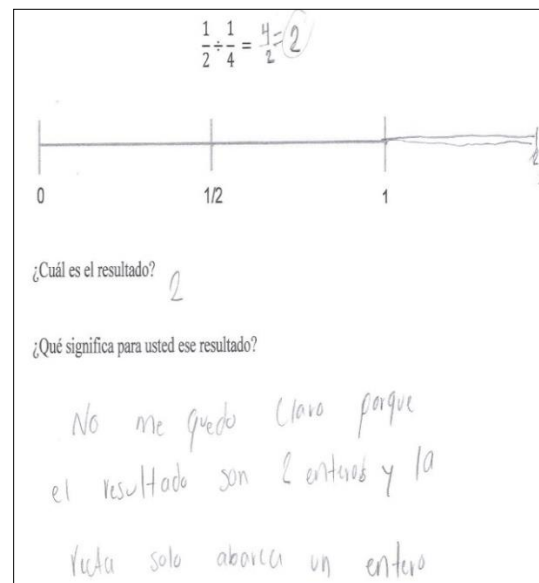


Fig. 8. Resultados de los estudiantes

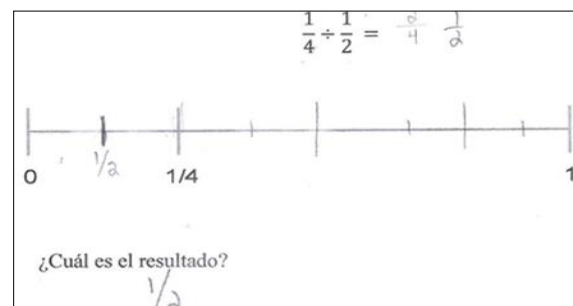


Fig. 9. Resultados de los estudiantes

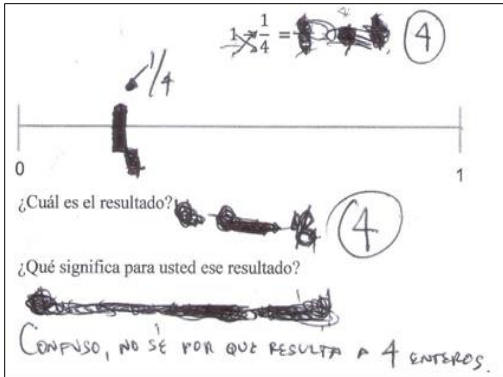


Fig. 10. Resultados de los estudiantes

Ahora estamos en posición de argumentar que algunos estudiantes probablemente no poseen una idea clara del significado de medida para la división de números fraccionarios; por lo tanto, intentan resolver los problemas por medio de la partición. Esto puede deberse probablemente a que los libros de texto presentan la división en contexto de medida con una sola cantidad, no proporcionan las dos cantidades para realizar la comparación, es ahí donde suponemos se encuentra un hueco en la división como medida.

CONCLUSIONES

Los conceptos matemáticos son flexibles y pueden presentar más de un significado describiendo una o varias situaciones diferentes dentro de nuestra realidad social.

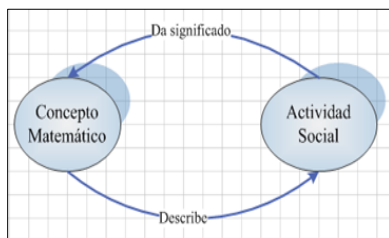


Fig. 11. Relación descripción-significado

En la Fig. 11 se muestra como el concepto describe una actividad social y como ésta a su vez, da significado al concepto matemático.

Suponemos que la división de números fraccionarios surge dentro de dos contextos totalmente diferentes en la antigüedad; uno de ellos es la necesidad de repartir los alimentos (pan, grano, aves, etc.), entre los integrantes de grupos sociales para satisfacer sus necesidades primarias; es dentro de este contexto que se identifica el significado partición-repartición. El otro contexto resulta de la comparación de objetos (longitud) donde creemos que de manera implícita surge el concepto de medición y a su vez la división con significado de medida.

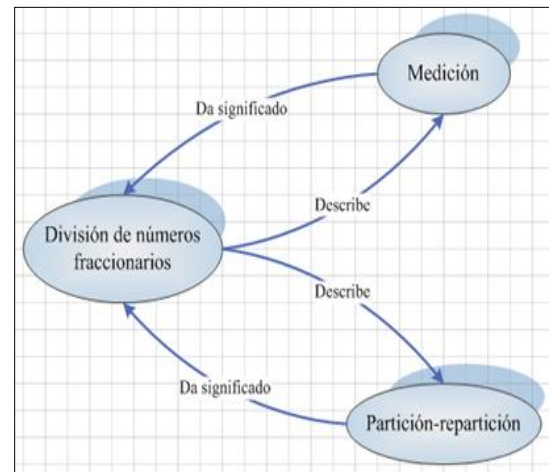


Fig. 12. Relación descripción significado

En la Fig. 12 se ilustra como la división de números fraccionarios describe tanto a la medición como a la partición-repartición, y como estas actividades proveen de significado al concepto matemático.

Por otro lado, debido a los dos significados que se le asocian a la división de números fraccionarios se observa que los estudiantes presentan dificultad a la hora de resolver problemas de división en contexto de medida, ya que buscan justificar su razonamiento utilizando el significado de partición. Dicho de otra manera, la mayoría de ellos tienden a pensar en la división, predominantemente, en términos partitivos, lo cual termina por generarles un conflicto que se ve reflejado en las respuestas que dan al cuestionario de manera gráfica, ya que por lo general, la mayoría obtienen las respuestas correctas de manera numérica. Es posible que lo anterior se deba a que en nuestra realidad social, no utilizamos explícitamente la palabra división en la solución de problemas en contexto de medida a diferencia de la solución de problemas en contexto de reparto o partición-repartición.

En lo que se refiere a los libros de texto, generalmente no presentan modelos para justificar el algoritmo de la división de números fraccionarios y aunado a esto, en la mayoría de ellos no se realiza una distinción entre el significado de partición y de medida. Presentan la división en contexto de medida con una sola cantidad, no proporcionan las dos cantidades para realizar la comparación, es ahí donde suponemos se encuentra un hueco en la división como medida y como consecuencia, intuitivamente tratamos de partir la cantidad para obtener un resultado que algunas veces puede ser correcto numéricamente pero que conceptualmente no lo es.

REFLEXIONES FINALES

Pareciera que estamos acostumbrados a analizar las cosas en una

sola dirección, ¿por qué no fomentar el análisis de los conceptos matemáticos en otras direcciones?, ¿por qué aceptar el discurso matemático escolar como algo cierto e indiscutible? Si observemos la Fig. 13 y analizamos de derecha a izquierda, ¿por qué decir que B cabe dos veces en A?, si se puede decir que B es la mitad de A.

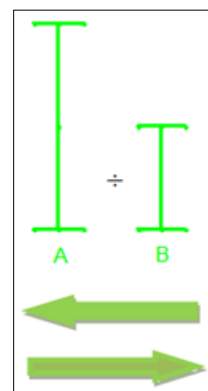


Fig. 13. División como medida

Si analizamos de izquierda a derecha, se puede decir que A es dos veces B y que A cabe a la mitad en B.

Lo que hacemos es decir que B cabe dos veces en A por convención matemática, quizás porque en la realidad estamos acostumbrados a medir lo grande con lo corto, dicho de otra forma, B cabe dos veces en A.

Resulta difícil poner en palabras los algoritmos de las matemáticas para explicarlos, pero debemos intentarlo y no sólo enseñar las reglas de los algoritmos para resolver los problemas que son requeridos.

REFERENCIAS

Almaguer, G. Cantú, F. Rodríguez, L. Rodríguez, R. (2008). Matemáticas 1. En Línea: (25 de Marzo de 2011) <http://libros.conaliteg.gob.mx/>

Arriaga, A. Benítez, M.M. Cortes, M.C. (2008). *Matemáticas 1. Introducción a las competencias*. México: Pearson Educación pp. 65-71.

Arteaga, R. Sánchez, A. (2008). *Explorando: Matemáticas 1*. México: Oxford University Press, pp. 86-91.

Block, D. y García, S. (2008). *Fractal 1: Serie Construir*. México: Ediciones SM. pp. 72-79.

Bosch, C. Gómez, C. (2006). *Encuentro con las Matemáticas. Primero de Secundaria*. Recuperado de <http://libros.conaliteg.gob.mx/>

Briseño, L. Carrasco, G. Martínez, P. Palmas, O. Struck, F. Verdugo, J. (2008). *Matemáticas 1*. México: Santillana pp. 135-141.

Cabañas, M.G. Cantoral, R. Castañeda, A. Farfán, R.M. Lezama, F.J. Martínez, G. Molina, J. G. Montiel, G. Sánchez, M. (2008). *Matemáticas 1*. México: McGraw Hill pp. 128-136.

Contreras, M. (s.f.). *La división de fracciones: Un algoritmo misterioso*. Societat D'educació Matemàtica De La Comunitat Valenciana "Al-khwarizmi", 1-14. En línea: (1 de Abril de 2011) <http://www.mauriciocontreras.es/UN%20ALGORITMO%20MISTERIOSO.pdf>

Definición de división. (s.f.). En Definicion.de. En Línea: (28 de Abril de 2011) <http://definicion.de/division/>

División (s.f.). En Wordreference.com. En Línea: (28 de Abril de 2011) <http://www.wordreference.com/definicion/division>

División matemática (s.f.). En Wikipedia, la enciclopedia libre. En Línea: (28 de Abril de 2011) http://es.wikipedia.org/wiki/Divisi%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29

Escareño, F. López, O.L. (2008). *Matemáticas 1* (3ª ed.). México: Trillas pp. 85-90.

Fandiño, M.I. (2007). *Fractions: conceptual and didactic aspects*. Bologna, Italy Acta Didactica Universitatis Comenianae 7:82-115.

Fischbein, E. Deri, M. Nello, M. Marino, M. (1985). *The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division*. Journal for research in mathematics education. 16(1): 13-17.

Gairín, J. M. (2001). Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind. LLUL, 24, 649-684.

Guillén, J. y Soto, C. A. (s.f.). *Matemáticas 1*. México: Ángeles Hermanos pp. 98-102.

Guzmán, J. Hoyos, V. Sáiz, M. Sánchez, E. A. (2008). *Matemáticas 1* (3ª ed.). Recuperado de <http://libros.conaliteg.gob.mx/>

Kyriakides, A. (2004). *Understanding Division by Fractions: An exploratory study of 7 mathematics education graduate students*. Conferencia anual de la North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Delta Chelsea Hotel, Toronto, Ontario, Canada. Abstract recuperado de http://www.pmena.org/2004/PMENA2004_3.pdf

Rule, A.C., Hallagan, J.E. (2006). *Preservice elementary teachers use drawings and make sets of materials to explain multiplication and division by fractions*. A research study presented at the 2nd Annual Preparing Mathematicians to Educate Teachers (PMET). Conferencia en Oswego, New York.

Treviño, M. Zamarrón, A.L. (2009). *Matemáticas 1*. México: McMillan pp. 104-112.

Nillas, L. (2003) *Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies* The Mathematics Educator 7(2): 96-113.

SEP (Secretaría de Educación Pública) (2006). *Programas de Estudio 2006*. Educación básica. Secundaria, Matemáticas. México.