Soto y Mosquera. 2018. Del Ferro, Tartaglia, Cardano y la solución de la ecuación cúbica. Revista Sigma, 14 (2). Pág. 14–24 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIV/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XIV №2 (2018), páginas 14–24

Del Ferro, Tartaglia, Cardano y la solución de la ecuación cúbica

Oscar Fernando Soto [1]

Saulo Mosquera López [2]

Abstract: Niels Henrik Abel, in the 19th century, demonstrated that for $n > 4$ there are no analogous formulas to that of the quadratic equation that allow the roots of the corresponding equation to be determined in terms of their coefficients. Although geometrical methods to solve the cubic equation were known since antiquity, it was in the 16th century that Del Ferro, Tartaglia and Cardano determined a formula to find the roots of a third grade equation and Ferrari found a more complex one for a four degree equation. In this informative article, a non-exhaustive historical account of the efforts made to solve this equation is given and the deduction and illustration of the formula for solving the cubic equation, known as "The Tartaglia-Cardano formula", is presented.

Keywords. Cubic equation, roots, conical, discriminating.

Resumen: Niels Henrik Abel, en el siglo XIX, demostró que para $n > 4$ no existen fórmulas análogas a la de la ecuación cuadrática que permitan determinar las raíces de la correspondiente ecuación en términos de sus coeficientes. Aunque métodos geométricos para resolver la ecuación cúbica se conocían desde la antigüedad, fue en el Siglo XVI en el que, Del Ferro, Tartaglia y Cardano, determinaron, una fórmula para hallar las raíces de una ecuación de grado tres y Ferrari encontró otra más compleja para ecuaciones de grado cuatro. En este artículo, de carácter divulgativo, se realiza un recuento histórico, no exhaustivo, de los esfuerzos realizados para resolver esta ecuación y se presenta la deducción e ilustración de la fórmula para resolver la ecuación cúbica, conocida como "La fórmula de Tartaglia-Cardano".

Palabras Clave. Ecuación cúbica, raíces, cónica, discriminante.

1. Introducción

En general, las ecuaciones de grado tres y cuatro no son objeto de estudio del currículo de enseñanza universitaria y menos del currículo de enseñanza básica; tal vez, por un lado, lo

[1] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Colombia. Email: fsoto@udenar.edu.co

[2] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Colombia. Email: samolo@udenar.edu.co

dispendioso de manipular las expresiones algebraicas involucradas en las fórmulas y lo extenuante de las combinaciones del cálculo con las posibles raíces, sean obstáculo epistemológico para su asimilación, por otro, una revisión de los estándares básicos de competencias en el área de matemáticas que consideran el estudio de las ecuaciones polinómicas permite colegir que hay un vacío en cuanto a estándares específicos que hagan alusión al estudio de esta clase de ecuaciones y finalmente, análoga consideración puede hacerse con relación a los contenidos matemáticos tratados en los textos escolares para el nivel básico.

En un intento por motivar y divulgar el estudio de las ecuaciones de grado superior a dos, en este artículo se presenta una aproximación histórica y de contenido a la solución de la ecuación polinómica de grado tres con la intención de enriquecer el bagaje académico del lector interesado en esta temática. En primera instancia se presenta un recuento histórico de algunos de los esfuerzos por resolver la ecuación cúbica desde los babilonios, en el siglo XX a. C., hasta los trabajos de Bombelli en el siglo XVI d. C. A continuación se realiza la deducción de la solución algebraica, que se conoce como, la *Fórmula de Tartaglia-Cardano*, enseguida se estudia el denominado caso irreducible y finalmente se realizan algunas consideraciones sobre el desarrollo del trabajo realizado.

2. Consideraciones históricas

Al parecer los primeros intentos para resolver una ecuación cúbica fueron desarrollados por los babilonios quienes, hacia el año 2000 a. C., utilizando tablas, en las que se podían consultar valores de sumas de la forma $n^3 + n^2$ para números naturales n desde 1 hasta 30, presentaron soluciones exactas o aproximadas de ecuaciones de la forma:

$$x^3 + x^2 = a$$

La metodología babilónica consistía en utilizar cierto tipo de transformaciones para reducir, por ejemplo, ecuaciones del tipo $x^3 + bx^2 + c = 0$, a la forma dada anteriormente, [2]. De manera explícita, en este caso, multiplicaban la ecuación por $-\frac{1}{b^3}$ y usaban las sustituciones $y = \frac{x}{b}$ y $a = -\frac{c}{b^3}$.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 = 324$ se la multiplica por $\frac{1}{27}$ para obtener la ecuación $\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 12$ que se escribe como $y^3 + y^2 = 12$ con $y = \frac{x}{3}$. Consultando las tablas se obtiene y=2 y por tanto $x = 6$ es una solución de la ecuación dada.

Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* establece algunos resultados, relativos a segmentos esféricos, que pueden ser entendidos como pertenecientes al "álgebra geométrica". Así, en la proposición 4 del Libro II, se plantea el problema de:

"Cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de los segmentos esféricos obtenidos estén en una razón dada."

Aunque Arquímedes resolvió el problema geométricamente, utilizando intersecciones de secciones cónicas, el mismo conlleva, desde una perspectiva algebraica, a una ecuación cúbica, [2].

En el siglo XI d. C., aparece en escena el matemático árabe Omar Al Khayyam quien realizó una clasicación de las ecuaciones de grado menor o igual a tres en 25 formas diferentes; once de las cuales se podían resolver con regla y compás y catorce no podían ser resueltas con ayuda exclusiva de los Elementos de Euclides. En este sentido el principal aporte de Al Khayyam consistió en presentar, mediante consideraciones geométricas y utilizando algunas proposiciones de Euclides y Apolonio, la solución de los 14 casos, mediante la intersección de secciones cónicas [4].

En la Edad Media el desarrollo de la matemática en Europa sufre un profundo declive y la única actividad en esta ciencia, fue desarrollada por la cultura islámica y se relaciona fundamentalmente con la traducción y compilación de trabajos de los griegos. El ocaso de la ciencia árabe inicia a finales del siglo XII y en las primeras décadas del siglo $XIII$ comienza el renacimiento matemático occidental con los trabajos de Leonardo de Pisa. Su labor no tiene seguidores de importancia y en esta época, en cuanto a la solución de la ecuación cúbica se refiere, es necesario mencionar los trabajos de Luca Pacioli, que aunque no fue considerado un gran matemático, en el siglo XV resolvió casos particulares de la ecuación $x^3 + bx = c$, y por la afirmación que realizó, en 1494, en su libro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* en relación con este problema [8]:

"la solución de la ecuación cúbica es tan imposible en el estado actual de la ciencia como la cuadratura del círculo".

En los primeros años del siglo XVI se produce un notable avance en Europa, en cuanto a la solución de la ecuación cúbica, gracias a los trabajos de Del Ferro, Tartaglia, Cardano y Bombelli, entre otros. Del Ferro y Tartaglia, en 1504, resuelven la ecuación de tercer grado y consecuentemente verifican que la afirmación de Pacioli es falsa. Ferrari resuelve la ecuación de cuarto grado y Cardano publica ambas soluciones en medio de una gran controversia.

De acuerdo a [3] los avatares y la polémica alrededor de la solución de la ecuación cúbica se desarrollaron, más o menos, en los siguientes términos: Alrededor del año 1505, Scipione del Ferro (1465-1526), profesor de matemáticas de la Universidad de Bologna, descubre la fórmula para resolver la ecuación cúbica sin término cuadrático, sin embargo no divulga sus trabajos y estos permanecen desconocidos hasta que en los últimos días de vida se los comunica a su yerno Anniballe della Nave y a uno de sus discípulos Antonio María del Fiore.

Aproximadamente en el año 1535, Del Fiore, tal vez motivado por la posesión de la fórmula, propone un reto público al matemático italiano Niccoló Fontana de Brescia (1499-1557), apodado Tartaglia (Tartamudo), en el que lo compromete a que cada uno debe resolver los problemas que le plantee el otro. Los problemas propuestos por Del Fiore, estaban relacionados con la ecuación cúbica y Tartaglia, en ese año, descubre un método para resolver la ecuación cúbica sin término cuadrático, con el que soluciona todos los problemas que propuso Del Fiore, mientras que este no es capaz de resolver ninguno de los planteados por Tartaglia, con lo que Del Fiore es derrotado estruendosamente.

Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático, médico y astrólogo italiano, se entera de la victoria de Tartaglia y le da a conocer la fórmula. En 1539, Cardano se compromete, mediante juramento, a no revelar la fórmula por lo que Tartaglia acepta y le comunica su método en la forma de un verso para dificultar su análisis si por alguna circunstancia este documento llegase a la persona equivocada. De manera explícita el verso, en español, se presenta a continuación:

Cuando está el cubo con la cosa preso
y se iguala a algún número discreto
Busca otras dos que difieran en eso.
Después tú harás esto que te espeto
que su producto sea siempre igual
al tercio del cubo de la cosa neto.
Después el resultado general
de sus lados cúbicos bien restados
te darán a ti la cosa principal. (Pérez y Sánchez, 2017)

En 1542, Cardano, y su discípulo Loudovico Ferrari (1522-1565) visitan a Anniballe della Nave y al estudiar documentos de Scipione del Ferro encuentran la fórmula que Tartaglia les había comunicado, por lo que consideran que pueden publicarla sin incumplir el juramento realizado a Tartaglia. En efecto, en 1545 Cardano publica *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*, más conocida como *Ars Magna*, donde exponen la solución general de la ecuación cúbica y la solución de la ecuación de cuarto grado atribuida a Ferrari.

Aunque en el *Ars Magna*, Cardano reconoce que la fórmula, le fue proporcionada por Tartaglia, este se siente traicionado y en 1546 en su obra *Questi et inmventioni diverse (Nuevos problemas e inventos)* relata su versión de los hechos, transcribe la correspondencia sostenida con Cardano y se queja de la manera de actuar de este. A partir de este momento se inicia un litigio entre Tartaglia y Ferrari, en defensa de su maestro Cardano, quien se mantuvo al margen del mismo, y que finaliza, en 1548, con un nuevo desafío entre Tartaglia y Ferrari en el que este último resulta victorioso.

En estas circunstancias, aunque se observa que fue Del Ferro el primero en resolver la ecuación cúbica, el hecho de no publicar sus resultados presenta una limitación para la adjudicación a este de la fórmula. Así mismo la polémica suscitada entre Cardano y Tartaglia nos muestra evidencia de que la lucha por el reconocimiento de la solución de la ecuación cúbica no fue completamente dilucidada, tanto es así, que la fórmula referida, se conoce en la actualidad como, "*La fórmula de Tartaglia-Cardano*".

La aplicación de esta fórmula, en ocasiones, involucra raíces cuadradas de números negativos, dificultad que no pudo ser resuelta en aquella época por Tartaglia, ni Cardano y que se denomina, *el caso irreducible*. Los trabajos, en este sentido, fueron desarrollados por el ingeniero y arquitecto italiano Rafael Bombelli (1526-1573) y se consideran como el verdadero origen de los números complejos.

3. La fórmula de Tartaglia - Cardano

A continuación se presenta la deducción de la fórmula para determinar las raíces de una ecuación cúbica de la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \tag{1}$$

La exposición, con las modificaciones apropiadas, sigue la línea expuesta en [5] o en [7] y consiste en primer lugar en eliminar el término cuadrático. Esto se logra mediante la sustitución

$$x = z - \frac{b}{3a}.$$

Al sustituir este valor en la ecuación (1) y efectuar las correspondientes operaciones se obtiene

$$z^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) z + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}\right) = 0$$

Ecuación que tiene la forma

$$z^3 + pz + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{2}$$

con

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{y} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$$

Obsérvese que la identidad

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3,$$

puede expresarse en la forma

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - u^3 - v^3 = 0,$$

de la cual, al compararla con (2) es posible deducir que si se encuentran valores u y v tales

$$p = -3uv \text{ y } q = -u^3 - v^3,$$

entonces una solución de la ecuación (2) es $z = u + v$ y así la tarea consiste en determinar los valores de u y v que satisfagan estas condiciones.

Dado que $v = -\frac{p}{3u}$ entonces $z = u - \frac{p}{3u}$ donde u es tal que $u^3 + q - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = 0$ o de manera equivalente

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

ecuación cuadrática en la variable u^3 cuya solución es

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$$

así

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

y como $q = -u^3 - v^3$ entonces

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

con lo que

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} \tag{3}$$

es una solución de la ecuación (2) y una solución de la ecuación (1) es:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \frac{b}{3a} \tag{4}$$

donde $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$ y $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$, expresión que se conoce como la Fórmula de Tartaglia - Cardano. La cantidad $\Delta = 27q^2 + 4p^3$ se llama el discriminante de la ecuación y determina el tipo de raíces de la misma. Un análisis detenido de esta situación, que no consideraremos aquí, puede encontrase en [7] en donde se demuestra que:

1. Si $\Delta = 0$ las raíces de la ecuación (1) son reales y al menos dos de ellas son iguales.
2. Si $\Delta > 0$ la ecuación (1) tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.
3. Si $\Delta < 0$ la ecuación (1) tiene tres raíces reales simples.

En este artículo se presta atención a los dos siguientes interrogantes que no fueron considerados, en su época, ni por Tartaglia ni por Cardano:

a. ¿Cómo calcular las otras dos raíces de la ecuación cúbica?

b. ¿Qué sucede si la cantidad $\Delta = 27q^2 + 4p^3$ es negativa?

En la actualidad, si la expresión (3) nos proporciona una raíz z_1 de la ecuación cúbica, las otras dos raíces pueden encontrarse aplicando la regla de Ruffini-Horner a la ecuación cúbica $z^3 + pz + q = 0$ para obtener la ecuación cuadrática

$$z^2 + (z_1 + p)z + (p + z_1^2) = 0,$$

La ecuación cuadrática se puede resolver utilizando la fórmula de la ecuación general de segundo grado, con lo que las dos raíces adicionales están dadas por

$$z_{2,3} = \frac{-z_1 \pm \sqrt{-3z_1^2 - 4p}}{2}$$

Y así las tres raíces de la ecuación cúbica original son

$$x_1 = z_1 - \frac{b}{3a},\ x_2 = z_2 - \frac{b}{3a},\ x_3 = z_3 - \frac{b}{3a}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra lo considerado hasta el momento.

Ilustración 1. Resolver la ecuación $x^3 + 18x^2 + 96x + 160 = 0$. Aparte que $\Delta = 0$ y por tanto la ecuación tiene tres raíces reales de las cuales, por lo menos dos, son repetidas. Veamos esto. Al aplicar la sustitución $x = z - 6$ se obtiene la ecuación

$$z^3 - 12z + 16 = 0$$

Si a esta ecuación se aplica la fórmula de Tartaglia- Cardano resulta que una raíz es

$$z_1 = \sqrt[3]{-8 + \sqrt{(8)^2 + (-4)^3}} + \sqrt[3]{-8 - \sqrt{(8)^2 + (-4)^3}}$$

es decir

$$z_1 = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} = -4$$

y por tanto una solución de la ecuación original es $x_1 = -4 - 6 = -10$. Si se utiliza división sintética con la ecuación $z^3 - 12z + 16 = 0$ y la raíz $z_1 = -4$ resulta la ecuación cuadrática $z^2 - 4z + 4 = 0$ que tiene como raíz doble $z_{2,3} = 2$ y así, para la ecuación inicial $x_1 = -10$ es una raíz simple y $x_{2,3} = -4$ es una raíz doble.

Ilustración 2. Resolver la ecuación $x^3 - 11x - 20 = 0$. Aparte que $\Delta = 5476 > 0$, por tanto la ecuación tiene una raíz real y dos complejas conjugadas. Si, a esta ecuación, se aplica el teorema de Bezout (ceros racionales) se encuentra que $x_1 = 4$ es una raíz de la ecuación.
Al utilizar la fórmula de Tartaglia- Cardano se encuentra que:

$$x_1 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{(-10)^2 + (-\frac{11}{3})^3}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{(-10)^2 + (-\frac{11}{3})^3}}$$

es decir, $x_1 = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{270 + 111\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{270 - 111\sqrt{3}}$ y por tanto necesariamente debemos concluir que:

$$\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{270 + 111\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{270 - 111\sqrt{3}} = 4$$

Curioso, pero real, ¡la suma de dos raíces cúbicas en cuyo argumento hay una raíz cuadrada puede ser un número entero!. Cómo se explica esto?.

Puesto que los números de la forma $s + t\sqrt{3}$ con $s,\ t \in \mathbb{R}$ con las operaciones de adición y multiplicación usuales en dicho conjunto forman un cuerpo entonces podemos considerar que, $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{270 + 111\sqrt{3}} = s + t\sqrt{3}$ o de manera equivalente

$$270 + 111\sqrt{3} = (s + t\sqrt{3})^3 = (s^3 + 9st^2) + (3s^2t + 3t^3)\sqrt{3}$$

De lo que se deduce el sistema de ecuaciones

$$s^3 + 9st^2 = 270 \text{ y } s^2t + t^3 = 37$$

que tiene como solución $s = 6$ y $t = 1$ y así se concluye que

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{270 + 111\sqrt{3}} = 6 + \sqrt{3}$$

De manera análoga $\frac{1}{3}\sqrt[3]{270 - 111\sqrt{3}} = 6 - \sqrt{3}$ y por tanto

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{270 + 111\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{270 - 111\sqrt{3}} = \frac{1}{3}(6 + \sqrt{3}) + \frac{1}{3}(6 - \sqrt{3}) = 4$$

Si se efectúa la división de $f(x) = x^3 - 11x - 20$ entre $x - 4$ se obtiene el trinomio $g(x) = x^2 + 4x + 5$, el cual tiene como raíces $x_{2,3} = -2 \pm i$ y por tanto la ecuación dada tiene efectivamente, una raíz real y dos complejas conjugadas.

Como lo mencionamos en la sección 1 el caso en el cual $\Delta = 27q^2 + 4p^3 < 0$, denominado *el caso irreducible*, fue considerado por Bombelli y de acuerdo a [3] su argumento utiliza algunas relaciones entre números complejos que permiten, de alguna manera, calcular las raíces cúbicas de un número complejo, para lo cual se puede proceder de la siguiente manera.

En primer lugar nótese que si $\sqrt{c + di} = s + ti$ entonces elevando al cuadrado se verifica que $\sqrt{c - di} = s - ti$, por lo que para aplicar la fórmula de Tartaglia-Cardano, en el caso irreducible, basta calcular una de las dos raíces cúbicas involucradas.

En segundo lugar obsérvese que si $\sqrt[3]{c + di} = s + ti$ entonces $c + di = (s + ti)^3$ por lo que al calcular sus módulos resulta que $c^2 + d^2 = (s^2 + t^2)^3$ y así $\sqrt[3]{c^2 + d^2} = s^2 + t^2$ de lo que se deduce que

$$s^2 < \sqrt[3]{c^2 + d^2} \qquad (5)$$

Por otro lado si se llama

$$r = \sqrt{c^2 + d^2} \text{ y } \theta = arg(c + di)$$

entonces

$$|\sqrt[3]{c+di}| = \sqrt[3]{r} \text{ y } Arg(\sqrt[3]{c+di}) = \tfrac{(\theta+2k)}{3}, \quad 0 \leq k \leq 2$$

por lo que si $d > 0$ entonces $0 \leq \theta \leq \pi$ y así cuando $k = 0$ se tiene que

$$0 \leq arg(\sqrt[3]{c+di}) < \tfrac{\pi}{3}$$

de lo que se concluye que al menos uno de los valores de $\sqrt[3]{c+di}$ está en el primer cuadrante.

Puesto que $c + di = (s + ti)^3 = (s^3 - 3st^2) + (3s^2t - t^3)i$ entonces

$$c = s^3 - 3st^2 \tag{6}$$

y como la raíz cúbica $s + ti$ está en el primer cuadrante entonces $s > 0$ por lo que

$$s^3 > c \tag{7}$$

Generalmente las relaciones (5), (6) y (7) permiten calcular una de las raíces cúbicas de un número complejo. Las expresiones (5) y (7) posibilitan conocer s y en seguida, se utiliza (6) para obtener t.

El siguiente ejemplo, similar al considerado por Bombelli en su trabajo, ilustra esta situación.

Ilustración 3. Resolver la ecuación $x^3 - 30x - 36 = 0$. Para esta ecuación $\Delta = -73008 < 0$ y por tanto la ecuación posee tres raíces reales simples.
Al aplicar a esta ecuación la fórmula de Tartaglia-Cardano resulta

$$x_1 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{-676}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{-676}} = \sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}$$

expresión que parece ser un número complejo. Si se aplica, a esta ecuación, el teorema de los ceros racionales se encuentra que $x_1 = 6$ es una raíz de la ecuación, por lo que debemos tener, de manera sorprendente, que:

$$x_1 = \sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i} = 6.$$

Este resultado lo podemos explicar utilizando las relaciones consideradas anteriormente.

De acuerdo con las consideraciones realizadas se debe calcular

$$\sqrt[3]{18 + 26i} = s + ti$$

Donde s está determinado por las relaciones $s^2 < \sqrt[3]{18^2 + 26^2} = 10$ y $s^3 > 18$. De la primera desigualdad $s = 1, 2, 3$ cuyos cubos son, respectivamente $1, 8, 27$ por lo que de la segunda desigualdad $s = 3$. El valor de t se calcula por la igualdad $c = s^3 - 3st^2$ que en este caso equivale a $18 = 27 - 9t^2$ y así $t = 1$, con lo que una raíz de la ecuación $x^3 - 30x - 36 = 0$ es

$$x_1 = \sqrt[3]{18^2 + 26i} + \sqrt[3]{18^2 - 26i} = (3 + i) + (3 - i) = 6$$

Dividiendo el polinomio $f(x) = x^3 - 30x - 36$ entre $x - 6$ se obtiene el polinomio de segundo grado $g(x) = x^2 + 6x + 6$ cuyas raíces son $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}$. Así las soluciones de la ecuación $x^3 - 30x - 36 = 0$ son: $6, 3 + \sqrt{3}$ y $3 - \sqrt{3}$.

4. Consideraciones finales

En esta sección se presentan algunas observaciones que complementan lo considerado anteriormente.

a. El estudio de la ecuación cúbica es diverso y se encuentra desarrollado de manera amplia en la literatura académica; en este artículo se ha querido conjugar dos enfoques, histórico y algebraico, lo que permite al lector interesado, por un lado, conocer el método algebraico de resolución de la ecuación cúbica y por otro familiarizarse con la evolución histórica de un problema que, aunque muy difícil en la antigüedad, se considera actualmente simple con la utilización de la tecnología.

b. Aunque la deducción de la fórmula de Tartaglia-Cardano se realizó, mediante manipulaciones de carácter algebraico, es necesario comentar que en la época en que tal fórmula fue establecida, las identidades algebraicas utilizadas en su deducción estuvieron basadas exclusivamente en razonamientos de carácter geométrico. Como una ilustración de esto, ver por ejemplo, [1].

c. En los años siguientes a la publicación del *Ars Magna*, de Cardano, diversos matemáticos contribuyeron a la solución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, entre ellos se encuentran, Vièta, Harriot, Tschirnhaus, Euler, Bezout, Lagrange y Descartes los cuales propusieron métodos originales, así por ejemplo, un esbozo del método de Viéta pueden consultarse en [2].

d. Aunque Niels Henrik Abel (1802-1829) demostró, en 1821, que es imposible resolver una ecuación polinómica de grado $n > 4$ por medio de operaciones aritméticas y extracción de raíces; fue el matemático francés Evaristo Galois (1811-1832), en 1830, quien caracterizó las ecuaciones polinómicas que son resolubles por radicales.

e. Actualmente, en el medio educativo, se impulsa la tendencia a disminuir la utilización de manipulaciones de carácter algebraico y en su lugar propender por argumentos de índole conceptual, en este sentido, la fórmula de Tartaglia-Cardano resulta irrelevante y en su lugar se podría impulsar la utilización de un software de carácter científico con el cual, por ejemplo la ecuación $x^3 + ax^2 + bx = c$ puede ser escrita en la forma

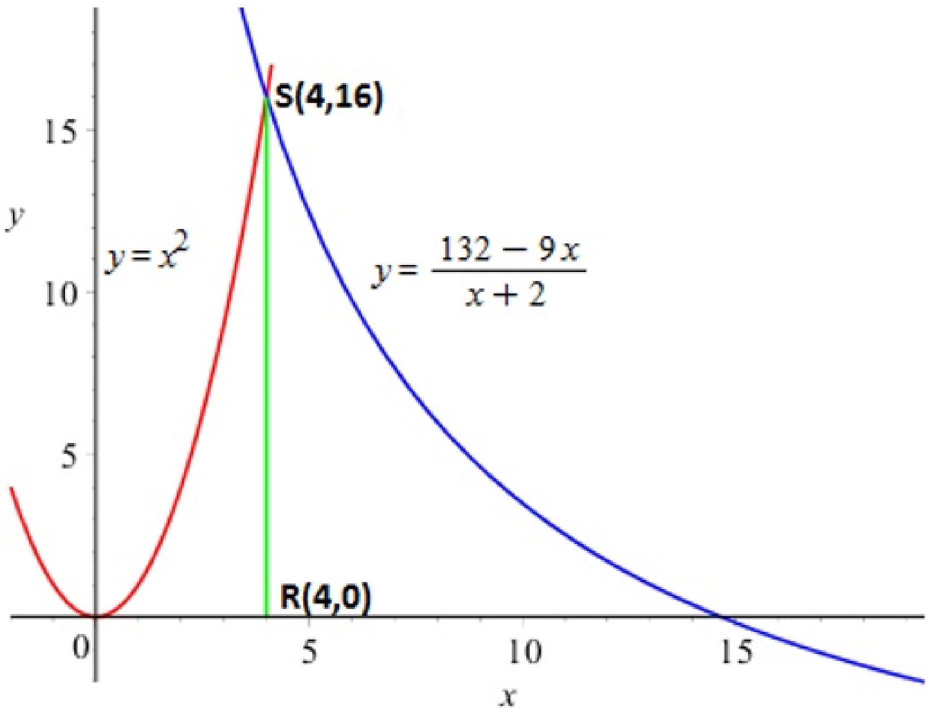
$$x^2 = \frac{c - bx}{x + a}$$

Y por tanto la solución de la ecuación puede encontrarse como la intersección de la parábola $y = x^2$ y la hipérbola

$$y = \frac{c - bx}{x + a}.$$

Ilustración 5. Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 + 9x = 132$, utilizando la observación anterior.

El proceso descrito requiere hallar el punto de intersección de la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \dfrac{132 - 9x}{x + 2}$. Al graficar estas cónicas se encuentra que su punto de intersección es $R(4, 16)$, y así una solución de la ecuación dada es $x = 4$.



Referencias

[1] Barrera, F. (2001). La importancia de las representaciones geométricas en la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas.*Educación Matemática*, 13(1), 107-119.

[2] Boyer, C. (1986). Historia dela matemática. *Alianza Editorial.* Madrid.

[3] Casalderrey F. (2009). *Cardano y Tartaglia: la aventura de la ecuación cúbica.* Madrid. Nívola. 22

[4] Espinosa M. C. (2014). *La Solución de la ecuación de tercer grado según Omar Al Khayyam.* Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle. Cali. 15, 22

[5] Hall, H. y Night, S. (1968). Algebra Superior, Editorial Uteha, México. 16, 20

[6] Pérez, J. Sánchez, C. (2007). Historia de las Matemáticas. Cursos THALES: Ecuaciones Algebraicas, Andalucía. 16

[7] Ivorra, C. (2011). Las fórmulas de Cardano-Ferrari. Recuperado de `http://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf` 17

[8] Lucca, A. (2013). Análisis de Variable Compleja. Recuperado de `https://matematics.wordpress.com/category/analisis-de-variable-compleja-2`

[9] Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia.

17, 18

16

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: fsoto@udenar.edu.co
e-mail: samolo@udenar.edu.co